SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

1996-1997

Yann Brenier

Homogénéisation variationnelle des équations d'Euler

Séminaire É. D. P. (1996-1997), Exposé n° X, 17 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1996-1997____A10_0>

HOMOGENEISATION VARIATIONNELLE DES EQUATIONS D'EULER

*Yann Brenier**

1. Problèmes et résultats.

1.1. Description lagrangienne des fluides incompressibles.

Soit D l'adhérence d'un ouvert borné assez régulier de $\mathbb{R}^d$, ou un domaine périodique comme $D = \mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$. On note $|.|$ la norme euclidienne, $a.b$ le produit scalaire, de deux vecteurs a, b de $\mathbb{R}^d$, $a \otimes b$ leur produit tensoriel, $\nabla = (\partial_1, ..., \partial_d)$. On se fixe un intervalle de temps $[0, T]$, on note $Q = [0, T] \times D$. Un mouvement de fluide incompressible dans D se décrit mathématiquement par un champ de vecteur $u(t, x)$ qui appartient à une complétion appropriée V de l'espace V_0^∞ des champs C^∞ à divergence nulle et support compact dans l'intérieur de Q. Pour fixer les idées, on peut considérer le cadre des fluides visqueux, avec la norme $L^2([0, T], H^1(D))$, qui nous permet (à l'aide de la théorie de DiPerna et Lions [5]), pour chaque champ $u \in V$ de définir les coordonnées lagrangiennes $t \in [0, T] \to g(t, a)$ pour presque tout $a \in D$ par

$$g(0, a) = a, \quad \partial_t g(t, a) = u(t, g(t, a)).$$

A chaque instant t l'application $g_u(t) = g(t, .)$ appartient à la classe $S(D)$ de toutes les applications boréliennes h qui conservent la mesure de Lebesgue au sens suivant

$$\int_D f(h(a))da = \int_D f(a)da \tag{1}$$

pour toute fonction continue f sur D. Bien sur, plus classiquement, si u est un champ suffisamment régulier (C^1 en espace, typiquement), $g_u(t)$

*Université Paris 6 et ENS, DMI, 45 rue d'ULM, 75230 Paris Cedex, France.

appartient à la classe $G(D)$ des difféomorphismes h de D avec

$$det\partial_a h(a) = 1.$$

On notera $G_V(D) = \{g_u(T), \quad u \in V, \quad T > 0\}$ et on appelera cible chacun de ces éléments h. Il est facile de voir que c'est un groupe pour la loi de composition, sous-groupe de $G(D)$, dans le cas de champs C^1, sous-groupe de $S(D)$ (qui lui n'est qu'un semi-groupe), dans le cas de champs $L^2(H^1)$. (La caractérisation précise de $G_V(D)$ nous importe peu. Notons que, dans [17], Shnirelman établit que pour $D = [0,1]^3$, et pour des champs C^1, $G_V(D) = G(D)$.)

1.2. Problèmes de tir et équations d'Euler.

On se pose le problème de tir qui consiste à atteindre une cible donnée h à l'instant T à l'aide d'un champ $u \in V$ d'énergie

$$K(u) = \frac{1}{2}\int_Q |u(t,x)|^2 dtdx \tag{2}$$

minimale. Autrement dit, on veut réaliser l'infimum

$$I(h) = \inf\{K(u), \quad u \in V, \quad g_u(T) = h\}. \tag{3}$$

Dans la mesure où l'atteignabilité de h est problématique, on peut pénaliser la cible h et considérer, pour tout $0 < \epsilon < 1$

$$I_\epsilon(h) = \inf\{K(u) + \frac{1}{2\epsilon}||g_u(T) - h||^2_{L^2(D)}, \quad u \in V\} \tag{4}$$

ainsi que

$$\underline{I}(h) = \lim_{\epsilon \to 0} I_\epsilon(h) = \sup_\epsilon I_\epsilon(h). \tag{5}$$

On a évidemment

$$0 \leq I_\epsilon(h) \leq \underline{I}(h) \leq I(h) \leq +\infty.$$

Une condition nécessaire pour que $\underline{I}(h)$ soit fini est que h appartienne à l'adhérence L^2 de $G_V(D)$. Dans le cas $D = [0,1]^d$, $d \geq 2$, cette adhérence est précisément $S(D)$ (voir [14], par exemple).

