Pierre-Louis Lions et Panagiotis E. Souganidis

Équations aux dérivées partielles stochastiques nonlinéaires et solutions de viscosité

Séminaire É. D. P. (1998-1999), Exposé n° I, 13 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1998-1999____A1_0>

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES STOCHASTIQUES NONLINÉAIRES ET SOLUTIONS DE VISCOSITÉ

P.-L. LIONS
CEREMADE - URA C.N.R.S. 749
Université Paris 9 - Dauphine
Place du Maréchal de Lattre de Tassigny
75775 Paris Cedex 16

et

P.E. SOUGANIDIS
Department of Mathematics
University of Wisconsin at Madison
Madison
Wisconsin 53706

1 - Introduction

L'objectif du texte qui suit est de donner un aperçu (rapide et incomplet!) de l'étude menée par les auteurs ([15], voir aussi les notes [16], [17]) sur une classe générale d'équations aux dérivées partielles stochastiques fortement (on dit aussi "complètement") nonlinéaires.

Après avoir insisté sur les motivations et sur les principales difficultés mathématiques de ce type de problème, nous donnerons un résultat comme échantillon représentatif de notre théorie. Et nous conclurons par quelques questions ouvertes, qui semblent pourtant d'une grande simplicité...

La principale classe d'équations étudiées est la suivante

$$du = H(x,t,\omega,u,D_x u).dW_t + F(x,t,\omega,u,D_x u,D_x^2 u)dt \tag{1}$$

pour $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^N$ (par exemple...), avec une condition initiale

$$u\Big|_{t=0} = u_0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^N . \tag{2}$$

où u_0 est une fonction scalaire sur $\mathbb{R}^N$ (supposée bornée, uniformément continue par exemple, on notera dorénavant cet espace de fonction par $BUC(\mathbb{R}^N)$). Outre le caractère scalaire de l'équation (1), notre théorie s'applique à la classe d'équations vérifiant, au moins formellement, le principe du maximum ce qui revient à exiger que F vérifie pour tout (x,t,ω), $u \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^N$

$$F(x,t,\omega,u,p,A) \;\geq\; F(x,t,\omega,u,p,B) \quad \text{si} \quad A \geq B \tag{3}$$

où A et B sont des matrices symétriques, $N \times N$ quelconques.

D'autres hypothèses, plus techniques, sont nécessaires, pour exclure l'apparition de "chocs", portant par exemple sur les dépendances de H et F en u (H et F Lipschitzien en u, localement en u, uniformément en p, A...). Nous ne les détaillons pas ici.

Le caractère stochastique de (1) provient de la présence de terme dW_t, différentielle (au sens d'Itô) d'un mouvement Brownien standard W_t à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ (de sorte que H est bien sûr à valeurs dans $\mathbb{R}^N$). Dans la section 2 ci-dessous, nous indiquons brièvement quelques applications d'équations du type (1). Puis, nous expliquons dans la section 3 quelques-unes des principales difficultés mathématiques qu'il nous faut résoudre. Enfin, nous présentons dans la section 4 un résultat typique de ce que notre théorie de solutions de viscosité stochastiques permet de faire.

2 - Applications

Nous indiquons une brève liste d'applications que nous ne détaillerons pas ici.

i) Analyse Stochastique et EDPS linéaires (ou semilinéaires) :
Un exemple classique en Analyse Stochastique d'équations du type (1) est le cas où H est linéaire en Du, F est linéaire en D^2u (en général, des conditions supplémentaires sont imposées comme l'indépendance de H et F par rapport à u et la linéarité de F en Du...) et l'équation est "parabolique" au sens où il existe $\nu > 0$ tel que

$$F(A) \;\geq\; \nu \;\mathrm{Tr}\;(A)\;, \quad \forall A \text{ symétrique}\;.$$

Nous renvoyons le lecteur à E. Pardoux [19], H. Watanabe [23] (...) pour plus de détails. L'exemple le plus simple d'équations de ce type est le suivant :

$$du \;=\; Du.dW_t + \frac{1}{2}\,\Delta u\;dt \tag{4}$$

et, au vu de la formule de Itô, la solution est donnée par

$$u \;=\; u_0(x+W_t)\;. \tag{5}$$

ii) Filtrage et contrôle stochastique avec information partielle :

