Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

J.-Y. Chemin

Système primitif de l'océan-atmosphère et limite quasi-géostrophique

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1995-1996), exp. nº 7, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1995-1996____A7_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

ECOLE POLYTECHNIQUE
F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19

Unité de Recherche Associée D 0169

Séminaire 1995-1996

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

SYSTÈME PRIMITIF DE L'OCÉAN-ATMOSPHÈRE ET LIMITE QUASI-GÉOSTROPHIQUE

J.-Y. CHEMIN

Exposé n° VII

19 Mars 1996

Système primitif de l'océan-atmosphère et limite quasi-géostrophique

Jean-Yves Chemin,
Laboratoire d'Analyse Numérique, URA 189 du CNRS,
Université de Paris 6, BP 187,
75232 PARIS CEDEX 05

Introduction

Dans tout ce texte, nous désignerons par U un couple (v, T) où v est un champ de vecteurs sur $\mathbf{R}^3$ dépendant du temps et T une fonction scalaire, tous deux dépendant de la variable (t, x) de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^3$. Nous désignerons par H^s l'espace de Sobolev homogène sur $\mathbf{R}^3$, c'est-à-dire l'ensemble des distributions tempérées u telles que

$$|u|_s^2 \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbf{R}^3} |\xi|^{2s} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

Rappelons que cet espace est de Hilbert dès que $s < 3/2$. On se propose d'étudier le modèle suivant :

$$(\widetilde{PE}_\epsilon)\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t v^1 + v \cdot \nabla v^1 - \nu \Delta v^1 - \dfrac{1}{\epsilon} v^2 & = & -\dfrac{\partial_1 \Phi}{\epsilon} \\ \partial_t v^2 + v \cdot \nabla v^2 - \nu \Delta v^2 + \dfrac{1}{\epsilon} v^1 & = & -\dfrac{\partial_2 \Phi}{\epsilon} \\ \partial_t v^3 + v \cdot \nabla v^3 - \nu \Delta v^3 + \dfrac{1}{\epsilon} T & = & -\dfrac{\partial_3 \Phi}{\epsilon} \\ \partial_t T + v \cdot \nabla T - \nu' \Delta T - \dfrac{1}{\epsilon} v^3 & = & 0 \\ \operatorname{div} v & = & 0 \\ (v^1, v^2, v^3, T)_{|t=0} & = & (v_0^1, v_0^2, v_0^3, T_0), \end{array}\right.$$

où l'on a posé

$$v \cdot \nabla = \sum_{j=1}^{3} v^j \partial_j \quad \text{et} \quad \operatorname{div} v = \sum_{j=1}^{3} \partial_j v^j,$$

et où ν et ν' désignent deux nombres réels strictement positifs.

Nous nous concentrerons ici sur l'étude mathématique de ce système et notamment sur le passage à la limite quand ϵ tend vers 0. Lorsque l'on fait tendre ϵ vers 0, on donne beaucoup d'importance aux termes qui sont divisés par ϵ ; ce sont eux les termes dits pénalisés. Pour des travaux conduisant à des modèles de ce type, le lecteur pourra consulter les travaux de modélisation en climatologie de J.-L. Lions, R. Temam et S. Wang (voir [13]) ainsi que le survol de J.-L. Lions (voir [12]). Signalons également que, dans [1], T. Beale et A. Bourgeois étudient, dans le cas où $\nu = \nu' = 0$ un modèle de ce type. Par souci de simplicité, nous l'avons ici très légèrement simplifié.

Écrivons tout d'abord le système $(\widetilde{PE_\epsilon})$ sous la forme plus compacte suivante. En posant

$$U \stackrel{\text{déf}}{=} (v, T) = (v^1, v^2, v^3, T),$$

on a

$$(\widetilde{PE_\epsilon}) \left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t U + v \cdot \nabla U - LU + \epsilon^{-1} AU & = & \epsilon^{-1}(-\nabla\Phi, 0) \\ \operatorname{div} v & = & 0 \\ U_{t=0} & = & U_0, \end{array} \right.$$

la matrice A étant définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et l'opérateur L par $LU = (\nu\Delta v, \nu'\Delta T)$. Remarquons immédiatement que, formellement, le système $(\widetilde{PE_\epsilon})$ vérifie l'estimation d'énergie

$$\frac{d}{dt}\|v(t)\|_{L^2}^2 + \frac{d}{dt}\|T(t)\|_{L^2}^2 + 2\nu\|\nabla v(t)\|_{L^2}^2 + 2\nu'\|\nabla v(t)\|_{L^2}^2 = 0,$$

parce que d'une part la divergence du champ de vecteurs v est nulle et d'autre part la matrice A est antisymétrique. Le fait remarquable est que le paramètre ϵ n'apparaît pas dans les estimations d'énergie L^2. Nous verrons qu'il n'apparaît pas non plus dans les estimations d'énergie dans les espaces de Sobolev.

C'est ce fait qui distingue ce problème de pénalisation de beaucoup de problèmes classiques de pénalisation. Prenons par exemple le problème de la pénalisation de la divergence pour l'obtention de l'équation Navier-Stokes incompressible. Regardons le système

$$\partial_t v + v \cdot \nabla v + \frac{1}{2}(\operatorname{div} v)v - \nu\Delta v - \frac{1}{\epsilon}\nabla \operatorname{div} v = 0.$$

Dans [11], J.-L. Lions a démontré que la famille (v_ϵ) convergeait vers une solution de l'équation de Navier-Stokes. L'estimation d'énergie sur ce système est

$$\frac{d}{dt}\|v(t)\|_{L^2}^2 + 2\nu\|\nabla v(t)\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\epsilon}\|\operatorname{div} v(t)\|_{L^2}^2 = 0.$$

Le fait que

$$\int_{\mathbf{R}^+} \|\operatorname{div} v(t)\|_{L^2}^2 dt \leq \frac{\epsilon}{2}\|v_0\|_{L^2}^2$$

joue un rôle important dans la démonstration.

Comme nous l'avons vu, dans le problème que nous regardons ici, le terme de pénalisation n'apparaît pas dans les estimations d'énergie. Son seul rôle semble être de générer des oscillations en temps de plus en plus rapide à mesure que ϵ tend vers 0. Nous verrons que cela contribue à la stabilisation du système, c'est-à-dire à l'existence de solutions globales régulières.