Ce problème a un intérêt pratique (assimilation de données lagrangiennes en météorologie, interpolation d'images, etc...) et la conception de bonnes méthodes de calcul est un enjeu important (voir quelques éléments de la question dans [14]). L'intérêt théorique de ce problème variationnel vient de ce que son équation d'Euler-Lagrange est tout simplement l'équation d'Euler des fluides parfaits. En effet, si $I(h)$ est atteint par un champ u assez régulier, on trouve comme condition d'optimalité

$$\nabla . u = 0, \quad \partial_t u + \nabla .(u \otimes u) + \nabla p = 0, \tag{6}$$

où $p = p(t, x) \in \mathbb{R}$ est le champ de pression, multiplicateur de la contrainte de divergence nulle. Réciproquement, si (u, p) est une solution assez régulière des équations d'Euler, alors, pour $T > 0$ assez petit et $h = g_u(T)$, $I(h)$ est atteint et uniquement par u. (Pour un domaine D convexe, ou pour $D = \mathbb{T}^d$, il suffit que $\lambda T^2 < \pi^2$, où λ est le sup en espace et en temps de la plus grande valeur propre de la matrice hessienne de pression.) Ainsi, le problème de tir est une alternative au problème de Cauchy pour étudier les équations d'Euler. (Ce serait plus ou moins la même chose si l'on étudiait tous les points critiques sur V de $u \to K(u)$, lorsque $g_u(T)$ et $T > 0$ sont fixés, et pas seulement les minima.) Il a aussi un intérêt géométrique, puisqu'il correspond à la recherche de géodésique minimale sur le groupe $G_V(D)$ pour la structure (pseudo) riemannienne induite par l'espace ambiant $L^2(D)^d$. (On consultera [1], [10] et [15] a ce sujet.)

1.3. Equations d'Euler homogénéisées.

On sait que l'existence globale de solutions, même faibles, est complètement ouvert pour le problème de Cauchy en dimension 3. (Voir, par exemple, [3], [4], [11], [13], etc...) Il y a une dizaine d'années, DiPerna et Majda ont proposé un concept élargi de solutions, dites à valeurs mesures (measure valued solutions), pour remplacer celui de solutions faibles [6], à l'aide des mesures de Young dont la pertinence avait été mise en évidence par Tartar dans le domaine des équations aux dérivées partielles non-linéaires [18]. En utilisant seulement la borne naturelle sur l'énergie cinétique (en particulier sans aucun contrôle du tourbillon), DiPerna et Majda passent à la limite dans les équations de Navier-Stokes lorsque la viscosité tend vers zéro et obtiennent des équations à la limite qui ne permettent malheureusement pas de de caractériser (même formellement) les solutions à valeurs mesures. (Nous y reviendrons plus loin.) Mentionnons aussi la notion de solutions relaxées de Duchon et Robert [7], beaucoup plus précise mais qui ne conduit pas à des résultats d'existence globale. De son côté, le problème de tir, posé en dimension 3, peut ne pas avoir de solution, comme on va le voir dans un instant, en suivant un argument de Shnirelman [15]. Les données h pour lesquels on sait montrer que $I(h)$ peut ne pas être atteint sont de la forme $h(a_1, a_2, a_3) = (H(a_1, a_2), a_3)$ avec $D = \mathbb{T}^3$ et $H \in G(\mathbb{T}^2)$ et on constate la génération de microstructures dans la direction verticale de la part des suites minimisantes.

On peut dès lors reprendre l'approche de DiPerna et Majda, en tâchant cette fois de décrire la limite des suites minimisantes comme solutions à valeurs mesures d'un système cohérent d'équations généralisant celles d'Euler. C'est ce programme, d'homogénéisation variationnelle des équations d'Euler, que nous allons présenter.

1.4. Inexistence de solutions classiques.

L'argument a été donné par Shnirelman dans [15] et il est très facile de l'expliquer dans le cas $D = \mathbb{T}^3$. Il est naturel de noter V_3 la classe V et V_2 la sous-classe des champs plans, c'est-à-dire de la forme

$$u(t,x) = (u_1(t, x_1, x_2), u_2(t, x_1, x_2), 0).$$

On considère les cibles de la forme $h = g_u(T)$ où $u \in V_2$. Elles sont nécessairement de la forme $h(a_1, a_2, a_3) = (H(a_1, a_2), a_3)$. On note respectivement $I_3(h) = I(h)$ et $I_2(h)$ l'infimum de K sur V_3 et V_2. Shnirelmnan montre que $I_2(h) > I_3(h)$ est possible (voir [15] et aussi [16]). Prenons alors un champ $u \in V_3$ tel que $K(u) < I_2(h)$. La composante u_3 ne peut être identiquement nulle. (En effet, on aurait alors, pour chaque x_3 fixé, $u(.,.,.,x_3)$ dans V_2, et donc

$$K(u) = \int_0^1 K(u(.,.,.,x_3))dx_3 \geq I_2(h),$$

ce qui est contradictoire.) On peut alors "renormaliser" u en posant

$$u'_i(x_1, x_2, x_3) = u_i(x_1, x_2, 2x_3 mod 1)$$

pour $i = 1, 2$ et

$$u'_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} u_3(x_1, x_2, 2x_3 mod 1).$$

Ce nouveau champ appartient toujours à V_3, atteint la cible h, et, puisque $u_3 \neq 0$, a une énergie strictement inférieure à u. Ainsi $I(h)$ ne peut être atteint. De plus, on voit que les suites minimisantes génèrent des oscillations de plus en plus fortes par rapport à la coordonnée verticale x_3 (puisqu'on peut réitérer à l'infini la renormalisation précédente), ce qui ouvre la voie aux techniques d'homogénéisation pour en décrire les limites.