Il est bien connu que l'équation de Zakaï joue un rôle fondamental en filtrage nonlinéaire et dans la théorie du contrôle stochastique avec information partielle. Cette équation gouverne notamment l'évolution temporelle de la densité conditionnelle (non normalisée) d'une diffusion et elle est de la forme (1) avec H linéaire en u et Du, et F linéaire en Du, D^2u (indépendante de u). Pour plus de détails, on pourra consulter M. Zakaï [24], B.L. Rozovsky [22], E. Pardoux [20], [21], N.V. Krylov et B.L. Rozovsky [11], H. Kunita [12]...

iii) Modèles de taux en Finance Mathématique :

Des modèles généraux du type (1) ont été proposés récemment pour l'évolution de la courbe des taux en Finance Mathématique (voir R. Cont [5], M. Musiela [18] ...).

iv) Contrôle stochastique trajectoriel :

De la même façon que le contrôle optimal de systèmes modélisés par des équations différentielles ordinaires (déterministes) peut être abordé par l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman ($H = 0$, $F = F(x, t, Du)$ convexe en Du), le contrôle trajectoriel de diffusions conduit à des équations de Hamilton-Jacobi-Bellman stochastiques du type (1) - voir P.-L. Lions et P.E. Souganidis [15], [17] pour plus de détails.

v) Propagation stochastique de fronts et d'interfaces :

Des modèles en Physique et en Science des Matériaux (pour étudier notamment les phénomènes de nucléation) introduisent des propagations stochastiques de fronts ou d'interfaces. Le cas le plus simple en dimension $2(= N)$ est le cas du mouvement d'une courbe fermée régulière dont la vitesse normale de propagation est donnée par un bruit blanc $\displaystyle \frac{``dW''}{dt}$.

$$\dot{X} \;=\; Vn, \quad \text{``}V = \frac{dW}{dt}\text{''}$$

Rappelons que si la vitesse V est une constante c, alors, en introduisant une fonction u_0 sur $\mathbb{R}^2$ telle que la courbe de niveau $\{u_0 = 0\}$ soit précisément la courbe initiale (et la zone $\{u_0 > 0\}$ corresponde à l'extérieur de la courbe...), les courbes de niveau $\{u(t) = 0\}$ donnent le mouvement de la courbe dès que u résout (au sens des solutions de viscosité)

$$\frac{\partial u}{\partial t} \;=\; c\,|Du|\ .$$

Il est donc naturel d'imaginer que le cas d'une vitesse normale donnée par un bruit blanc conduise à l'équation

$$du \;=\; |Du|\ dW\ . \tag{6}$$

Plus généralement, si la vitesse normale est donnée par $V = \alpha \dfrac{dW}{dt} - \beta C$ où C désigne la courbure ($\alpha \in \mathbb{R},\ \beta > 0$), cet argument heuristique conduit à l'équation

$$du \;=\; \alpha|Du|\ dW + \beta\Big(\Delta u - \sum_{i,j}\ \partial_{ij}u\ \frac{\partial_i u \partial_j u}{|Du|^2}\Big)\ . \tag{7}$$

Pour plus de détails sur le cas déterministe, le lecteur pourra consulter le cours [1] ainsi que G. Barles et P.E. Souganidis [4], G. Barles, H.M. Soner et P.E. Souganidis [3].

vi) <u>Problèmes asymptotiques avec coefficients aléatoires oscillants</u> :

Il s'agit de déduire des équations de type (1) à partir d'équations faisant intervenir des coefficients aléatoires rapidement oscillants. Jusqu'à présent, seul le cas linéaire avait été étudié (voir par exemple H. Kushner et H. Huang [13], H. Watanabe [23]). D'autres problèmes asymptotiques concernent les transitions de phase dans des milieux aléatoires. Ainsi, à partir d'équations de type Allen-Cahn avec un terme aléatoire rapidement oscillant de "forcing" temporel, on peut déduire formellement des équations de type (7), cette déduction a d'ailleurs été justifiée si $N = 2$, pour des courbes délimitant un ensemble convexe régulier et pour un intervalle de temps convenable, par T. Funaki [9].