Pour introduire les théorèmes démontrés dans ce texte, nous allons déterminer formellement le système limite. Considérons une famille $((v_\epsilon, \Phi_\epsilon))_{0<\epsilon\leq\epsilon_0}$ une famille de solutions de $(\widetilde{PE}_\epsilon)$ et supposons qu'elle converge vers un couple $(\widetilde{v}, \widetilde{\Phi})$. Supposons que cette convergence soit suffisamment forte pour permettre un passage à la limite dans les termes non linéaires, il est clair que l'on doit avoir

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to\infty} T_\epsilon + \partial_3\Phi_\epsilon &= 0,\\
\lim_{\epsilon\to\infty} v_\epsilon^2 - \partial_1\Phi_\epsilon &= 0,\\
\lim_{\epsilon\to\infty} v_\epsilon^1 + \partial_2\Phi_\epsilon &= 0 \quad \text{et}\\
\lim_{\epsilon\to\infty} v_\epsilon^3 &= 0.
\end{aligned}$$

Ceci implique que, si l'on pose $\nabla_2^\perp f \stackrel{\text{déf}}{=} (-\partial_2 f, \partial_1 f)$, on a

$$(QG)\left\{\begin{array}{rcl} \widetilde{v} &=& \nabla_2^\perp\widetilde{\Phi} \quad \text{et}\\ \widetilde{T} &=& -\partial_3\widetilde{\Phi}. \end{array}\right.$$

Ces relations sont connues dans la littérature sous le nom de conditions quasi-géostrophiques. Le système que l'on obtient par ce passage formel à la limite peut s'écrire de la façon suivante :

$$(EQG)\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t\widetilde{v} + \widetilde{v}\cdot\nabla\widetilde{v} - \nu\Delta\widetilde{v} + w^\perp &=& \nabla\widetilde{\Psi}\\ \partial_t\widetilde{T} + \widetilde{v}\cdot\nabla\widetilde{T} - \nu'\Delta\widetilde{T} - w^3 &=& -\partial_3\Psi\\ \widetilde{v} &=& \nabla_2^\perp\widetilde{\Phi}\\ \widetilde{T} &=& -\partial_3\widetilde{\Phi}\\ (\widetilde{v}, \widetilde{T})_{|t=0} &=& (\widetilde{v}_0, \widetilde{T}_0), \end{array}\right.$$

où les inconnues sont $(\widetilde{v}, \widetilde{T}, \widetilde{\Phi})$ ainsi que (w, Ψ). Remarquons que $\widetilde{v}$ est un champ de vecteurs à deux composantes qui dépend de trois variables et dont la divergence est nulle alors que w est un champ de vecteurs sur $\mathbf{R}^3$.

Nous allons simplifier l'écriture du système (EQG) ci-dessus en introduisant le tourbillon potentiel, quantité qui jouera un rôle crucial dans tout l'article.

Définition 0.1 *On appelle tourbillon potentiel d'un quadruplet $U = (v, T)$ (ou potential vorticity en anglais) et l'on note Ω_U ou bien Ω en l'absence d'ambiguïté la quantité*

$$\Omega = \partial_1 v^2 - \partial_2 v^1 - \partial_3 T.$$

Cette quantité jouera pour le système étudié ici un rôle analogue à celui du tourbillon en mécanique des fluides bidimensionnels. En effet, si l'on définit l'opérateur sur $H^{-1}(\mathbf{R}^3)$ par

$$\Delta^{-1}u \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{F}^{-1}(-|\xi|^{-2}\widehat{u}(\xi)),$$

on a

$$\begin{aligned}
\Omega &= \partial_1 v^2 - \partial_2 v^1 - \partial_3 T\\
&= \partial_1^2\widetilde{\Phi} + (-\partial_2)^2\widetilde{\Phi} + (-\partial_3)^2\widetilde{\Phi}\\
&= \Delta\widetilde{\Phi}.
\end{aligned}$$

Les conditions quasi-géostrophiques peuvent s'écrire

$$(QG)\left\{\begin{array}{rcl} v &=& \nabla_2^\perp\Delta^{-1}\Omega_{(v,T)} \quad \text{et}\\ T &=& -\partial_3\Delta^{-1}\Omega_{(v,T)}. \end{array}\right.$$

De plus, on peut calculer $\partial_t\widetilde{\Omega} + \widetilde{v} \cdot \nabla\widetilde{\Omega}$ pour une solution du système (EQG). On trouve alors que le système (EQG) est équivalent à

$$(QGS) \left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t\widetilde{\Omega} + \widetilde{v} \cdot \widetilde{\Omega} - \nu\Delta\widetilde{\Omega} & = & 0 \\ \widetilde{v} & = & \nabla_{\frac{1}{2}}^{\perp}\Delta^{-1}\widetilde{\Omega} \\ \widetilde{T} & = & -\partial_3\Delta^{-1}\widetilde{\Omega}. \end{array} \right.$$

Une estimation d'énergie L^2 sur ce système assure formellement que

$$\frac{d}{dt}\|\Omega(t)\|_{L^2}^2 + \nu\|\nabla\Omega(t)\|_{L^2}^2 = 0.$$

Grâce aux conditions quasigéostrophiques, ceci fournit sur $(\widetilde{v}, \widetilde{T})$, une estimation dans l'espace $L^\infty(\mathbf{R}^+; H^1) \cap L^2(\mathbf{R}^+, H^2)$. La théorie classique des systèmes paraboliques assure que le système (QGS) est globalement bien posé dans H^1.

Le but de ce texte est de démontrer que si l'on est suffisamment proche du système (QGS), c'est-à-dire essentiellement si ϵ est assez petit, alors le système $(\widetilde{PE_\epsilon})$ est globalement bien posé.

La théorie de Fujita et Kato (voir [8] ainsi que [2] pour des déloppements récents) dit que des systèmes du type $(\widetilde{PE_\epsilon})$ sont globalement bien posés pour des données initiales petites en norme $H^{\frac{1}{2}}$. Dans ce texte, nous obtiendrons un résultat d'existence et d'unicité globale lorsque ϵ est suffisamment petit et pour des données initiales telles que la partie pénalisée soit elle aussi, suffisamment petite.

Le texte sera structuré comme suit :

- dans la première partie, nous énoncerons précisément un théorème d'existence et d'unicité globale et un théorème de convergence, puis ferons quelques commentaires à leur sujet ;
- dans le deuxième partie, nous démontrerons le théorème d'existence et d'unicité globale,
- dans la troisième et dernière partie, nous donnerons une idée de la démonstration du théorème de convergence vers le système (QGS).