1.5. Le résultat principal.

On appelle ϵ solution un champ $u_\epsilon \in V$ tel que

$$K(u_\epsilon) + \frac{1}{2\epsilon}||g_{u_\epsilon(T)} - h||^2_{L^2(D)} \to \underline{I}(h)$$

quand $\epsilon \to 0$ et on note $Q' = Q \times D = [0,T] \times D^2$.

Théorème 1..1 *Soit $D = \mathbb{T}^3$, $T > 0$ et $h \in S(\mathbb{T}^3)$ de la forme $h(a_1, a_2, a_3) = (H(a_1, a_2), a_3)$ avec $H \in S(\mathbb{T}^2)$. Alors*
i) On a $\underline{I}(h) \leq 3/T$ et $K(u_\epsilon) \to \underline{I}(h)$ pour toute ϵ solution u_ϵ lorsque $\epsilon \to 0$;
ii) Il existe une unique distribution $\nabla p(t,x)$ sur l'intérieur de Q, ne dépendant que de h, telle que, pour toute ϵ solution

$$\partial_t u_\epsilon + (u_\epsilon . \nabla) u_\epsilon + \nabla p \to 0,$$

au sens des distributions ;
iii) ∇p est une mesure localement bornée sur l'intérieur de Q;
iv) Les mesures, respectivement positives et vectorielles,

$$c_\epsilon(t,x,a) = \delta(x - g_{u_\epsilon}(t,a)),$$

$$m_\epsilon(t,x,a) = u_\epsilon(t,x)\delta(x - g_{u_\epsilon}(t,a)),$$

ont des points d'accumulation (c, m) au sens faible des mesures sur Q'. Pour chacun de ces points d'accumulation, la mesure m est absolument continue par rapport à c, avec une densité vectorielle $v \in L^2(Q', dc)^d$, et les propriétés suivantes sont satisfaites

$$\int_D c(t,x,da) = 1, \tag{7}$$

$$\partial_t c(t,x,a) + \nabla_x.(c(t,x,a)v(t,x,a)) = 0, \tag{8}$$

$$\partial_t((cv)(t,x,a)) + \nabla_x.((cv)(t,x,a)\otimes v(t,x,a)) = -\underline{c}(t,x,a)\nabla_x p(t,x), \quad (9)$$

au sens des distributions dans l'intérieur de Q', où $\underline{c}$ est une extension naturelle de c, pour laquelle le produit $\underline{c}\nabla_x p$ est bien défini. De plus

$$c(t=0,x,a) = \delta(x-a); \quad c(t=T,x,a) = \delta(x-h(a)) \quad (10)$$

et l'énergie cinétique

$$\int_{D\times D}\frac{1}{2}|v(t,x,a)|^2 c(t,dx,da) \quad (11)$$

est une constante du temps, valant $\underline{I}(h)/T$.

Remarque 1.

L'utilisation de $\underline{I}(h)$ à la place de $I(h)$, est justifiée, au moins dans le cas $D=[0,1]^3$, par le résultat de [15] qui montre que si $h_n \in G(D) \to h \in G(D)$, pour la norme L^2, alors $I(h_n) \to I(h)$. Il est facile d'en déduire, en utilisant la propriété de groupe pour la loi de composition sur $G(D)$, que $\underline{I}(h) = I(h)$, pour tout $h \in G(D)$. Ce résultat est absolument non trivial : il est d'ailleurs faux en dimension 2, pour $D=[0,1]^2$. (Voir [16], à ce sujet.)

Remarque 2.

On verra plus loin comment $\underline{c}$ est définie, comme l'extension de c en fonction mesurable bornée de (t,x), relativement à la partie singulière de la mesure $|\nabla p(t,x)|$, à valeurs dans les mesures de probabilité boréliennes sur D. Ceci permet de définir le produit $\underline{c}\nabla p$. Notons qu'un problème de multiplication analogue a été résolu par Majda et Zheng [12] pour le système de Vlasov-Poisson.

Remarque 3.

Les mesures limites (c,m) sont des sortes de mesures de Young. Elles ont un caractère double, eulérien et lagrangien à la fois, bien mis en évidence par leur dépendance en les variables x (eulérienne) et a (lagrangienne). Les équations (8), (9), (7) forment un système complet d'équations les régissant. Ces équations apparaissent dans la théorie des plasmas quasineutres [8],[9]. On peut interpréter chaque particule a comme une phase, $c(.,.,a)$ et $v(.,.,a)$ comme les champs de concentration et de vitesse associées à cette phase. Le système d'équations obtenu peut être ainsi vu comme un modèle d'écoulements multiphasiques, mais avec un continuum de phases, où le champ de pression est commun à toutes les phases. Lorsque la variable a est discrète, on retrouve un modèle connu de la théorie des écoulements multiphasiques [2].

