Louis Boutet de Monvel

Star Produits Holomorphes

Séminaire É. D. P. (1998-1999), Exposé n° II, 17 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1998-1999____A2_0>

Star Produits Holomorphes

L Boutet de Monvel

Dans cet article nous rappelons la définition d'un star-produit, et étudions et classifions les star-produits sur un fibré cotangent complexe. Ce sujet a fait l'objet d'une conférence en l'honneur de V. Guillemin en septembre 1998; il est dévelopé plus en détail dans [2]. Cet article est dédié à la mémoire de M. Flato et A. Lichnerowicz, disparus peu de temps après la conférence, et qui ont grandement contribué au sujet.

1 Introduction

Commençons par rappeler la définition d'un star-produit : soit X une variété réelle ou complexe. Un star-produit semi-classique sur X, ou déformation du produit usuel, est une loi d'algèbre associative et unitaire $(f,g) \to B(f,g)$ sur l'ensemble des séries formelles $f = \sum f_n(x)h^n$ à coefficients fonctions sur X, où $B = \sum h^n B_n$ est un opérateur bidifférentiel formel : dans un système de coordonnées locales sur X on a $B_n(f,g) = \sum b_{\alpha\beta}(x)\partial^\alpha f \partial^\beta g$. Unitaire signifie qu'on a $B(1,f) = B(f,1) = f$ pour toute f ; associative signifie qu'on a $B(f, B(g,h)) = B(B(f,g),h)$ pour toutes f,g,h. Plus loin (n^{o}2) nous utiliserons une définition un peu élargie, où h ne commute plus avec le reste, de façon à inclure dans la définition le calcul symbolique des opérateurs pseudo-différentiels ou de Toeplitz (cf. [3]).

Si B est un star-produit, le terme dominant de la loi des commutateurs $\{f,g\} = B_1(f,g) - B_1(g,f)$ est un crochet de Poisson sur X (voir n^{o}2). Un problème de la théorie est de classifier les star-produits correspondant à un crochet de Poisson donné, et en particulier de montrer qu'il en existe. Lorsque X est rélle, ce problème a été résolu par M. De Wilde et P. Lecomte [10, 11] dans le cas symplectique, et par M. Kontsevitch [19] dans le cas général. Kontsevitch montre plus précisément qu'il y a une correspondance biunivoque entre les classes d'équivalence de star produits sur X et les classes d'équivalence de familles formelles de crochets de Poisson $C = \sum h^n C_n$ sur X.

Les démonstrations dans le cas réel ne s'appliquent plus lorsque X est complexe, parce qu'elles utilisent des arguments typiquement réels (voisinages tubulaires, partitions de l'unité), et en général on ne sait pas s'il existe un star-produit de crochet de Poisson donné, ni comment les classifier.[1]

Il est néanmoins important de faire cette étude dans le cas complexe : le calcul symbolique des opérateurs differentiels vit toujours sur une variété complexe

[1] Néanmoins M. Kashiwara dans le cas symplectique ([17]) et M. Kontsevitch en général (communication orale) montrent qu'on peut toujours construire une gerbe équivalente à la catégorie des faisceaux des modules sur une telle algèbre

(les symboles sont des polynômes), de sorte que les problèmes qui les concernent conduisent naturellement à des problèmes de star-produits holomorphes. De même il est important d'étudier les faisceaux de modules sur ces algèbres. Dans un cadre plus standard, un autre problème important et de même nature est de comprendre le lien entre les faisceaux de modules sur l'algèbre de opérateurs pseudo-différentiels fournis par des constructions microlocales sur le fibré cotangent $T^*Y - \{0\}$ d'une variété Y privé de sa section nulle, et les $\mathcal{D}_Y$-modules : ce problème n'a de sens que sur un fibré cotangent complexe.

Je m'intéresse ici, pour commencer, aux star-produits sur un fibré cotangent complexe, muni de son crochet de Poisson symplectique canonique : comme signalé ceci demande une légère extension de la définition des star-produits, donnée au n^{o}2. La classification est rendue possible par le fait qu'il existe une star-algèbre canonique $\mathcal{E}$ (celle des opérateurs pseudo-différentiels), à laquelle toute autre star-algèbre associée au même crochet de Poisson est localement isomorphe.