Remerciements Je tiens à remercier J.-L. Lions pour les nombreuses remarques qu'il m'a faites à propos de ce travail. J'exprime également ma gratitude à Y. Brenier, E. Grenier, R. Lewandowski et F. Murat pour les discussions amicales et fructueuses que j'ai pu avoir avec eux au sujet des questions traitées dans ce texte.

1 Énoncé des résultats

Définissons maintenant la partie dite oscillante, c'est-à-dire la partie sur laquelle la pénalisation agit.

Définition 1.1 *Soit $U = (v, T)$, on définit alors U_{osc} et U_{QG} par*

$$\begin{array}{rcl} U_{osc} & = & (v_{osc}, T_{osc}) \quad \textit{avec} \\ v_{osc}^1 & = & v^1 + \partial_2\Delta^{-1}\Omega, \\ v_{osc}^2 & = & v^2 - \partial_1\Delta^{-1}\Omega, \\ v_{osc}^3 & = & v^3 \\ T_{osc} & = & T + \partial_3\Delta^{-1}\Omega \quad \textit{et} \\ U_{QG} & = & U - U_{osc}. \end{array}$$

Remarquons tout de suite que, pour tout réel s, on a

$$(U_{osc}|U)_{H^s} = (AU_{osc}|U)_{H^s} = 0.$$

Il est clair que, pour tout réel s, la norme

$$\left(|\Omega|^2_{s-1} + |U_{osc}|^2_s\right)$$

est équivalente à la norme $|U|^2_s$. Pour alléger les notations, nous désignerons indifféremment par $|U|^2_s$ la (semi-)norme dans l'espace H^s et les quantités

$$|\Omega_U|^2_{s-1} + |U_{osc}|^2_s \quad \text{et} \quad |U_{QG}|^2_s + |U_{osc}|^2_s.$$

Le théorème démontré est le suivant.

Théorème 1.1 *Il existe une constante c (strictement inférieure à 1) telle que, si*

$$|\nu - \nu'| \leq c\nu \tag{1}$$

et si la donnée U_0 appartient à $H^1 \cap H^{-1}$ et vérifie

$$|U_{0,osc}|_{-1} \leq \frac{c\nu^4}{|U_0|_1^3} \exp\left(-\frac{|U_0|_1 |U_0|_0}{c\nu^2}\right) \quad et \tag{2}$$

$$\epsilon \leq \frac{c\nu^4}{|U_0|_1^4 |U_0|_{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{|U_0|_1 |U_0|_0}{c\nu^2}\right), \tag{3}$$

alors le système $(\widetilde{PE}_\epsilon)$ est globalement bien posé, c'est-à-dire qu'il admet une unique solution globale appartenant à $C(\mathbf{R}_+; H^1) \cap L^2(\mathbf{R}_+; H^2)$ et vérifiant

$$|U(t)|_1^2 + \nu \int_{\mathbf{R}_+} |U(\tau)|_2^2 d\tau \leq |U_0|_1^2.$$

Énonçons maintenant un théorème de convergence dans le cadre des données initiales bien préparées.

Théorème 1.2 *Soit $(U_{0,\epsilon})_{\epsilon \in]0,\epsilon_0]}$ une famille de données initiales bornées dans H^1 telles qu'il existe $U_{0,QG}$ tel que l'on ait*

$$\lim_{\epsilon \to 0} |U_{0,\epsilon} - U_{0,QG}|_{-1} = 0 \quad avec \quad (U_{0,QG})_{osc} = 0.$$

Alors, la famille $(U_\epsilon)_{\epsilon \in]0,\epsilon_0]}$ de solutions de $(\widetilde{PE}_\epsilon)$ avec donnée initiale $U_{0,\epsilon}$ converge vers la solution U_{QG} de (QGS) avec donnée initiale $U_{0,QG}$ et ce dans $L^\infty(\mathbf{R}_+; H^{1-\eta}) \cap L^2(\mathbf{R}^+, H^{2-\eta})$ pour tout η strictement positif. Plus précisement, on a

$$\lim_{\epsilon \to 0} U_\epsilon - U_{\epsilon,osc} = U_{QG} \quad dans \quad L^\infty(\mathbf{R}^+; H^1) \cap L^2(\mathbf{R}^+, H^2).$$

Ce théorème est démontré, uniquement sur un intervalle de temps fixe dans le cadre de l'équation de Navier-Stokes sur le tore $\mathbf{T}^3$ par E. Grenier dans [9]. Pour des viscosités nulles et sur le tore $\mathbf{T}^3$, T. Beale et A. Bourgeois démontrent dans [1] un résultat de convergence, sur un intervalle de temps fixe et dans le cas de viscosités nulles. Dans ce cas des viscosités nulles, D. Iftimie a récemment démontré dans [10] que le temps d'existence des solutions régulières du système $(\widetilde{PE}_\epsilon)$ avec viscosité nulle tendait vers $+\infty$ lorsque ϵ et $U_{\epsilon,0,osc}$ tendait vers 0.

2 Démonstration du théorème d'unicité globale

Par souci de simplicité, nous ne démontrerons les théorèmes énonçés ci-dessus uniquement sous l'hypothèse que $\nu = \nu'$. D'une manière générale, nous renvoyons le lecteur intéressé par le détail des démonstrations à [7].

La démonstration comporte trois étapes :

- une première consiste à transformer le système $(\widetilde{PE}_\epsilon)$ en le système (PE_ϵ) ; sous cette forme, le terme $\epsilon^{-1}AU_{osc}$ apparaître nettement, ce qui permet une majoration de
$$\left|\partial_t U(t) + \frac{1}{\epsilon}AU_{osc}(t)\right|_{-1} ;$$
- la deuxième est une "diagonalisation" du système, ce qui signifie que l'on sépare autant que faire ce peut la partie oscillante U_{osc} de la partie non oscillante Ω. Ceci conduit au système (DPE_ϵ) et à l'observation du fait que, si $|U_{osc}(t)|_{\frac{1}{2}}$ reste petit devant la viscosité ν, on obtient une estimation de type linéaire sur la norme H^1 de U ;
- la troisième consiste à dériver en temps le système (PE_ϵ) et à appliquer les deux remarques précédentes, c'est-à-dire les propositions 2.1 et 2.2.