Remarque 4.

Le gradient de pression est la seule quantité "macroscopique", car il ne dépend pas, contrairement à (c, m), de la variable d'homogénéisation a. Son unicité est une propriété frappante. (On peut d'ailleurs le caractériser comme unique solution d'un problème variationnel dual du problème de tir.) En revanche, la non-unicité des points d'accumulation (c, m) est attendue. En effet, même dans le cadre classique, $I(h)$ peut être atteint par plusieurs champs u à la fois. C'est par exemple le cas où D est le disque unité de $\mathbb{R}^2$, $h(a) = -a$. On a alors deux champs optimaux $u(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$ et $-u$. On notera que la pression est bien la même dans les deux cas, $p(x) = |x|^2/2$! Il serait intéressant de voir si l'on peut montrer l'unicité de ∇p dans le cadre classique par des arguments classiques.

Remarque 5.

Les solutions à valeurs mesures de DiPerna et Majda peuvent être décrites de la façon suivante (en négligeant l'important phénomène de concentration d'énergie cinétique, longuement évoqué dans [6]). Ce sont des mesures positives $\mu(t, x, \xi)$ des variables de temps, d'espace et de vitesse $(t, x, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times D \times \mathbb{R}^3$ vérifiant les équations de moments

$$\int \mu(t, x, d\xi) = 1, \tag{12}$$

$$\nabla_x \cdot \int \xi \mu(t, x, d\xi) = 0, \tag{13}$$

$$\partial_t \int \xi \mu(t, x, d\xi) + \nabla_x \cdot \int \xi \otimes \xi \mu(t, x, d\xi) + \nabla_x p(t, x) = 0, \tag{14}$$

pour une distribution $p(t,x)$, qu'on peut interpréter comme la pression. Les solutions faibles usuelles des équations d'Euler correspondent au cas particulier ou μ est une masse de Dirac en ξ. Dans le cas général, (12),(13),(14) ne forment pas un système complet d'équations, puisqu'elles n'impliquent que les premiers moments en ξ de μ. A chaque solution (c,m), on peut associer μ, par

$$\int_{Q\times\mathbb{R}^d} f(t,x,\xi)d\mu(t,x,\xi) = \int_{Q'} f(t,x,v(t,x,a))dc(t,x,a), \tag{15}$$

pour toute fonction continue f sur $Q\times\mathbb{R}^d$, avec comportement au plus quadratique en ξ à l'infini (puisque $v \in L^2(Q',dc)^d$). Les equations (12),(13),(14) sont automatiquement vérifiées, car elles ne sont rien d'autre que (7),(8), (9), les deux dernières étant simplement intégrées en a sur D, avec une perte évidente d'information. Ainsi, les solutions (c,m) peuvent être considérées comme des solutions à valeurs mesures précisées.

2. Etapes de la preuve.

2.1. Reformulation du problème de tir.

La première étape est de reformuler entièrement le problème de tir à l'aide des mesures c et m associées à $u \in V$ par

$$c(t,x,a) = \delta(x - g_u(t,a)) \tag{16}$$

et

$$m(t,x,a) = u(t,x)c(t,x,a) = \partial_t g_u(t,a)\delta(x - g_u(t,a)). \tag{17}$$

On a automatiquement l'équation de continuité

$$\partial_t c + \nabla_x.m = 0.$$

Les positions initiales et finales des particules peuvent être incorporées dans la formulation faible de cette équation

$$\int_{Q'}(\partial_t f(t,x,a)dc(t,x,a) + \nabla_x f(t,x,a).dm(t,x,a)) \tag{18}$$

$$= \int_D (f(T,h(a),a) - f(0,a,a))da,$$

pour toute fonction continue $f = f(t, x, a)$ sur Q', de classe C^1 en (t, x). L'incompressibilité de l'écoulement se traduit par

$$\int_{Q'} f(t, x) dc(t, x, a) = \int_Q f(t, x) dt dx, \tag{19}$$

pour toute fonction continue f sur Q, ou encore $\int_D c(t, x, da) = 1$. Enfin, un calcul élémentaire montre qu'on peut écrire (abusivement) $K(u) = K(c, m)$, où

$$K(c, m) = \sup_{(A,B)} \int_{Q'} (A(t, x, a) dc(t, x, a) + B(t, x, a).dm(t, x, a)), \tag{20}$$

avec un sup pris sur toutes les fonctions continues A et B sur Q', à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^d$, satisfaisant ponctuellement

$$A(t, x, a) + \frac{1}{2}|B(t, x, a)|^2 \leq 0. \tag{21}$$

Le problème de tir se reformule donc comme

$$I(h) = \inf_{(c,m)} \sup_{(\phi,p)} L(c, m, \phi, p), \tag{22}$$

où le lagrangien L est donné par

$$L(c, m, \phi, p) = K(c, m) - \int_{Q'} [\partial_t \phi(t, x, a) + p(t, x)] dc(t, x, a) \tag{23}$$

$$- \int_{Q'} \nabla_x \phi(t, x, a).dm(t, x, a) + \int_D (\phi(T, h(a), a) - \phi(0, a, a)) da + \int_Q p(t, x) dt dx,$$

et les mesures c, m sont supposées de la forme (16),(17).