La classification est décrite en détail dans [2], et je me contenterai ici d'en montrer les traits les plus saillants. Il est intéressant de noter que cette classification est essentiellement triviale en dimension ≥ 3, et beaucoup moins en dimension 1 ou 2.

2 Star Algèbres sur un Cône

2.1 Cônes et symboles

Definition 1 *On appelle cône réel (resp. complexe) une fibré principal C^∞ (resp. holomorphe) Σ de groupe $\mathbf{R}_+^\times$, resp. $\mathbf{C}^\times$. La base du cône est $B\Sigma = \Sigma/\mathbf{R}_+^\times$ resp. $\Sigma/\mathbf{C}^\times$.* [2]

Un cône réel est isomorphe à un produit $B\Sigma \times \mathbf{R}_+^\times$. Un cône complexe est isomorphe à $L - \{0\}$ (L moins sa section nulle), où L est un fibré linéaire de rang 1 sur $B\Sigma$. Le fibré L n'a pas de raison d'être trivial.

Definition 2 *(i) On note $\mathcal{O}(m)$ le faisceau des fonctions homogènes de degré m sur Σ (holomorphes dans le cas complexe) ; c'est un faisceau sur $B\Sigma$.*

(ii) On note $\widehat{\mathcal{O}}$ le faisceau sur $B\Sigma$ des séries formelles (symboles) :

$$f = \sum_{m \leq m_0} f_m \quad \text{avec } f_m \in \mathcal{O}(m) \ (m \text{ entier, } m \to -\infty)$$

Definition 3 *On note $\widehat{\mathcal{D}}_k$ ($k \geq 1$ entier), le faisceau (sur $B\Sigma$) des opérateurs k-différentiels formels :*

$$P(f_1, \ldots, f_k) = \sum_{m \leq m_0} P_m(f_1, \ldots, f_k)$$

[2] toutes les variétés considérées ici sont paracompactes.

où pour chaque entier $m \leq m_0$, P_m est un opérateur k-différentiel, homogène de degré m pour les homothéties.

Pour $k = 1$ on écrira simplement $\widehat{\mathcal{D}}$.

Localement Σ est un cône produit, on peut choisir des coordonnées homogènes x_j (réelles où complexes, de degré 0) sur la base et r de degré 1 sur la fibre, et $P_m(f_1, \ldots, f_k)$ est somme de monômes

$$a(x)r^m \, \partial_x^{\alpha_1}(r\partial_r)^{m_1}(f_1) \ldots \partial_x^{\alpha_k}(r\partial_r)^{m_k}(f_k).$$

Il n'y a pas de restriction sur l'ordre de P_m. Dans la suite, pour éviter les confusions, "degré" signifiera toujours degré d'homogénéité par rapport aux homothéties, ou le degré du terme dominant, et ordre l'ordre comme opérateurs différentiel; ainsi dans l'expression ci-dessus P_m est de degré m et d'ordre fini arbitraire ; la série formelle $\sum P_m$ peut être d'ordre infini.

Un opérateur $P = \sum P_k \in \widehat{\mathcal{D}}$ est inversible si et seulement si son terme dominant $\sigma(P) = P_{m_0}$ est inversible, donc d'ordre 0. On note $\widehat{\mathcal{D}}_-^\times$ le faisceau des $P \in \widehat{\mathcal{D}}$ inversibles de degré ≤ 0 tels que $P(1) = 1$ (i.e. $P_0 = 1$, et P_m n'a pas de "terme constant" pour $m < 0$).

Remarque 1 Les faisceaux sont tout à fait inutiles pour la théorie réelle, mais indispensables dans la théorie complexe où il peut y avoir trop peu de sections globales.

Remarque 2 Sur un cône analytique il y a aussi une notion de symbole convergent (introduite par l'auteur dans [7] pour définir les opérateurs pseudo-différentiels analytiques). Ce sont en fait les plus importants importants et pour beaucoup de questions il est essentiel d'utiliser des symboles "convergent" plutôt que formels.[3] Cependant pour les problèmes de classification qui suivent, il n'y a pas de différence qualitative significative entre symboles formels et symboles convergents, aussi je me limiterai aux symboles formels et éviterai les technicalités supplémentaires de la convergence.