Première étape

Comme dans le cas des équations de la mécanique des fluides incompressibles, utilisons la contrainte sur la divergence de v pour déterminer Φ. En appliquant l'opérateur divergence au système, on trouve facilement le système $(\widetilde{PE})_\epsilon$ est équivalent au système suivant :

$$(PE_\epsilon)\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t U + v\cdot\nabla U - LU + \epsilon^{-1}AU_{osc} & = & GP(U,U) \\ U_{|t=0} & = & U_0 \quad \text{avec} \end{array}\right.$$

$$GP(U,U) = (-\nabla p, 0) = \left(\nabla \sum_{1\leq i,j\leq 3} \partial_i\partial_j\Delta^{-1}(v^i v^j), 0\right). \tag{4}$$

Ayant mis le système de départ sous cette forme, nous pouvons dès maintenant énoncer la proposition suivante qui se démontre grâce au théorème de produit sur les espaces de Sobolev.

Proposition 2.1 *Soit U une solution de (PE_ϵ) qui est continue en temps à valeurs dans $H^1\cap L^2$. On a alors les estimations suivantes :*

$$\left|\partial_t U(t) + \frac{1}{\epsilon}AU_{osc}(t)\right|_{-1} \leq \nu|U(t)|_1 + C|U(t)|_1|U(t)|_{\frac{1}{2}} \quad et \tag{5}$$
$$\left|\partial_t U(t) + \frac{1}{\epsilon}AU_{osc}(t)\right|_{0} \leq \nu|U(t)|_2 + C|U(t)|_2|U(t)|_{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

Remarque Grâce à cette proposition, toute estimation sur $|\partial_t U|_{-1}$ donnera une estimation sur $\epsilon^{-1}|AU_{osc}|_{-1}$ et donc sur $\epsilon^{-1}|U_{osc}|_{-1}$ puisque la matrice A est inversible.

Deuxième étape

Établissons l'équation satisfaite par Ω, puis celle vérifiée par U_{osc}. Par définition de Ω, il est clair que

$$\begin{array}{rcl} \partial_t\Omega + v\cdot\nabla\Omega - \nu\Delta\Omega & = & \mathcal{R} \quad \text{avec} \\ \mathcal{R} & \stackrel{\text{déf}}{=} & -\partial_1 v\cdot\nabla v^2 + \partial_2 v\cdot\nabla v^1 + \partial_3 v\cdot\nabla T \\ & = & -(\partial_1 v^1 + \partial_2 v^2)(\partial_1 v^2 - \partial_2 v^1) + \partial_3 v\cdot\nabla T + \partial_1 v^3\partial_3 v^2 - \partial_2 v^3\partial_3 v^1. \end{array}$$

Comme la divergence du champ de vecteurs v est nulle, on a $\partial_1 v^1 + \partial_2 v^2 = -\partial_3 v^3$; d'où il vient que

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \partial_3 v^3_{osc}(\partial_1 v^2 - \partial_2 v^1) - \partial_1 v^3_{osc}\partial_3 v^2 + \partial_2 v^3_{osc}\partial_3 v^1 + \partial_3 v \cdot \nabla T \\ &= \partial_3 v^3_{osc}(\partial_1 v^2 - \partial_2 v^1) - \partial_1 v^3_{osc}\partial_3 v^2 + \partial_2 v^3_{osc}\partial_3 v^1 + (\partial_3 v_{osc}) \cdot \nabla T \\ &\qquad + \partial_3(v - v_{osc}) \cdot \nabla T_{osc} + \partial_3(v - v_{osc}) \cdot \nabla(T - T_{osc}).\end{aligned}$$

Calculons le terme $(\partial_3(v - v_{osc})) \cdot \nabla(T - T_{osc})$. Par définition, on a

$$\partial_3(v - v_{osc}) = (-\partial_2\partial_3\Delta^{-1}\Omega, \partial_1\partial_3\Delta^{-1}\Omega, 0) \quad \text{et} \quad T - T_{osc} = -\partial_3\Delta^{-1}\Omega.$$

D'où il résulte que

$$(\partial_3(v - v_{osc})) \cdot \nabla(T - T_{osc}) = 0.$$

C'est ici le point de la démonstration où l'on a utilisé tout particulièrement la forme spéciale du système. Par contre, le calcul du terme Q est sans intérêt et donc omis. Le système $(PE)_\epsilon$ est alors équivalent au système (DPE_ϵ) défini ci-dessous.

$$(DPE_\epsilon)\begin{cases} \partial_t\Omega + v \cdot \nabla\Omega - \nu\Delta\Omega &= q(U_{osc}, U) \\ \partial_t U_{osc} + v \cdot \nabla U_{osc} - \nu\Delta U_{osc} + \epsilon^{-1}AU_{osc} &= Q(U, U) \\ U_{|t=0} &= U_0 \quad \text{avec} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} q(U_{osc}, U) &= \partial_3 v^3_{osc}(\partial_1 v^2 - \partial_2 v^1) + \partial_3 v^3_{osc}\partial_3 T + \partial_3(v - v_{osc}) \cdot \nabla T_{osc} \quad \text{et} \\ Q(U, U) &= \begin{pmatrix} \partial_2\Delta^{-1}q(U_{osc}, U) + [v \cdot \nabla, \partial_2\Delta^{-1}]\Omega - \partial_1 p \\ -\partial_1\Delta^{-1}q(U_{osc}, U) - [v \cdot \nabla, \partial_1\Delta^{-1}]\Omega - \partial_2 p \\ -\partial_3 p \\ \partial_3\Delta^{-1}q(U_{osc}, U) + [v \cdot \nabla, \partial_3\Delta^{-1}]\Omega \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les inégalités relatives aux termes q et Q sont regroupées dans le lemme suivant, qui se démontre par exemple à l'aide du calcul paradifférentiel.

Lemme 2.1 *Il existe une constante C telle que l'on ait*

$$|q(U_{osc}, U)|_{-1} \leq C|U_{osc}|_{\frac{1}{2}}|U|_2 \quad \textit{et} \tag{7}$$

$$(Q(U, U)|U_{osc})_{H^1} \leq C|U_{osc}|_{\frac{1}{2}}|U|_2^2. \tag{8}$$

Nous pouvons maintenant formuler précisément la seconde idée de la démonstration au travers de la proposition suivante.