2.2. Introduction d'un problème relaxé.

Il nous suffit maintenir de nous affranchir des contraintes de forme (16),(17), pour obtenir un problème de minimisation convexe posé sur l'espace des mesures (c, m) : minimiser $K(c, m)$ sous contraintes (18),(19). On note $I^*(h) \in [0, +\infty]$ l'infimum. On a évidemment $I^*(h) \leq I(h)$. La simple finitude de $K(c, m) < +\infty$ suffit à assurer que c est une mesure positive sur Q', m est absolument continue par rapport à c, et sa densité (vectorielle) $v = v(t, x, a)$ est de carré sommable sur Q' relativement à c :

$$m(t, x, a) = v(t, x, a) c(t, x, a), \tag{24}$$

$$K(c,m) = \int_{Q'} \frac{1}{2}|v(t,x,a)|^2 dc(t,x,a). \tag{25}$$

Il suffit donc de minimiser parmi toutes les mesures c et m, respectivement réelles et vectorielles, c'est-à-dire sur le dual de $C(Q') \times C(Q')^d$. Une première construction explicite montre que l'on peut borner l'infimum $I^*(h)$, par d/T, en toute généralité si $h \in S(\mathbb{T}^d)$. Une seconde construction permet de montrer que, pour $h \in S(\mathbb{T}^3)$, de la forme $h(a) = (H(a_1,a_2),a_3)$ avec $H \in S(\mathbb{T}^2)$, on peut trouver $u_\epsilon \in V$ tel que

$$K(u_\epsilon) \to I^*(h), \quad ||g_{u_\epsilon}(T) - h||_{L^2} \to 0,$$

ce qui suffit à montrer que $I^*(h) = \underline{I}(h)$. L'essentiel du travail consiste dès lors à étudier le problème relaxé en montrant

Théorème 2..1 *Soit $D = \mathbb{T}^d$ et $h \in S(D)$. Alors il y a au moins une solution (c,m) réalisant $I^*(h)$. On a $m = cv$ avec $v \in L^2(Q',dc)^d$, les équations (8), (7) et les conditions initiales et finales (10) sont satisfaites, l'énergie cinétique (11) est conservée au cours du temps et bornée par d/T^2. Il existe une distribution $p(t,x)$ sur Q, qui ne dépend que de h, pour laquelle (9) a lieu. ∇p est une mesure sur l'intérieur de Q, uniquement définie.*

2.3. Etude du problème relaxé.

Des arguments élémentaires d'analyse convexe montrent que $I^*(h)$ est toujours atteint par des paires (c,m) et

Proposition 2..2 *Pour tout $0 < \epsilon < 1$, il existe des fonctions fonctions continues $\phi_\epsilon(t,x,a)$ sur Q' et $p_\epsilon(t,x)$ sur Q, avec $\partial_t\phi_\epsilon$, $\nabla_x\phi_\epsilon$ continues et la normalisation $\int_D p_\epsilon(t,x)dx = 0$, telles que, pour TOUTE solution optimale (c,m),*

$$\partial_t\phi_\epsilon + \frac{1}{2}|\nabla_x\phi_\epsilon|^2 + p_\epsilon \le 0 \tag{26}$$

et

$$\int_{Q'} (|\partial_t\phi_\epsilon + \frac{1}{2}|\nabla_x\phi_\epsilon|^2 + p_\epsilon| + |v - \nabla_x\phi_\epsilon|^2) dc \le \epsilon^2. \tag{27}$$

On ne peut pas brutalement passer à la limite en ϵ car la mesure c peut être très concentrée. Mais on obtient le résultat de régularité approchée suivant

Proposition 2..3 *Le potentiel de vitesse approché ϕ_ϵ vérifie, pour tout $0 < \tau < T/2$ et tout vecteur unitaire e de $\mathbb{R}^d$,*

$$\int_{Q'_\tau} |\nabla_x \phi_\epsilon(t,x,a) - v(t,x,a)|^2 dc(t,x,a) \leq C\epsilon^2, \tag{28}$$

$$\int_{Q'_\tau} |\nabla_x \phi_\epsilon(t,x,a)|^2 dc(t,x,a) \leq C, \tag{29}$$

$$\int_{Q'_\tau} |\nabla_x \phi_\epsilon(t+\eta, x+\delta e, a) - \nabla_x \phi_\epsilon(t,x,a)|^2 dc(t,x,a) \leq (\epsilon^2+\eta^2+\delta^2)C, \tag{30}$$

pour tous $\eta, \delta, \epsilon > 0$ assez petits, où $Q'_\tau = [\tau, T-\tau] \times D \times D$, et C ne dépend que de d, τ et T.