3 - Difficultés mathématiques

3.1 Même dans le cas de solutions régulières (en x) de (1), la formulation des équations n'est pas claire. Pour se convaincre de la difficulté, donnons deux exemples. Tout d'abord, dans le cas de l'équation (6), on s'attend à ce que l'équation (6) soit invariante par changement monotone d'inconnue ($u \to \beta(u)$ où β est régulière et strictement croissante sur $\mathbb{R}$) : en effet, u et $\beta(u)$ ont les mêmes lignes de niveau ! Or, la formule de Itô implique

$$\begin{aligned} d\beta(u) &= \beta'(u)du + \frac{1}{2}\,\beta''(u)\ |Du|^2\ dt \\ &= |D\beta(u)|\ dW + \frac{1}{2}\,\beta''(u)|Du|^2\ dt \end{aligned}$$

Et l'invariance désirée n'est pas vérifiée !

Le second exemple porte sur le cas trivial d'une équation linéaire avec $N = 1$

$$du \ = \ u_x dW \ + \ \lambda\ u_{xx} dt \quad , \quad \lambda \geq 0\ .$$

D'après la formule de Itô, en posant $v = u(x - W_t, t)$, on obtient

$$dv = du - u_x dW + \frac{1}{2} u_{xx} dt - u_{xx} dt \ = \ \Big(\lambda - \frac{1}{2}\Big) u_{xx} dt = \Big(\lambda - \frac{1}{2}\Big) v_{xx} dt$$

de sorte que si $0 < \lambda < \frac{1}{2}$, le problème est mal posé (équation de la chaleur rétrograde !). De manière plus générale, (1) est mal posé (au moins formellement) à moins de supposer (en notant $p = Du$, $A = D^2u$)

$$F(p, A) \ \geq \ \frac{1}{2}\Big(A\ \frac{\partial H}{\partial p}(p)\ ,\ \frac{\partial H}{\partial p}(p)\Big)\ ,\ \forall A, p\ .$$

La solution à ces difficultés consiste à remplacer la différentielle de Itô par celle de Stratonovich (notée $\circ dW_t$) et d'écrire (1) sous la forme

$$du \ = \ H(x, t, \omega, D_x u) \circ dW_t \ + \ F(x, t, \omega, u, D_x u, D_x^2 u) dt \tag{8}$$

Ainsi, (6) devient

(9) $$du \;=\; |Du| \circ dW$$

et on a bien, grâce au calcul de Stratanovich,

$$d\beta(u) \;=\; \beta'(u)|Du| \circ dW \;=\; |D\beta(u)| \circ dW\ .$$

D'autre part, l'équation, pour $\lambda \geq 0$,

(10) $$du \;=\; u_x o dW + \lambda u_{xx} dt$$

devient, en posant $v = u(x - W_t, t)$,

$$dv \;=\; \lambda\ v_{xx}\ dt$$

et est donc bien posée pour tout $\lambda > 0$.
Il convient alors d'observer que (8), (9) et (10) peuvent se réécrire avec des différentielles de Itô et deviennent alors respectivement (dans le cas où H ne dépend que de Du)

(8') $$du \;=\; H.dW + \Big(F + \frac{1}{2}(D^2u.\frac{\partial H}{\partial p}, \frac{\partial H}{\partial p})\Big)\ dt\ ,$$