2.2 Star Algèbres sur un Cône

Definition 4 *Une star-algèbre sur Σ est un faisceau $\mathcal{A}$ sur la base $B\Sigma$, localement isomorphe à $\widehat{\mathcal{O}}$ (le faisceau structural est $\widehat{\mathcal{D}}_-^\times$), muni d'une loi d'algèbre associative unitaire (star produit) $f * g = B(f,g)$ localement un opérateur bidifférentiel formel.*

[3] Cette distinction est essentielle dans les théorèmes de finitude de T. Kawai et M. Kashiwara [18], ou dans le passage de $\mathcal{E}$-module à $\mathcal{D}$-module de la thèse de D. Meyer [20], et probablement dans la plupart des questions où on compare des $\mathcal{E}$-modules et des $\mathcal{D}$-modules.

Localement $f * g = \sum B_m(f,g)$ où B_m est un opérateur bidifférentiel homogène de degré $m \to -\infty$, $B_0 = 1$. Le faisceau structural de groupes qui sert à recoller les repères locaux est $\widehat{\mathcal{D}}_-^\times$, i.e. faisceau des automorphismes de $\widehat{\mathcal{O}}$ qui préservent les opérateurs bidifférentiels formels, et l'unité 1).

Dans le cas semi-classique, Σ est un cône produit $\Sigma = B\Sigma \times L$ ($L = \mathbf{R}_+$ ou $\mathbf{C}^\times - \{0\}$), $\mathcal{A} = \widehat{\mathcal{O}}$, h est homogène de degré -1, et la loi de produit ne comporte pas de dérivation en h, donc h est central et joue le rôle d'une constante absolue. La définition ci-dessus contient le cas semi-classique, et aussi celui des algèbres d'opérateurs pseudo-différentiels ou des opérateurs de Toeplitz. Ce cadre pour décrire les star-produits a été introduit dans [4].

Dans le cas réel, $\mathcal{A}$ est toujours isomorphe à $\widehat{\mathcal{O}}$ (comme faisceau de groupe structural $\widehat{\mathcal{D}}_-^\times$), i.e. on peut définir un "symbole total" (cela se voit facilement en recollant au moyen d'une partition de l'unité). Il n'en est plus de même dans le cas holomorphe, même dans des cas très naturels (par exemple pour les opérateurs pseudodifférentiels sur la sphère de Riemann $P_1(\mathbf{C})$, il n'y a pas de symbole total - voir ci-dessous). Aussi on ne peut pas éviter cette présentation faisceautique dans le cas complexe.

2.3 Crochet de Poisson

Le groupe structural $\widehat{\mathcal{D}}_-^\times$ qui sert à recoller est constitué d'opérateurs de symbole 1, qui préservent la filtration canonique de $\widehat{\mathcal{O}}$ et induisent l'identité sur $gr\widehat{\mathcal{O}}$. Donc une star-algèbre $\mathcal{A}$ a une filtration canonique, et il y a un isomorphisme canonique (calcul symbolique)

$$\mathrm{gr}\,\mathcal{A} \simeq gr\widehat{\mathcal{O}} = \bigoplus \widehat{\mathcal{O}}(n)$$

$gr\mathcal{A} \sim gr\widehat{\mathcal{O}}$ est alors une algèbre de Poisson, dont le crochet de Poisson est donné par le terme dominant du commutateur :

$$\{f,g\} = B_1(f,g) - B_1(g,f)$$

qui est un opérateur bidifférentiel alterné d'ordre 1 (champ de 2-vecteurs) i.e.

$$\{f,g\} = -\{g,f\}, \quad \{f,gh\} = \{f,g\}h + g\{f,h\}$$

parce que c'est une dérivation en g (et en f) pour le produit usuel (commutatif) de $\mathrm{gr}\,\mathcal{A} \simeq gr\widehat{\mathcal{O}}$, et satisfait à l'identité de Jacobi :

$$\{f\{g,h\}\} = \{\{f,g\}h\} + \{g\{f,h\}\}$$

parce que le crochet $[a,b] = ab - ba$ de l'algèbre associative $\mathcal{A}$ est un crochet de Lie. $\{\,\}$ est homogène de degré -1 par rapport aux homothéties, comme B_{-1}.

i.e. c'est un opérateur bidifférentiel alterné d'ordre 1 (parce que le terme dominant $B_0(f,g) = fg$ est le produit usuel) qui vérifie l'identité de Jacobi

$$\{f\{gh\}\} = \{\{fg\}h\} + \{g\{fh\}\}$$

parce que le crochet $[ab]$ de l'algèbre associative $\mathcal{A}$ est un crochet de Lie.