Comme $c(t,x,a)$ n'est qu'une mesure, éventuellement aussi concentrée qu'une masse de Dirac en x (comme c'est le cas des solutions classiques), il est hors de question d'inférer de cette proposition une borne de la forme

$$\int_{Q'_\tau} (|\partial_t v|^2 + |\nabla_x v|^2) dc \leq C, \tag{31}$$

en passant à la limite, d'abord en ϵ (pour remplacer $\nabla_x \phi_\epsilon$ par v), puis en δ et η. Une telle estimation n'aurait de sens que si l'on pouvait borner inférieurement la mesure c par des constantes > 0 ce qui est exactement le contraire du cas classique. En revanche, borner $\int |\nabla p|$ n'est pas impensable. L'argument formel est simple (et bien sur incorrect, tel quel). On "passe à la limite" en ϵ et on obtient (31) (qui n'a pas grand sens). On a de même tout aussi formellement pour le potentiel limite ϕ

$$\partial_t \phi + \frac{1}{2}|\nabla_x \phi|^2 + p = 0$$

en utilisant le caractère optimal de la solution. En dérivant cette équation en x on trouve formellement (9) ou encore

$$(\partial_t v + (v.\nabla_x)v + \nabla_x p)c = 0.$$

Ensuite, en sommant en $a \in D$, on obtient

$$\int_D (\partial_t v + (v.\nabla_x)v) c(t,x,da) = -\nabla_x p,$$

et on majore par Cauchy-Schwarz pour obtenir

$$(\int |\nabla_x p|)^2 \leq \int |\partial_t v|^2 dc \int dc + \int |\nabla_x v|^2 dc \int |v|^2 dc.$$

Aucune de ces manipulations n'est légitime. On fait néanmoins aboutir cette idée formelle, en travaillant seulement avec les potentiels approchées ϕ_ϵ et en maniant des différences finies au lieu de dérivées. On arrive à montrer

Théorème 2..4 *La famille* (∇p_ϵ) *converge au sens des distributions vers une unique limite* ∇p *qui est une mesure localement bornée et vérifie l'équation*

$$\nabla p(t,x) = -\partial_t \int v(t,x,a)c(t,x,da) - \nabla_x \int (v \otimes v)(t,x,a)c(t,x,da), \quad (32)$$

pour $TOUTE$ *solution* $(c, m = cv)$ *du problème de minimisation.*

Ensuite, on arrive à justifier (9).

Quelques détails sur l'obtention de (9).

On parvient d'abord, en utilisant la proposition 2..3, à la version discrète suivante de (9),

$$|\int \frac{1}{2\delta}(p_\epsilon(t,x+\delta e) - p_\epsilon(t,x-\delta e))f dc - \int v.e(\partial_t f + v.\nabla_x f)dc| \quad (33)$$

$$\leq (\epsilon + \delta)C_f,$$

pour tout vecteur e de la boule unité de $\mathbb{R}^d$ et pour toute fonction test $f = f(t,x,a)$ à support compact en temps dans l'intervalle $]0,T[$, où C_f ne dépend que du support en temps de f, de la norme du sup de f et de $\nabla_x f$ et, enfin, de la norme $L^2(Q', dc)$ de $\partial_t f$. En prenant dans (33) une fonction test $f(t,x,a) = f(t,x)$ ne dépendant pas de a, on obtient, puisque $\int c(t,x,da) = 1$,

$$|\int \frac{1}{2\delta}(p_\epsilon(t,x+\delta e) - p_\epsilon(t,x-\delta e))f(t,x)dtdx - \int v.e(\partial_t f + v.\nabla_x f)dc| \quad (34)$$

$$\leq (\epsilon + \delta)C_f,$$

ce qui entraine (par Cauchy Schwartz)

$$|\int \frac{1}{2\delta}(p_\epsilon(t,x+\delta e) - p_\epsilon(t,x-\delta e))f(t,x)dtdx| \leq C_f, \quad (35)$$

où C_f ne dépend que du support en temps de f et de la norme

$$|||f||| = \sup_Q(|f| + |\nabla_x f|) + (\int_Q |\partial_t f(t,x)|^2 dtdx)^{1/2}. \tag{36}$$

Notons, ce qui sera utile pour la suite, que l'estimation (35), montre que, pour $\delta > 0$ fixé assez petit,

$$\frac{1}{2\delta}(p_\epsilon(t,x+\delta e) - p_\epsilon(t,x-\delta e)) \to \frac{1}{2\delta}(p(t,x+\delta e) - p(t,x-\delta e)) \tag{37}$$

pour la convergence faible* du dual du Banach séparable E obtenu par complétion des fonctions tests pour la norme définie par (36).