(9') $$du \;=\; |Du|.dW + \frac{1}{2}(D^2u.Du, Du)\ |Du|^{-2}\ dt\ ,$$

et

(10') $$du \;=\; u_x dW + (\lambda + \frac{1}{2})\ u_{xx}\ dt\ .$$

3.2 Nous venons de voir que le cadre naturel était fourni par le calcul de Stratanovich. Pourtant, celui-ci crée une difficulté mathématique considérable puisqu'il nécessite des fonctions et des processus “réguliers”. Or, on ne peut s'attendre au mieux, en général, qu'à une régularité du type u Lipschitzien en x uniformément en t. En effet, ceci est déjà le cas pour des équations déterministes ($H = 0$) dans le cas où F ne dépend que de Du (équations de Hamilton-Jacobi du 1$^{\text{er}}$ ordre avec l'apparition de “chocs” i.e. de discontinuités sur Du). Ce type de singularités est à l'origine de l'introduction, dans le cas déterministe, de la théorie des solutions de viscosité (M.G. Crandall et P.-L. Lions [7], voir également l'article de revue M.G. Crandall, H. Ishii et P.-L. Lions [6] ainsi que les ouvrages [1], G. Barles [2], W.H. Fleming et H.M. Soner [8]...).

3.3 Pour donner un sens à (8), trajectoire par trajectoire, il nous faut donc trouver une formulation de type solutions de viscosité (i.e. de transformer la propriété formelle de principe du maximum en notion de solution...). Pour une trajectoire brownienne $(W_t,\ t \geq 0)$ quelconque (p.s.), on ne dispose que d'une propriété de continuité par rapport à t (ou même Hölder d'exposant $\theta < 1/2$) alors que la théorie classique des solutions de viscosité nécessite au moins une propriété d'absolue continuité ($W^{1,1}(0,T)$ pour tout $T > 0$) - voir P.-L. Lions et B. Perthame [14] et H. Ishii [10] - qui n'est jamais vérifiée pour le Brownien ! On peut néanmoins tenter d'adapter la notion introduite dans [14] en considérant, pour toute fonction régulière $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}^N$, les quantités $\max\limits_{\mathbb{R}^N} u(t) - \varphi(x) = \bar{m}(t)$, $\min\limits_{\mathbb{R}^N} u(t) - \varphi(x) = \underline{m}(t)$ et en écrivant

$$(11) \qquad d\bar{m} \ \leq \ H\Big(D\varphi(x_t)\Big) \circ dW_t + F\Big(D\varphi(x_t), D^2\varphi(x_t)\Big)\ dt$$

et

$$(12) \qquad d\underline{m} \ \geq \ H(D\varphi(x_t) \circ dW_t + F\Big(D\varphi(x_t), D^2\varphi(x_t)\Big)\ dt$$

en ne considérant, pour simplifier la présentation, que le cas où H ne dépend que de Du et F ne dépend que de (Du, D^2u). Dans les inéquations (11) ou (12), x_t est un point de maximum ou de minimum de $u(t) - \varphi$. Et même si on néglige la question de la sélection de x_t (point technique qui peut facilement être contourné...) la question fondamentale de la signification de $H\Big(D\varphi(x_t)\Big) \circ dW_t$ subsiste et nous ne savons pas s'il est possible de donner un sens à cette expression...

3.4 (Un exemple utile).
Dans le cas particulier où H ne dépend que de Du et est régulier, et $F \equiv 0$, on peut construire, par la méthode des caractéristiques, sur un intervalle de temps de la forme $[t_0, t_0 + \tau]$ $(\tau > 0)$ une solution de

$$(13) \qquad \begin{cases} du = H(Du) \circ dW \quad \text{pour} \ \ t \in [t_0, t_0 + \tau] \\ u(t_0) \ = \ u_0 \end{cases}$$

en supposant que $u_0 \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N)$ (et $F \in C^3$).

Il suffit en effet de résoudre pour tout $y \in \mathbb{R}^N$, $t \in [t_0, t_0 + \tau]$

$$x - \Big\{W(t) - W(t_0)\Big\}.H'\Big(Du_0(x)\Big) \ = \ y \ .$$

et de poser $Du(y,t) = Du_0(x)$, $u(y,t) = u_0(x) + \Big(W(t) - W(t_0)\Big)\ \Big\{H(Du_0(x) - H'(Du_0(x)).Du_0(x)\Big\}$. Cette construction est clairement possible pour $t_0 \in [0,T]$ ($T > 0$ fixé) si τ est choisi suffisamment petit de sorte que

$$\left(\max_{\substack{0 \le s \le T \\ |s'-s| \le \tau}} |W(s) - W(s')|\right) \left(\max_{|p| \le ||Du_0||_{L^\infty}} ||H''(p)||\right) ||D^2 u_0||_{L^\infty} \ < \ 1 \ .$$