L'existence d'un star-produit associé au crochet de Poisson d'un cône symplectique réel Σ a été prouvée par V. Guillemin et moi-même dans [6] (voir aussi [5]); dans le cas semiclassique-symplectique, elle a été prouvée par M. De Wilde and P. Lecomte [10, 11]. Dans [19] M. Kontsevitch montre que tout crochet de Poisson homogène provient d'un star-produit; sa preuve, pour le cas semi-classique, se généralise sans changer un mot au cadre conique décrit ci-dessus); plus précisément sa preuve montre que les classes d'équivalence (isomorphes) de star produits sont en correspondance biunivoque avec les classes d'équivalence de crochets de Poisson formels :

$$c = \sum_{k \leq -1} c_k.$$

La formule de M. Kontsevitch qui fabrique un star produit à partir d'un crochet de Poisson formel sur un espace affine marche aussi sans aucun changement dans le cas où Σ est un cône complexe affine (par exemple $\Sigma = \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^\times$). Comme signalé plus haut l'argument de passage du local au global ne marche plus (même s'il fournit encore, comme gerbes, des catégories de faisceaux de modules à équivalence près). Même dans le cas apparemment plus simple où Σ est symplectique, on ne sait pas en général s'il existe un star-produit associé. Dans ce premier essai de classification complexe, je me suis limité au cas (qui reste de toute façon le plus utile) où le cône Σ est le fibré cotangent d'une variété complexe

3 Star-algèbres sur un fibré cotangent

3.1 $\mathcal{E}$-algèbres

Soit X une variété complexe, et $\Sigma = T^*X - \{0\}$ le fibré cotangent (privé de la section nulle), muni de sa structure symplectique canonique. La base est $B\Sigma = \Sigma/\mathbf{C}^\times = PX$, le fibré projectif associé à T^*X. Σ porte une star-algèbre canonique : l'algèbre $\mathcal{E}$ des opérateurs pseudo-différentiels, microlocalisation de l'algèbre des opérateurs différentiels de X.

Si on choisit des coordonnées locales $x = (x_1, \ldots, x_n)$ sur X et les coordonnées duales $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ sur le fibres, un opérateur a un symbole total $a(x,\xi)$ et le produit est donné par la règle de Leibnitz : $f, g \in \widehat{\mathcal{O}}$:

$$f * g = \sum \frac{1}{\alpha!}\, \partial_\xi^\alpha f\ \partial_x^\alpha g. \tag{1}$$

Le cocycle de recollement est celui qui est défini par les changements de coordonnées (c'est un cocycle parce qu'il recolle effectivement les symboles totaux (polynomiaux) des opérateurs différentiels pour donner le faisceau $\mathcal{D}_X$ des opérateurs différentiels).

Nous dirons que $\mathcal{A}$ est une $\mathcal{E}$-algèbre si c'est une star-algèbre sur $\Sigma = T^*X - \{0\}$ associée au crochet de Poisson canonique. Il est élémentaire et connu qu'une $\mathcal{E}$-algèbre est localement isomorphe à $\mathcal{E}$, via $\widehat{\mathcal{D}}^{\times}_{-}$; plus précisément si U est isomorphe à un sous-cône de $T^*\mathbf{C}^n$ dont la base est contractile et de Stein (par exemple l'ensemble $\{\xi_i \neq 0\} \subset T^*B$, où B est une boule de $\mathbf{C}^n$), toute $\mathcal{E}$-algèbre sur U est isomorphe à $\mathcal{E}$, et toute section de $\widehat{\mathcal{O}}(m)$ est le symbole d'une section de $\mathcal{A}_m$.