Proposition 2.2 *Soit $U \in C([0, T^\star[; H^1) \cap L^2_{loc}([0, T^\star[; H^2)$ une solution de (PE_ϵ) ; l'implication suivante est vraie.*

$$(\forall \tau \leq t\,,\ |U_{osc}(\tau)|_{\frac{1}{2}} \leq c\nu) \Rightarrow |U(t)|_1^2 + \nu\int_0^t |U(\tau)|_2^2 d\tau \leq |U_0|_1^2. \tag{9}$$

Remarque Par rapport au cas des équations de Navier-Stokes usuelles, où pour avoir une inégalité de ce type, il faut que $|U|_{\frac{1}{2}}$ soit petite, ici, seule la norme dans l'espace de Sobolev d'indice $1/2$ de la partie dite oscillante U_{osc} doit être supposée petite. Ceci, crucial pour démontrer le théorème, est une conséquence de la forme particulière du terme $q(U_{osc}, U)$ apparaissant dans l'équation (DPE_ϵ).

Démontrons la proposition. Par estimation d'énergie L^2 dans l'équation sur le tourbillon potentiel Ω, on a, grâce à la nullité de la divergence de v,

$$\frac{d}{dt}|\Omega(t)|_0^2 + 2\nu|\Omega(t)|_1^2 \leq 2(q(U_{osc}(t), U(t))|\Omega(t))_{L^2}.$$

D'après le lemme 2.1, on a

$$\begin{aligned} 2(q(U_{osc}(t), U(t))|\Omega(t))_{L^2} &\leq 2|q(U_{osc}(t), U(t))|_{-1}|U(t)|_2 \\ &\leq C|U_{osc}(t)|_{\frac{1}{2}}|U(t)|_2^2. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\frac{d}{dt}|\Omega(t)|_0^2 + 2\nu|\Omega(t)|_1^2 \leq C|U_{osc}(t)|_{\frac{1}{2}}|U(t)|_2^2. \tag{10}$$

Étudions maintenant l'évolution de la norme H^1 du terme oscillant U_{osc}. À nouveau grâce au lemme 2.1, on a

$$\frac{d}{dt}|U(t)|_1^2 + 2\nu|U(t)|_2^2 \leq C|U_{osc}(t)|_{\frac{1}{2}}|U(t)|_2^2.$$

L'hypothèse disant que, pour tout τ inférieur ou égal à t, on a $|U_{osc}(\tau)|_{\frac{1}{2}} \leq c\nu$, assure que

$$\frac{d}{dt}|U(t)|_1^2 + \nu|U(t)|_2^2 \leq 0.$$

La proposition en résulte immédiatement par intégration. En utilisant l'inégalité d'interpolation entre la norme H^2 et la norme H^1, on a

$$\int_0^t |U(\tau)|_{\frac{3}{2}}^2 d\tau \leq \int_0^t |U(\tau)|_2 |U(\tau)|_1 d\tau.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a donc

$$\int_0^t |U(\tau)|_{\frac{3}{2}}^2 d\tau \leq \left(\int_0^t |U(\tau)|_2^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t |U(\tau)|_1^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En se souvenant que l'énergie est conservée et en appliquant la proposition 2.2, on trouve

$$\int_0^t |U(\tau)|_{\frac{3}{2}}^2 d\tau \leq \frac{|U_0|_1|U_0|_0}{\nu}.$$

On vient de démontrer le corollaire suivant :

Corollaire 2.1 *Soit U une solution de (PE_ϵ) appartenant à $C([0,T^\star[;H^1) \cap L^2_{loc}([0,T^\star[;H^2)$; l'implication suivante est vraie.*

$$(\forall \tau \leq t\,,\ |U_{osc}(t)|_{\frac{1}{2}} \leq c\nu) \Rightarrow \int_0^t |U(\tau)|_{\frac{3}{2}}^2 d\tau \leq \frac{|U_0|_1|U_0|_0}{\nu}.$$

Remarque Ce corollaire est très important, car il est bien connu que la norme L^2 en temps à valeurs $H^{\frac{3}{2}}$ est une norme qui contrôle une équation parabolique de type Navier-Stokes (voir par exemple [3] ou [4]).

Troisième étape
Relions maintenant les deux idées que nous venons d'exposer. Nous allons démontrer la proposition suivante.

Proposition 2.3 *Soit U une solution $C([0,T[;H^1)\cap L^2([0,T[;H^2)$ du système (PE_ϵ). Alors, on a, pour tout $t\in[0,T[$,*

$$\begin{aligned}|U_{osc}(t)|_{-1} &\leq (|U_{0,osc}|_{-1}+C\epsilon|U_0|_1|U_0|_{\frac{1}{2}})\exp\left(\frac{C}{\nu}\int_0^t|U(\tau)|^2_{\frac{3}{2}}d\tau\right) \quad et \qquad (11)\\ \nu\int_0^t|U_{osc}(\tau)|_0^2d\tau &\leq (2|U_{0,osc}|^2_{-1}+C\epsilon^2|U_0|_1^2|U_0|^2_{\frac{1}{2}})\exp\left(\frac{C}{\nu}\int_0^t|U(\tau)|^2_{\frac{3}{2}}d\tau\right). \qquad (12)\end{aligned}$$

Pour cela, dérivons en temps le système (PE_ϵ). On obtient alors le système (∂PE_ϵ) suivant, en posant $\partial_t U=\dot{U}$:

$$(\partial PE_\epsilon)\left\{\begin{array}{rcl}\partial_t\dot{U}+v\cdot\nabla\dot{U}-L\dot{U}+\epsilon^{-1}A\dot{U}_{osc} &=& (-\nabla\partial_t p,0)-\partial_t v\cdot\nabla U\\ \operatorname{div} v &=& 0\\ \dot{U}_{|t=0} &=& \partial_t U_{|t=0}.\end{array}\right.$$

On procède par estimation d'énergie sur ce système. Tout d'abord, observons que l'on a, par définition de la matrice A et de U_{osc},

$$\begin{aligned}AU_{osc}\cdot U &= -v^2_{osc}v^1+v^1_{osc}v^2+v^3T_{osc}-v^3_{osc}T\\ &= (v^2-v^2_{osc})v^1-(v^1-v^1_{osc})v^2+v^3(T_{osc}-T)\\ &= v^1\partial_1\Delta^{-1}\Omega+v^2\partial_2\Delta^{-1}\Omega+v^3\partial_3\Delta^{-1}\Omega\\ &= v\cdot\nabla\Delta^{-1}\Omega.\end{aligned}$$

Le champ de vecteurs v étant de divergence nulle, on en déduit par intégration par parties que, pour tout réel s,

$$(AU_{osc}|U)_{H^s}=0. \qquad (13)$$

L'estimation d'énergie sur ce système (∂PE_ϵ) va maintenant résulter du lemme suivant, démontré par exemple dans [3] ou [4].