Observons que seule la <u>continuité</u> de W est requise dans cette construction et que la solution ainsi construite, notée $u = S^0(H, W, t_0, t).u_0$ ou $S^0(t_0, t).u_0$ s'il n'y a pas d'ambiguité, est de classe C^2 uniformément en $t_0 \in [0,T]$, $t \in [t_0, t_0 + \tau]$ si $u_0 \in C^2$.

4 - Un résultat typique

Dans cette dernière section, nous présentons un résultat typique tiré de [15] (voir aussi [16], [17]) et nous indiquons une extension possible ainsi que quelques exemples de problèmes ouverts. Nous n'aborderons pas ici les diverses applications mentionnées dans la section 2 ci-dessus (voir [15] et [17]) qui peuvent toutes être traitées grâce à notre théorie. Enfin, de façon à simplifier le plus possible la présentation, nous ne considérerons que le cas où H ne dépend que de Du et F ne dépend que de Du et D^2u de sorte que (8) se réduit à

$$(14) \qquad du \ = \ H(Du) \circ dW + F(Du, D^2u)dt \quad \text{dans} \ \ \mathbb{R}^N \times [0, \infty[$$

avec la condition initiale (2) où $u_0 \in BUC(\mathbb{R}^N)$. On suppose que H est Lipschitzien sur $\mathbb{R}^N$ et de classe C^2, et que F est continue et vérifie (3).

Nous allons en fait résoudre (14) de manière trajectorielle, c'est-à-dire en considérant une trajectoire $(W(t), t \ge 0)$ quelconque (p.s.). En fait, nous montrerons que l'on peut considérer une trajectoire $(W(t), t \ge 0)$ <u>continue</u> quelconque i.e. une fonction continue de $t \ge 0$ quelconque à valeurs dans $\mathbb{R}^N$. Pour ce faire, on introduit la notation suivante : si $W \in W^{1,1}(0,T)$ ($\forall T > 0$) - ou même $W \in C^1([0, +\infty[\ )$...$-$, la théorie classique des solutions de viscosité donne l'existence d'une famille (continue par rapport à t) d'opérateurs $S(t)$

qui à $u_0 \in BUC(\mathbb{R}^N)$ associe $u(t)$ où $u(x,t)$ est l'unique solution de viscosité dans $BUC(\mathbb{R}^N \times [0,T])$ $(\forall T > 0)$ de

$$(15) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = H(Du).\dfrac{dW}{dt} + F(Du, D^2u) \\ \text{dans } \mathbb{R}^N \times [0,+\infty[,\ u\Big|_{t=0} = u_0 \text{ dans } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

et on sait que u dépend continûment de W dans $W^{1,1}$ (ou C^1...) - ainsi d'ailleurs que de H et F (pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact)... . De plus, on a (le principe du maximum !)

$$(16) \qquad S(t)u_0 \ \leq\ S(t)v_0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^N \times [0,+\infty[\text{ si } \ u_0 \leq v_0 \text{ sur } \mathbb{R}^N$$

et

$$(17) \qquad S(t)(u_0 + c) \ \equiv\ S(t)u_0 + c\ , \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

de sorte que l'on a pour tout $t \geq 0$

$$(18) \qquad \sup_{\mathbb{R}^N}\Big(S(t)u_0 - S(t)v_0\Big)^+ \ \leq\ \sup_{\mathbb{R}^N}(u_0 - v_0)^+.$$

On notera dorénavant $S(W,t) \ = \ S(t)$.