Par suite on obtient les $\mathcal{E}$-algèbres en recollant des modèles de $\mathcal{E}$ sur un recouvrement de $B\Sigma$ au moyen d'automorphismes $\mathcal{E}$ sur les intersections :

Proposition 1 *Une $\mathcal{E}$-algèbre sur $\Sigma = T^*X - \{0\}$ est localement isomorphe à $\mathcal{E}$. L'ensemble $\mathrm{Alg}_{\mathcal{E}}$ des classes isomorphes de telles algèbres est canoniquement isomorphe à $H^1(PX, \mathrm{Aut}\,\mathcal{E})$.*

on a noté $\mathrm{Aut}\,\mathcal{E}$ le faisceau des automorphismes de $\mathcal{E}$; $H^1(PX, \mathrm{Aut}\,\mathcal{E})$ désigne la cohomologie non commutative de PX à coefficients dans $\mathrm{Aut}\,\mathcal{E}$ (ce n'est pas un groupe) : ses éléments sont les classes de cocycles ($a_{ij} \in \Gamma(X_{ij}, \mathrm{Aut}\,\mathcal{E})$ pour des recouvrements assez fins $X = \bigcup X_i$ ($X_{ij} = X_i \cap X_j$), $a_{ik} = a_{ij}a_{jk}$, deux cocycles a, a' étant équivalents s'il existe un raffinement des recouvrements donnés dans lequel on ait $a'_{ij} = b_i a_{ij} b_j^{-1}$ pour une famille $b_i \in \Gamma(X_i, \mathrm{Aut}\,\mathcal{E})$ convenable.

3.2 $\mathcal{D}$-algèbres

Soit X une variété complexe, $\mathcal{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels. Localement un automorphisme de $\mathcal{D}$ qui préservent les symboles est un automorphisme intérieur $P \to fPf^{-1}$ où f est une fonction holomorphe; on a $\mathrm{Int}\, e^f = \mathrm{Id}$ ssi f est constante, de sorte que le faisceau d'automorphismes de $\mathcal{D}$ est

$$\mathrm{Aut}\ \mathcal{D}_X \simeq \mathcal{O}_X^{\times}/\mathbf{C}^{\times} \simeq \mathcal{O}_X/\mathbf{C}. \tag{2}$$

Nous appellerons $\mathcal{D}$-algèbre un faisceau d'algèbres sur X localement isomorphe à $\mathcal{D}_X$; l'ensemble $\mathrm{Alg}_{\mathcal{D}}$ de ces algèbres est canoniquement isomorphe à $H^1(X, \mathcal{O}_X/\mathbf{C})$.

Une $\mathcal{D}$-algèbre définit bien sûr une star-algèbre sur PX, et il est naturel de comparer les ensembles $\mathrm{Alg}_{\mathcal{D}}$ et $\mathrm{Alg}_{\mathcal{E}}$.

3.3 Symbole des Automorphismes

Pour comprendre comment les $\mathcal{E}$-algèbres se recollent pour former des objets globaux, nous devons d'abord voir comment sont fait les automorphismes de $\mathcal{E}$.

Soit U un automorphisme de $\mathcal{E}$: U préservent les symboles et l'unité 1, ($U \in \widehat{\mathcal{D}}_{-}^{\times}$). Alors le logarithme $D = \operatorname{Log} U$ est bien défini ; c'est une dérivation de degré ≤ -1 de $\mathcal{E}$.

Si D est une dérivation homogène de degré $\leq k$ le symbole $\delta = \sigma_k(D)$ est une dérivation homogène de degré k de l'algèbre de Poisson $gr\mathcal{E} = gr\widehat{\mathcal{O}}$, autrement dit c'est un champ de vecteurs symplectique sur Σ, homogène de degré k. Il définit, via la structure symplectique de Σ, une 1-forme différentielle fermée α, homogène de degré $k+1$.

Notons ρ le champ de vecteurs radial, générateur infinitésimal de l'action de $\mathbf{C}^{\times}$ ($\rho = \sum \xi_j \partial_{\xi_j}$ si on a choisi des coordonnées locales) : la dérivation de Lie associée est $L_\rho = i_\rho d + d i_\rho$ (i_ρ est le produit intérieur), donc

$$d i_\rho\, \alpha = (k+1)\, \alpha.$$

Si $k+1 \neq 0$, α est, globalement, la dérivée de la forme homogène $(k+1)^{-1} i_\rho\, \alpha$. Si $k+1 = 0$, $s = i_\rho\, \alpha$ est localement constant, et α est, localement, la différentielle d'une fonction homogène de degré 0 ssi $s = 0$.

Par approximations successives, on voit que toute dérivation D de $\mathcal{E}$ est de la forme $s\operatorname{ad}(\operatorname{Log} P_1) + \operatorname{ad} Q$ où P_1 est elliptique de degré 1, $Q \in \mathcal{E}$, et tout automorphisme de $\mathcal{E}$ est localement de la forme

$$U = (\operatorname{Int} P_1)^s \operatorname{Int} Q_0 \tag{3}$$

où P_1 est elliptique de degré 1, Q_0 elliptique de degré 0.[4] $\operatorname{Int} P$ désigne l'automorphisme intérieur $a \to P\, a\, P^{-1}$.