Lemme 2.2 *Pour tout réel s de l'intervalle $]-1-3/2,1+3/2[$, il existe une constante C telle que, pour tout champ de vecteurs de divergence nulle v appartenant à $H^{\frac{3}{2}}$, et pour toute fonction a appartenant à H^s, on ait*

$$|(v\cdot\nabla a|a)_{H^s}|\leq C|u|_{\frac{3}{2}}|a|_s|a|_{s+1}. \qquad (14)$$

Pour tout réel s de l'intervalle $]-3/2,3/2[$, il existe une constante C telle que, pour tout champ de vecteurs de divergence nulle v appartenant à H^s, et pour toute fonction a appartenant à $H^{\frac{3}{2}}$, on ait

$$|v\cdot\nabla a|_{s-1}\leq C|v|_s|a|_{\frac{3}{2}}. \qquad (15)$$

Appliquons ces inégalités au système (∂PE_ϵ) avec $s=-1$. Il en résulte que

$$\frac{d}{dt}|\dot{U}(t)|^2_{-1}+2\nu|\dot{U}(t)|^2_0\leq C|\dot{U}(t)|_0|\dot{U}(t)|_{-1}|U(t)|_{\frac{3}{2}}.$$

Ainsi, il vient

$$\frac{d}{dt}|\dot{U}(t)|^2_{-1}+\nu|\dot{U}|^2_0\leq\frac{C}{\nu}|\dot{U}(t)|^2_{-1}|U(t)|^2_{\frac{3}{2}}.$$

De l'inégalité ci-dessus, on déduit que

$$\frac{d}{dt}\left(|\dot{U}(t)|_{-1}^2 \exp\left(-\frac{C}{\nu}\int_0^t |v(\tau)|_{\frac{3}{2}}^2 d\tau\right)\right) \leq -\nu|\dot{U}(t)|_0^2 \exp\left(-\frac{C}{\nu}\int_0^t |v(\tau)|_{\frac{3}{2}}^2 d\tau\right).$$

Par intégration, on en déduit que

$$|\dot{U}(t)|_{-1}^2 + \nu\int_0^t |\dot{U}(\tau)|_0^2 d\tau \leq |\dot{U}(0)|_{-1}^2 \exp\left(\frac{C}{\nu}\int_0^t |U(\tau)|_{\frac{3}{2}}^2 d\tau\right). \tag{16}$$

Majorons maintenant $|\dot{U}(0)|_{-1}$. Le paramètre ϵ va se manifester ici. Appliquons la proposition 2.1 au temps $t = 0$. L'inégalité triangulaire assure alors que

$$|\dot{U}(0)|_{-1} \leq \frac{1}{\epsilon}|U_{0,osc}|_{-1} + \nu|U_0|_1 + C|U_0|_1|U_0|_{\frac{1}{2}}.$$

Or, on a $|U_0|_{\frac{1}{2}} \geq c\nu$, sinon, le problème est globalement bien posé (voir l'article original de Fujita et Kato [8] ou bien par exemple [2] ou [3]). La présente étude est alors sans objet. On en déduit donc que

$$|\dot{U}(0)|_{-1} \leq \frac{1}{\epsilon}|U_{0,osc}|_{-1} + C|U_0|_1|U_0|_{\frac{1}{2}}.$$

D'où l'inégalité suivante :

$$|\dot{U}(t)|_{-1}^2 + \nu\int_0^t |\dot{U}(\tau)|_0^2 d\tau \leq \left(\frac{1}{\epsilon}|U_{0,osc}|_{-1} + C|U_0|_1|U_0|_{\frac{1}{2}}\right) \exp\left(\frac{C}{\nu}\int_0^t |U(\tau)|_{\frac{3}{2}}^2 d\tau\right). \tag{17}$$

Utilisons à nouveau la proposition 2.1, mais à l'instant t cette fois. Toujours grâce à l'inégalité triangulaire, on trouve que

$$\begin{aligned} |AU_{osc}(t)|_{-1} &\leq \epsilon|\dot{U}(t)|_{-1} + \epsilon\nu|U(t)|_1 + \epsilon|U(t)|_1|U(t)|_{\frac{1}{2}} \quad \text{et} & (18)\\ |AU_{osc}(t)|_0^2 &\leq 2\epsilon^2|\dot{U}(t)|_0^2 + C\epsilon^2\nu^2|U(t)|_2^2 + \epsilon^2|U(t)|_2^2|U(t)|_{\frac{1}{2}}^2. & (19)\end{aligned}$$

Une inégalité classique sur les équations de type Navier-Stokes (voir par exemple [3], ou bien utiliser le lemme 2.2 comme ci-dessus) affirme que, si s appartient à l'intervalle $]-1,1]$, on a

$$|U(t)|_s^2 + \nu\int_0^t |U(\tau)|_{s+1}^2 d\tau \leq |U_0|_s^2 \exp\left(\frac{C}{\nu}\int_0^t |U(\tau)|_{\frac{3}{2}}^2 d\tau\right). \tag{20}$$

En appliquant cette inégalité ainsi que les estimations (17) et (18), il vient

$$|AU_{osc}(t)|_{-1} \leq (|U_{0,osc}|_{-1} + \epsilon|U_0|_1|U_0|_{\frac{1}{2}} + \epsilon\nu|U_0|_1) \exp\left(\frac{C}{\nu}\int_0^t |U(\tau)|_{\frac{3}{2}}^2 d\tau\right).$$

Nous avons déjà vu que l'on pouvait supposer que $|U_0|_{\frac{1}{2}}$ était supérieure ou égale à $c\nu$. On déduit alors de l'inversibilité de la matrice A que, pour tout t de l'intervalle $[0, T^\star[$, on a

$$|U_{osc}(t)|_{-1} \leq (|U_{0,osc}|_{-1} + C\epsilon|U_0|_1|U_0|_{\frac{1}{2}}) \exp\left(\frac{C}{\nu}\int_0^t |U(\tau)|_{\frac{3}{2}}^2 d\tau\right). \tag{21}$$