Le résultat typique que nous pouvons alors énoncer est le suivant :

Theorème : *La famille d'opérateurs $S(W,t)$ se prolonge, par continuité, de manière unique à toute fonction $W \in C\Big([0,+\infty[,\mathbb{R}^N\Big)$ en une famille continue d'opérateurs sur $BUC(\mathbb{R}^N)$ vérifiant (16)-(18). En d'autres termes, si $W \in C\Big([0,+\infty[,\mathbb{R}^N\Big)$, et si on choisit $W_n \in C^1\Big([0,+\infty[\Big)$ qui converge uniformément vers W sur tout compact de $[0,+\infty[$, $u_n(x,t) = S(W_n,t).u_0(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^N \times [0,T])$ $(\forall T > 0)$, et cette limite est indépendante de la suite $(W_n)_n$ choisie. De plus, $S(W,t)$ vérifie les propriétés (16)-(18).* □

De ce résultat, on déduit aisément la formulation qui suit, de type solutions de viscosité, de l'équation (14). Cette formulation est en fait à la base de la démonstration du résultat précédent.

Corollaire : *Pour tout $u_0 \in BUC(\mathbb{R}^N)$, $u(x,t) = S(W,t).u_0(x) \in BUC(\mathbb{R}^N \times [0,T])$ $(\forall T > 0)$ vérifie les propriétés suivantes pour toute fonction φ de classe*

C^2 et Lipschitz sur $\mathbb{R}^N$, pour toute fonction g de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, pour tout $T>0$ fixé et pour tout $t\in[0,T]$: si $u(.,t+.)-S^0(t+.,t).\varphi(.)-g(.)$ admet un point de maximum (respectivement, minimum) en x_0, $h_0\in]0,\tau[$, alors on a

$$(19)\qquad g'(h_0)\le F\Big(D(S(t+h_0,t).\varphi)(x_0),D^2(S(t+h_0,t).\varphi)(x_0)\Big),$$

(respectivement

$$(18)\qquad g'(h_0)\ge F\Big(D(S(t+h_0,t).\varphi)(x_0),D^2(S(t+h_0,t).\varphi)(x_0)\Big)).\square$$

Les résultats précédents permettent donc de résoudre (14) dans le cas où H est de classe C^2 et Lipschitz sur $\mathbb{R}^N$. On peut bien sûr éliminer l'hypothèse que H est Lipschitz sur $\mathbb{R}^N$ en supposant par exemple que u_0 est Lipschitz sur $\mathbb{R}^N$ et que H est localement Lipschitz mais, en revanche, l'hypothèse que H est de classe C^2 est une restriction beaucoup plus gênante. On observera qu'elle n'est pas vérifiée dans le cas de l'équation (9) (correspondant à des propagations de courbe, voir section 2 ci-dessus). Il est donc important d'éliminer, au moins partiellement, cette hypothèse. Dans [15] (voir aussi [17]), nous montrons qu'il suffit de supposer que H est Lipschitz sur $\mathbb{R}^N$ et que H peut s'écrire comme la différence de deux fonctions convexes. On peut alors étendre par continuité, de manière unique, les opérateurs $S(W,t)=S(H,W,t)$ à de telles fonctions H.

Concluons cette brève présentation par quelques problèmes ouverts. Tout d'abord, nous ne savons pas vérifier, en général, que la notion de solutions introduite dans le Corollaire précédent caractérise $u(x,t)=S(W,t).u_0(x)$. L'unicité de telles solutions est établie dans [15] (voir aussi [16]) dans le cas où F ne dépend que de Du, ou dans le cas où H est affine en Du. D'autre part, nous ne savons pas si $S(H,W,t)$ peut s'étendre, de manière unique, à toute fonction H Lipschitzienne (en d'autres termes, est-il nécessaire de supposer que H est la différence de deux fonctions convexes ?). Enfin, terminons par une question ouverte, en apparence très simple (...!), dans le cas où $N=1$: en supposant u_0 régulière, H régulier, la solution de

$$\begin{array}{rrcl} & du &=& H(u_x)\circ dW+\lambda u_{xx}dt\\ \text{(respectivement,} & du &=& H(u_x)dW+\lambda u_{xx}dt) \end{array}$$

est-elle régulière en x (pour tout $t > 0$) dès que $\lambda > 0$ $\Big($respectivement, $\lambda > \dfrac{1}{2} \max\Big\{ |H'(p)|^2 \ / \ |p| \leq \|u_x^0\|_{L^\infty} \Big\}\Big)$?