Si U est un automorphisme, nous noterons $\sigma(U)$ (symbole de U) la forme différentielle fermée homogène de degré 0 correspondant comme ci-dessus au terme dominant (de degré -1) de $\operatorname{Log} U$. Si $\sigma(U) = 0$, $U - 1$ est de degré ≤ -2, et il existe alors un unique P de degré 0 et de symbole 1 tel que $U = \operatorname{Int} P$. En résumé

Proposition 2 *Il y a une suite exacte de faisceaux de groupes sur PX:*

$$0 \to \mathcal{E}_{-}^{\times} \to \operatorname{Aut} \mathcal{E} \to \omega \to 0 \tag{4}$$

où $\mathcal{E}_{-}^{\times}$ est le faisceau des sections de $\mathcal{E}$ de symbole 1 ($\mathcal{E}_{-}^{\times} = 1 + \mathcal{E}_{-1}$, et ω est le faisceau (sur PX) des 1-formes fermées, homogènes de degré 0 sur Σ.

Si $\mathcal{A} \in \operatorname{Alg}_{\mathcal{E}} \simeq H^1(PX, \operatorname{Aut} \mathcal{E})$ le symbole $\sigma(\mathcal{A}) \in H^1(PX, \omega)$ est par définition l'image du cocycle qui définit $\mathcal{A}$.

[4] elliptique = inversible.

3.4 Méthodes de calcul

Les calculs nécéssaires pour étudier les star-algèbres dans le cadre ci-dessus utilisent une mixture de cohomologie non commutative (cf. [15]) et de cohomologie holomorphe, et la relation entre cohomologie et filtration. Il n'y a pas d'idée fondamentalement nouvelle - mais ça peut être un peu embrouillant. Je ne donne ici qu'un aperçu succinct, et renvoie à [2] pour les détails.

Si $0 \to A \to B \to C \to 0$ est une suite exacte de faisceaux de groupes sur un espace Y (A normal dans B), il y a une suite "exacte" de cohomologie :

$$\begin{aligned} &0 \to H^0(Y, A) \to H^0(Y, B) \to H^0(Y, C) \to \\ &\to H^1(Y, A) \to H^1(Y, B) \to H^1(Y, C). \end{aligned} \tag{5}$$

c'est exact au sens suivant :

(i) les H^0 sont des groupes et la suite est exacte aux 3 premières places.

(ii) Les H^1 sont des ensembles pointés. Le groupe $H^0(Y, C)$ opère sur $H^1(Y, A)$, et ses orbites sont les fibres de l'application $H^1(Y, A) \to H^1(Y, B)$. Il y a encore une relation renseignant sur les fibres de la dernière application $H^1(Y, B) \to H^1(Y, C)$: je renvoie à [15] ou [2].

On utilise cette suite avec $A = \mathcal{E}_-^\times, B = \mathrm{Aut}\,\mathcal{E}, C = \omega$; on utilise aussi les suites exactes $0 \to \mathcal{O}/\mathbf{C} \to \omega \to \mathbf{C} \to 0$, $0 \to \mathbf{C} \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}/\mathbf{C} \to 0$, qui servent à étudier ω, et qui engendrent des longues suites de cohomologie, puisqu'il s'agit de faisceaux commutatifs.

En cohomologie commutative le lien entre filtration et cohomologie est décrit au moyen d'une suite spectrale, dont il ne reste que des bribes dans le cas non commutatif. Retenons cependant : si $H^1(X, gr\mathrm{Aut}\,\mathcal{E}) = 0$ alors $H^1(X, \mathrm{Aut}\,\mathcal{E}) = 0$; de même $H^1(X, \mathcal{E}_-^\times) = 0)$ si $H^1(X, gr\mathcal{E}_-^\times) = 0$; si $H^2(X, \mathcal{E}_-^\times) = 0$ (i.e. $H^2(X, \mathcal{O}(m) = 0$ pour $m < 0)$ alors l'application symbole : $H^1(X, \mathrm{Aut}\,\mathcal{E}) \to H^1(X, \omega)$ est surjective.