Reprenons l'équation approchée (33). Reste à passer à la limite en ϵ et δ, ce qui n'est pas sans poser quelques problèmes, puisque ∇p_ϵ ne converge vers la mesure ∇p qu'au sens des distributions.
Soit γ un noyau régularisant sur $\mathbb{R}^d$, positif, pair, à support dans la boule centrée à l'origine de rayon $1/2$ et e un vecteur fixé de cette même boule. En remplaçant dans (33) e par $e+y$, pour chaque y de la boule de la rayon $1/2$, en multipliant par $\gamma(y)$ et en intégrant en y, on obtient pour tout e dans la demi boule unité

$$|\int \frac{1}{2\delta}(p_\epsilon(t,x+\delta(e+y)) - p_\epsilon(t,x-\delta(e+y)))f dc\, \gamma(y)dy$$

$$+\int v.e(\partial_t f + v.\nabla_x f)dc| \leq (\epsilon+\delta)C_f.$$

Notons que, par parité de γ, on peut changer le second y par $-y$, ce qui nous permet de réécrire,

$$|\int \frac{1}{2\delta}(p_\epsilon(t,x+\delta e)-p_\epsilon(t,x-\delta e))f_{c,\delta,\gamma}(t,x)dtdx+\int v.e(\partial_t f+v.\nabla_x f)dc| \tag{38}$$

$$\leq (\epsilon+\delta)C_f,$$

où l'on a introduit, pour f de la forme $f(t,x,a) = \phi(t,x)\psi(a)$, avec ψ continues et ϕ régulière et nulle au voisinage de $t=0$ et $t=T$, la fonction

$$f_{c,\delta,\gamma}(t,x) = \int \phi(t,x-\delta y)\psi(a)c(t,x-\delta y,da)\gamma(y)dy. \tag{39}$$

Cette fonction appartient au Banach E obtenu par complétion des fonctions tests sur l'intérieur de Q par la norme définie par (36). En effet, elle est à support compact en temps, régulière en x, et sa régularité en temps est suffisante, puisque, grâce à (8), on trouve

$$\partial_t f_{c,\delta,\gamma}(t,x) =$$

$$\int (\partial_t + v(t,x-\delta y,a).\nabla_x)\phi(t,x-\delta y)\psi(a)c(t,x-\delta y,da)\gamma(y)dy$$

$$-\nabla_x . \int v(t,x-\delta y,a)\phi(t,x-\delta y)\psi(a)c(t,x-\delta y,da)\gamma(y)dy,$$

qui est de carré intégrable sur Q. Ainsi, δ étant fixé, on peut passer à la limite dans (38) quand $\epsilon \to 0$, en utilisant (37), et obtenir

$$|< \nabla p(t,x).e, \int_{-1/2}^{+1/2} f_{c,\delta,\gamma}(t,x-2\theta\delta e)d\theta > + \int v.e(\partial_t f + v.\nabla_x f)dc| \quad (40)$$

$$\leq \delta C_f,$$

où on note $< .,. >$ le crochet de dualité des mesures et on a utilisé la formule de la moyenne pour transformer le quotient différentiel. Introduisons

$$c_{\delta,e,\gamma}(t,x,a) = \int_{-1/2}^{+1/2} d\theta \int c(t,x-2\theta\delta e - \delta y,a)\gamma(y)dy, \quad (41)$$

qui est une régularisation de la mesure c et qu'on peut voir comme une fonction continue en t et régulière en x à valeurs dans les mesures de probabilité en a munies de la topologie faible*. (La régularité en espace venant de la convolution par γ et la continuité en temps de l'équation (8).) Les définitions (39) et (41) montrent que

$$|\int_{-1/2}^{+1/2} f_{c,\delta,\gamma}(t,x-2\theta\delta e)d\theta - \phi(t,x)\int \psi(a)c_{\delta,e,\gamma}(t,x,da)| \leq C_f\delta,$$

d'où la transformation de (40) en

$$|< \nabla p(t,x).e, \phi(t,x)\int \psi(a)c_{\delta,e,\gamma}(t,x,da) > + \int v.e(\partial_t f + v.\nabla_x f)dc| \quad (42)$$

$$\leq \delta C_f.$$

Comme ∇p est une mesure localement bornée sur Q et les $c_{\delta,e,\gamma}(t,x,a)$ sont des probabilités en a, on a

$$|< \nabla p(t,x).e, \phi(t,x)\int \psi(a)c_{\delta,e,\gamma}(t,x,da) > | \quad (43)$$