Références

[1]M. Bardi, M.G. Crandall, L.C. Evans, H.M. Soner et P.E. Souganidis : Viscosity solutions and applications. Lect. Notes Math. #1660, Springer, Berlin, 1994.

[2]G. Barles : Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi. Mathématiques et Applications, #17, Springer, Berlin, 1994.

[3] G. Barles, H.M. Soner et P.E. Souganidis : *Front propagation and phase field theory.* S.I.A.M. J. Cont. Opt., 31 (1993), p. 439-469.

[4] G. Barles et P.E. Souganidis : *A new approach to front propagation : Theory and Applications*, à paraître dans Arch. Rat. Mech. Anal. .

[5] R. Cont : *Modeling term structure dynamics : an infinite dimensional approach.* Preprint # 402, CMAP, Ecole Polytechnique, Palaiseau, 1998.

[6] M.G. Crandall, H. Ishii et P.-L. Lions : *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations.* Bull. Amer. Math. Soc., 27 (1992), p. 1-67.

[7] M.G. Crandall et P.-L. Lions : *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations.* Trans. Amer. Math. Soc., 277 (1983), p. 1-42.

[8] W.H. Fleming et H.M. Soner : Controlled Markov processes and viscosity solutions. Springer, Berlin, 1993.

[9] T. Funaki : *Singular limit for stochastic reaction-diffusion equations and generation of random interfaces.* Preprint.

[10] H. Ishii : *Hamilton-Jacobi equations with discontinuous Hamiltonians on arbitrary open sets.* Bull. Fac. Sci. Engin. Chuo Univ., 28 (1989), p. 33-77.

[11] N.V. Krylov and B.L. Rozovsky : *On the Cauchy problem for linear stochastic partial differential equations.* Izv. Akad. Nauk. SSSR, 41 (1977), p. 1329-1347.

[12] H. Kunita : *Stochastic partial differential equations connected with non-linear filtering.* CIME course, Lect. Notes Math. #972, Springer, Berlin, 1982.

[13] H. Kushner et H. Huang : *Limits of parabolic partial differential equations with wide band stochastic coefficients and an application to filtering theory*. Stochastics, 14 (1990), p. 115-148.

[14] P.-L. Lions and B. Perthame : *Remarks on Hamilton-Jacobi equations with measurable time dependent Hamiltonians*. Nonl. Anal. T.M.A., 11 (1987), p. 613-622.

[15] P.-L. Lions et P.E. Souganidis : travail en préparation.

[16] P.-L. Lions et P.E. Souganidis : *Fully nonlinear stochastic partial differential equations*. C.R. Acad. Sci. Paris, 326 (1998), p. 1085-1092.

[17] P.-L. Lions et P.E. Souganidis : *Fully nonlinear stochastic partial differential equations : Nonsmooth equations and applications*. C.R. Acad. Sci. Paris, 327 (1998), p. 735-742.

[18] M. Musicla : *Stochastic PDEs and term structure modeling*. Preprint, 1993.

[19] E. Pardoux : *Equations aux dérivées partielles stochastiques non linéaires monotones. Etude de solutions fortes de type Ito*. Thèse, Université Paris-Nord, Novembre 1975.

[20] E. Pardoux : *Stochastic partial differential equations and filtering of diffusion processes*. Stochastics, 3 (1979), p. 127-167.

[21] E. Pardoux : *Equations of nonlinear filtering, and application to stochastic control with partial observation*. CIME course, Lect. Notes in Math. #972, Springer, Berlin, 1982.

[22] B.L. Rozovsky : *Stochastic partial differential equations arising in nonlinear filtering problems*. Uspekhi. Mat. Nauk., 27 (1972), p. 213-214.

[23] H. Watanabe : *On the convergence of partial differential equations of parabolic type with rapidly oscillating coefficients to stochastic partial differential equations*. Appl. Math. Optim., 20 (1989), p. 81-96.

[24] M. Zakai : *On the optimal filtering of diffusion processes*. Z. Wahr. Verw. Geb., 11 (1969), p. 230-243.