4 Le Cas $\dim X \geq 2$

Nous commençons par les remarques suivantes (certaines serviront aussi au n^{o}5).

Si $n \geq 2$, les fonctions homogènes de degré $m \in \mathbf{Z}$ sur $\mathbf{C}^n - \{0\}$ sont polynomiales, en particulier elles sont nulles si $m < 0$ et constantes si $m = 0$, et par suite une $\mathcal{E}$-algèbre $\mathcal{A}$ n'a pas de section globale de degré ¡0, ni d'automorphisme non trivial de symbole nul : $H^0(PX, \mathcal{E}_-^\times) = 0$. Plus précisément :

Lemme 1 *Si $\mathcal{A}$ est une $\mathcal{E}$-algèbre X et $n = \dim X \geq 2$ l'application symbole*

$$H^0(PX, \mathrm{Aut}\,\mathcal{A}) \to H^0(PX, \omega) \simeq H^0(X, \mathcal{O}_X/\mathbf{C}).$$

est injective ; elle est bijective si $\mathcal{A} = \mathcal{E}$.

Plus généralement si $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ sont deux $\mathcal{E}$-algèbres et u, v deux isomorphismes $\mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ il y a un symbole différence $\sigma(u^{-1}v) \in H^0(PX, \omega)$ bien défini qui détermine v en fonction de u.

Notons que si $dim X \geq 2$ une section globale de ω est localement (sur X) de la forme $\alpha = \sum f_i dx_i + g_i d\xi_i$ où les g_i sont homogènes de degré -1 donc nulles, et les f_i sont homogènes de degré 0 donc ne dépendent que de x. Si $\mathcal{A} = \mathcal{E}$ (plus généralement si $\mathcal{A}$ provient d'une $\mathcal{D}$-algèbre) l'application symbole est surjective.

Soit X une boule de $\mathbf{C}^n$ ou plus généralement un domaine Stein et contractile. On vérifie aisément qu'on a $H^1(PX, \omega) = 0$, donc l'application canonique $H^1(PX, \mathcal{E}_-^\times) \to H^1(PX, \mathrm{Aut}\, \mathcal{E})$ est surjective, autrement dit toute $\mathcal{E}$-algèbre peut être définie au moyen d'un cocycle à coefficients dans $\mathcal{E}_-^\times$.

Soient alors $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ deux algèbres définies par des cocycles $(a_{ij}), (a'_{ij}) \in \mathcal{E}_-^\times$ et soit $u : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ un isomorphisme, i.e. une famille $(u_i) \in \mathrm{Aut}\, \mathcal{E}$ telle que $u_i a'_{ij} = a_{ij} u_j$. Alors les symboles $\sigma(u_i)$ se recollent ($\sigma(a_{ij}) = \sigma(a'_{ij}) = 0$ et définissent un symbole global $\sigma_a a'(u)$ (qui ne dépend que de u et des cocycles $a, a' \in H^1(PX, \mathcal{E}_-^\times)$). Si $X \subset \mathbf{C}^n, n \geq 2$, est un domaine de Stein contractile, l'exposant $\sigma_{aa'}(u)$ est nul : $\sigma_{aa'}(u) \in H^0(X, \mathcal{O}/\mathbf{C})$ et comme ci-dessus $\sigma_{aa(}(u)$ détermine complètement u.

Soit $\mathcal{A} \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{E}}$. Il existe un recouvrement $X = \bigcup X_i$ où toutes les intersections finies sont isomorphes à des ouverts contractiles de $\mathbf{C}^n$. Alors $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{|X_i}$ peut être défini par un cocycle $(a_{\alpha\beta})$ à coefficients dans $\mathcal{E}_-^\times$; les isomorphismes de recollement u_{ij} des $\mathcal{A}_i$ sont alors tous complètement déterminés par leurs symboles, qui proviennent de sections de $\mathcal{O}_{X_i}/\mathbf{C}$ (ils sont d'exposant nul).

Proposition 3 *Si* $\dim X \geq 2$ *toute* $\mathcal{E}$ *algèbre* $\mathcal{A}$ *est d'exposant* 0 *(l'image de* $\sigma(\mathcal{A}) \in H^1(PX, \omega)$ *dans* $H^1(PX, \mathbf{C})$ *par l'application exposant est nulle). Autrement dit* $\mathcal{A}$ *peut toujours être définie par un cocycle d'exposant* 0 *: elle est dans l'image de* $H^1(PX, \mathrm{Int}\, \mathcal{E}_0)$ $(\mathrm{Int}\, \mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0^\times / \mathbf{C}^\times)$.