Démontrons maintenant la seconde inégalité de la proposition. D'après l'inégalité (17), on déduit de l'estimation (19) que

$$\begin{aligned} \nu\int_0^t |AU_{osc}(\tau)|_0^2 d\tau &\leq 2\epsilon^2\nu\int_0^t \left(|\dot{U}(\tau)|_0^2 + C\nu\epsilon^2(\nu^2 + |U(\tau)|_{\frac{1}{2}}^2)|U(\tau)|_2^2\right)d\tau \\ &\leq \Big(2|U_{0,osc}|_{-1}^2 + C\epsilon^2|U_0|_1^2|U_0|_{\frac{1}{2}}^2 \\ &\qquad + C\nu\epsilon^2\int_0^t (\nu^2 + |U(\tau)|_{\frac{1}{2}}^2)|U(\tau)|_2^2 d\tau\Big) \exp\left(\frac{C}{\nu}\int_0^t |U(\tau)|_{\frac{3}{2}}^2 d\tau\right). \end{aligned}$$

De l'inégalité (20), on déduit que

$$\nu \int_0^t |AU_{osc}(\tau)|_0^2 d\tau \leq \left(2|U_{0,osc}|_{-1}^2 + C\epsilon^2 |U_0|_1^2(\nu^2 + |U_0|_{\frac{1}{2}}^2)\right) \exp\left(\frac{C}{\nu}\int_0^t |U(\tau)|_{\frac{3}{2}}^2 d\tau\right).$$

La matrice A est inversible et l'on peut supposer $|U_0|_{\frac{1}{2}} \geq c\nu$; d'où il vient que

$$\nu \int_0^t |U_{osc}(\tau)|_0^2 d\tau \leq (2|U_{0,osc}|_{-1}^2 + C\epsilon^2 |U_0|_1^2 |U_0|_{\frac{1}{2}}^2) \exp\left(\frac{C}{\nu}\int_0^t |U(\tau)|_{\frac{3}{2}}^2 d\tau\right).$$

D'où la proposition 2.3.

Appliquons le corollaire 2.1 qui affirme que, tant que $|U_{osc}(t)|_{\frac{1}{2}}$ est inférieure ou égale à $c\nu$, alors

$$\int_0^t |U(\tau)|_{\frac{3}{2}}^2 d\tau \leq \frac{|U_0|_1 |U_0|_0}{c\nu}.$$

On déduit alors de la proposition 2.3 que, tant que $|U_{osc}(t)|_{\frac{1}{2}}$ reste inférieure ou égale à $c\nu$, on a

$$|U_{osc}(t)|_{-1} \leq (|U_{0,osc}|_{-1} + C\epsilon|U_0|_1|U_0|_{\frac{1}{2}}) \exp\left(\frac{|U_0|_1|U_0|_0}{c\nu^2}\right) \quad \text{et} \tag{22}$$

$$\nu \int_0^t |U_{osc}(\tau)|_0^2 d\tau \leq \left(\frac{C}{\nu}\epsilon|U_0|_{\frac{1}{2}}^2 |U_0|_1^2 + 2|U_{0,osc}|_{-1}^2\right) \exp\left(\frac{|U_0|_1|U_0|_{\frac{1}{2}}}{c\nu^2}\right). \tag{23}$$

En remarquant que

$$|U_{osc}(t)|_{\frac{1}{2}}^4 \leq |U_{osc}(t)|_{-1}|U(t)|_1^3$$

et en appliquant la proposition 2.2, on déduit de l'inégalité (22) que si $|U_{osc}(t)|_{\frac{1}{2}}$ reste inférieure ou égale à $c\nu$, alors

$$|U_{osc}(t)|_{\frac{1}{2}}^4 \leq (|U_{0,osc}|_{-1}|U_0|_1^3 + \epsilon|U_0|_1^4|U_0|_{\frac{1}{2}}) \exp\left(\frac{|U_0|_1|U_0|_0}{c\nu^2}\right). \tag{24}$$

Si les hypothèses du théorème 1.1 sont satisfaites, la norme $|U_{osc}(t)|_{\frac{1}{2}}$ reste ainsi toujours inférieure à $c\nu$. La proposition 2.2 assure alors que la norme H^1 de la solution U reste bornée, ce qui conclut la démonstration du théorème 1.1.

3 Démonstration du théorème de convergence

Nous ne donnerons ici les principales étapes de la démonstration du théorème 1.2 (voir [7] pour les détails). D'après les hypothèses, il existe un réel ϵ_0 strictement positif tel que, pour tout $\epsilon \leq \epsilon_0$, il existe une solution globale régulière du système (PE_ϵ). La partie oscillante $U_{\epsilon,osc}$ ne pose pas de problème. En effet, les inégalités (22) et (23) assurent que

$$\lim_{\epsilon\to 0} |U_{0,\epsilon,osc}|_{-1} = 0 \Rightarrow \lim_{\epsilon\to 0} \|U_{\epsilon,osc}\|_{L^\infty(\mathbf{R}^+;H^{-1})} + \|U_{\epsilon,osc}\|_{L^2(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^3)} = 0.$$

D'après le théorème 1.1, la famille (U_ϵ) est bornée dans l'espace

$$L^\infty(\mathbf{R}^+; L^2 \cap H^1) \cap L^2(\mathbf{R}^+, H^2).$$

Par interpolation, on en déduit donc que, pour tout σ de l'intervalle $[0,1[$, on a

$$\lim_{\epsilon\to 0} \|U_{0,\epsilon,osc}\|_{-1} = 0 \Rightarrow \lim_{\epsilon\to 0} \|U_{\epsilon,osc}\|_{L^\infty(\mathbf{R}^+;H^\sigma)} + \|U_{\epsilon,osc}\|_{L^2(\mathbf{R}^+;H^{\sigma+1})} = 0.$$

Il reste donc à démontrer que la famille (Ω_ϵ) converge fortement. Pour ce faire, établissons une condition de Cauchy dans l'espace

$$L^\infty(\mathbf{R}^+; L^2) \cap L^2(\mathbf{R}^+; H^1).$$

Pour cela, étudions la différence $\Omega_\epsilon - \Omega_{\epsilon'}$. On a

$$\begin{aligned}\partial_t \Omega_\epsilon + v_\epsilon \cdot \nabla(\Omega_\epsilon - \Omega_{\epsilon'}) - \nu\Delta(\Omega_\epsilon - \Omega_{\epsilon'}) = q(U_{\epsilon,osc}, U_\epsilon) - q(U_{\epsilon',osc}, U_{\epsilon'})\\ + (v_\epsilon - v_{\epsilon'}) \cdot \nabla\Omega_{\epsilon'}.\end{aligned}$$