$$\leq < |\nabla p(t,x).e|, |\phi(t,x)| > \sup |\psi|.$$

Ainsi, les $c_{\delta,e,\gamma}$ appartiennent à la famille des fonctions mesurables essentiellement bornées en (t,x) relativement à la mesure $|\nabla p|$ et à valeurs probabilités sur D. Cette famille est bornée dans le dual de l'espace de Banach (séparable) $L^1(|\nabla p|, C(D))$ constitué des fonctions $f(t,x,a)$ qui sont $|\nabla p|$ intégrables en (t,x) à valeurs dans l'espace des fonctions continues en a. Elle est donc relativement (séquentiellement) compacte faible*. Or l'équation approchée (42) montre que, e et γ étant fixés, il n'y a qu'un point d'accumulation possible lorsque $\delta \to 0$, qu'on note $c_{e,\gamma}$, qui est $|\nabla_x p|$ essentiellement bornée à valeurs probabilités et vérifie

$$< \nabla p(t,x).e, \phi(t,x) \int \psi(a) c_{e,\gamma}(t,x,da) >= -\int v.e(\partial_t f + v.\nabla_x f) dc. \quad (44)$$

Comme le terme de droite dépend linéairement de e et est indépendant de γ, la limite $c_{e,\gamma}$ ne dépend ni de e ni de γ. On peut la noter $\underline{c}$ et elle vérifie

$$< \nabla p(t,x).e, \phi(t,x) \int \psi(a) \underline{c}(t,x,da) >= -\int v.e(\partial_t f + v.\nabla_x f) dc, \quad (45)$$

où, rappelons-le, $f(t,x,a) = \phi(t,x)\psi(a)$. On a donc, par définition (41),

$$\underline{c}(t,x,a) = \lim_{\delta \to 0} \int_{-1/2}^{+1/2} d\theta \int c(t, x - 2\theta\delta e - \delta y, a) \gamma(y) dy, \quad (46)$$

pour la topologie faible* du dual de $L^1(|\nabla p|, C(D))$. Si on considère $c(t,x,a)$ comme un élément du dual de $L^1(dtdx, C(D))$ (au lieu de $L^1(|\nabla p|, C(D))$), on a

$$c(t,x,a) = \lim_{\delta \to 0} \int_{-1/2}^{+1/2} d\theta \int c(t, x - 2\theta\delta e - \delta y, a), \gamma(y) dy, \quad (47)$$

de façon élémentaire pour la topologie faible*, quel que soit le choix de e et γ. Ceci montre que $\underline{c}(t,x,a)$ coincide avec $c(t,x,a)$ en tant que fonction à valeurs probabilités de (t,x), presque partout relativement à la partie régulière de $|\nabla p|$, et en constitue l'extension correcte pour la partie singulière de $|\nabla p|$. Ainsi, on peut faire de (46) la définition de $\underline{c}$ comme extension de c relativement à la mesure somme $dtdx + |\nabla p(t,x)|$. Ceci termine l'obtention de (9).

References

[1] V.I.Arnold, *Ann. Institut Fourier 16 (1966) 319-361.*

[2] R.Caflisch, G.Papanicolaou, *SIAM J. Appl. Math. 43 (1983) 985-906.*

[3] J.-Y.Chemin, *Fluides parfaits incompressibles,* Astérisque 230 *(1995).*

[4] A.J.Chorin, *Vorticity and turbulence,* Applied Mathematical Sci-*ences, 103,* Springer-Verlag, *New York, 1994.*

[5] R.DiPerna, P.-L.Lions, *Invent. Math. 98 (1989) 511-547.*

[6] R.DiPerna, A.Majda, *Comm. Math. Phys. 108 (1987), 667-689.*

[7] R.Duchon, R,Robert, *Relaxation of Euler equations,* Quart. Appl. *Math.50 (1992) 235-255.*

[8] E.Grenier, *Oscillations in quasineutral plasmas,* Comm. Partial Differential Equations *21 (1996) 363-394.*

[9] E.Grenier, *thèse, université Paris 6, 1995.*

[10] D.Ebin, J.Marsden, *Ann. of Math. 92 (1970) 102-163.*

[11] A.Majda, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Kyoto 1990, Springer, 1991.*

[12] A.Majda,Y.X.Zheng, *Existence of global weak solutions to one-component Vlasov-Poisson and Fokker-Planck-Poisson systems in one space dimension with measures as initial data,* Comm. Pure Appl. Math. *47 (1994) 1365-1401.*

[13] C.Marchioro, M.Pulvirenti, *Mathematical theory of incompressible nonviscous fluids,* Springer, *New York, 1994.*

[14] M.Roesch, *thèse, université Paris 6, 1995.*

[15] A.I.Shnirelman, *Math. Sbornik USSR 56 (1987) 79-105.*

[16] A.I.Shnirelman, *Geom. Funct. Anal. 4 (1994) 586-620.*

[17] A.I.Shnirelman, *Geom. Funct. Anal. 3 (1993) 279-294.*

[18] L.Tartar, *The compensated compactness method applied to systems of conservation laws,* Systems of nonlinear PDE, *NATO ASI* series, *1983.*