Faisons une estimation d'énergie L^2 sur $\Omega_\epsilon - \Omega_{\epsilon'}$. Nous avons les inégalités suivantes.

$$\begin{aligned}(q(U_{\epsilon,osc}, U_\epsilon)|\Omega_\epsilon - \Omega_{\epsilon'})_{L^2} &\leq \frac{C}{\nu}|U_{\epsilon,osc}|^2_{\frac{1}{2}}|U_\epsilon|^2_2 + \frac{\nu}{10}|\Omega_\epsilon - \Omega_{\epsilon'}|^2_1 \quad \text{et} & (25)\\ ((v_{\epsilon,QG} - v_{\epsilon',QG}) \cdot \nabla\Omega_{\epsilon'}|\Omega_\epsilon - \Omega_{\epsilon'})_{L^2} &\leq \frac{C}{\nu}|U_{\epsilon'}|_{\frac{3}{2}}|^2\|\Omega_{\epsilon'} - \Omega_\epsilon\|^2_{L^2} + \frac{\nu}{10}|\Omega_\epsilon - \Omega_{\epsilon'}|^2_1. & (26)\end{aligned}$$

On en déduit alors que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(e^{-\frac{C}{\nu}\int_0^t |U_\epsilon(\tau)|^2_{\frac{3}{2}}d\tau}\|\Omega_\epsilon(t) - \Omega_{\epsilon'}(t)\|^2_{L^2}\right) + \nu e^{-\frac{C}{\nu}\int_0^t |U_\epsilon(\tau)|^2_{\frac{3}{2}}d\tau}|\Omega_\epsilon(t) - \Omega_{\epsilon'}(t)|^2_1\\ \leq \frac{C}{\nu}\left(\|U_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbf{R}^+;H^{\frac{1}{2}})} + \|U_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbf{R}^+;H^{\frac{1}{2}})}\right)^2 |U_{\epsilon'}(t)|^2_2.\end{aligned}$$

Par intégration, on trouve que, pour tout t positif,

$$\begin{aligned}e^{-\frac{C}{\nu}\int_0^t |U_\epsilon(\tau)|^2_{\frac{3}{2}}d\tau}\|\Omega_\epsilon(t) - \Omega_{\epsilon'}(t)\|^2_{L^2} + \nu\int_0^t e^{-\frac{C}{\nu}\int_0^\tau |U_\epsilon(\tau')|^2_{\frac{3}{2}}d\tau'}|\Omega_\epsilon(\tau) - \Omega_{\epsilon'}(\tau)|^2_1 d\tau\\ \leq \frac{C}{\nu}\left(\|U_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbf{R}^+;H^{\frac{1}{2}})} + \|U_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbf{R}^+;H^{\frac{1}{2}})}\right)^2\|U_{\epsilon'}\|^2_{L^2(\mathbf{R}^+;H^{\frac{3}{2}})}.\end{aligned}$$

D'après le corollaire 2.1, on déduit de l'inégalité précédente que

$$\begin{aligned}\|\Omega_\epsilon - \Omega_{\epsilon'}\|^2_{L^\infty(\mathbf{R}^+;L^2)} + \nu\|\Omega_\epsilon - \Omega_{\epsilon'}\|^2_{L^2(\mathbf{R}^+;H^1)}\\ \leq \frac{C}{\nu}\left(\|U_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbf{R}^+;H^{\frac{1}{2}})} + \|U_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbf{R}^+;H^{\frac{1}{2}})}\right)^2|U_{\epsilon'}|_{L^2(\mathbf{R}^+;H^{\frac{3}{2}})}e^{\frac{C}{\nu^2}|U_{0,\epsilon}|_1|U_{0,\epsilon}|_0}.\end{aligned}$$

La famille $(U_{0,\epsilon})$ est bornée dans $L^2 \cap H^1$, donc la famille (Ω_ϵ) vérifie une condition de Cauchy lorsque ϵ tend vers 0 dans l'espace $L^\infty(\mathbf{R}^+; L^2) \cap L^2(\mathbf{R}^+; H^1)$. Le théorème 1.2 de convergence est ainsi démontré.

Références

[1] T. Beale et A. Bourgeois, Validity of the quasi-geostrophic model for large scale flow in the atmosphere and ocean, *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, **25**, 1994, pages 1023–1068.

[2] M. Cannone, *Ondelettes, paraproduits et Navier-Stokes*, Diderot Éditeur, Arts et Sciences, 1995.

[3] J.-Y. Chemin, Remarques sur l'existence globale pour le système de Navier-Stokes incompressible, *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, **23**, 1992, pages 20–28.

[4] J.-Y. Chemin et N. Lerner, Flot de champs de vecteurs non-lipschitziens et équations de Navier-Stokes, *Journal of Differential Equations*, **121**, 1995, pages 314–328.

[5] J.-Y. Chemin, *Fluides parfaits incompressibles*, Astériistique, **230**, 1995.

[6] J.-Y. Chemin, À propos d'un problème de pénalisation antisymétrique, *Note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, **321**, 1995, pages 861–864.

[7] J.-Y. Chemin, À propos d'un problème de pénalisation antisymétrique, *prépublication du Laboratoire d'Analyse Numérique de l'Université Paris 6.*

[8] H. Fujita et T. Kato, On the Navier-Stokes initial value problem I, *Archiv for Rationnal Mechanic Analysis*, **16**, 1964, pages 269–315.

[9] E. Grenier, Oscillatory perturbations of the Navier-Stokes equations, in *Limite singulière dans les équations de la mécanique des fluides et de la physique des plasmas*, Thèse de l'Université Paris 6, 1995.

[10] D. Iftimie, Approximation of the quasigeostrophic system with the primitive systems, *Prépublication du laboratoire d'Analyse Numérique*, 1996.

[11] J.-L.Lions, *Perturbation singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal*, Lecture Notes in Mathematics, **323**, Springer Verlag, 1970.

[12] J.-L. Lions, Remarks on some mathematical problems arising in climatology, *prépublication.*

[13] J.-L. Lions, R. Temam et S. Wang, Geostrophic asympotics of the primitive equations of the atmosphere, *Topological Methods in Non Linear Analysis*, **4**, 1994, pages 1–35.