4.1 Le Cas $\dim X \geq 3$

Si X est une boule de dimension ≥ 3 (plus généralement un domaine de Stein de dimension ≥ 3), on a $H^1(PX, \mathrm{gr}\, \mathcal{E}_-^\times) = 0$ (parce que $H^1(PX, \mathcal{O}(-k)) = 0$ pour tout k). Par suite on a $H^1(PX, \mathcal{E}_-^\times) = 0$, et plus généralement $H^1(PX, \mathcal{A}_-^\times) = 0$ pour toute $\mathcal{E}$-algèbre $\mathcal{A}$.

Ainsi une $\mathcal{E}$-algèbre $\mathcal{A}$, s'obtient en recollant des modèles de $\mathcal{E}$ au dessus d'un recouvrement X_i de X, au moyen d'un cocycle $(a_{ij}) \in H^1(X, \mathcal{O}_X/\mathbf{C})$, et provient donc d'une $\mathcal{D}$-algèbre. En outre il est clair que tout isomorphisme de telles algèbres provient localement de sections de $\mathcal{O}_X/\mathbf{C}$ i.e. est un isomorphisme de $\mathcal{D}$-algèbre :

Théorème 1 *Si* $\dim X \geq 3$ *le foncteur qui à une* $\mathcal{D}$*-algèbre associe la* $\mathcal{E}$*-algèbre correspondante est une équivalence de catégories.*

Ce résultat est à rapprocher de celui de [9] sur les $\mathcal{E}$-modules microlocalement libres de rang 1 en dimension ≥ 3.

4.2 Le Cas $\dim X = 2$

Si $\dim X = 2$ les remarques ci-dessus sont toujours vraies.

Ainsi un isomorphisme est complétement déterminé par son symbole, le foncteur qui à une $\mathcal{D}$-algèbre associe la $\mathcal{E}$-algèbre correspondante est une équivalence sur une sous-catégorie pleine. Mais par exemple sur la boule il y a beaucoup d'autres $\mathcal{E}$-algèbres :

Exemple 1. Soit X la boule unité de $\mathbf{C}^2$ (ou plus généralement une 2-variété contractile de Stein).

On a $H^1(X,\omega) = H^1(X,\mathcal{O}/\mathbf{C}) = 0$, d'où il résulte que $H^1(PX, \operatorname{Aut}\mathcal{E})$ est le quotient de $H^1(PX, \mathcal{E}_-^\times)$ par l'action naturelle du groupe $H^0(X, \operatorname{Aut}\mathcal{E}) = H^0(X, \mathcal{O}/\mathbf{C})$.

Or PX est la réunion des deux sous cônes de Stein $U_i = \{\xi_i \neq 0\}$ $(i = 1, 2)$ de sorte qu'un cocycle est représenté par une seule section $a = a_{12} \in \mathcal{E}_-^\times(U_1 \cap U_2)$. Il y a alors un représentant normalisé unique :

$$a_{12} = \sum_{p,q<0} a_{pq}(x)\xi_1^p \xi_2^q \tag{6}$$

("sans terme holomorphe en ξ_1 ou ξ_2", comme pour la cohomologie additive). Ainsi $H^1(PX, \operatorname{Aut}\mathcal{E})$ est l'ensemble des classes conjuguées de symboles normalisés a_{12} ($a_{12} \sim \varphi(x)a_{12}\varphi(x)^{-1}$ pour φ fonction inversible sur X). Cet ensemble est gros ; mais de telles algèbres ont tendance à avoir peu d'automorphismes.

L'analyse de ces algèbres est liée à celle des $\mathcal{E}$-modules microlocalement libres de rang 1 en dimension 2, faite par M. Carette [8].

Sur une variété compacte globale, il peut y avoir des simplifications.

Exemple 2. Soit $X = P_2(\mathbf{C})$ le plan projectif complexe : alors PX est isomorphe à la variété d'incidence $\{x \cdot \xi = 0\} \subset X \times X^*$ (X^* désigne l'espace projectif dual). Le faisceau des fonctions homogènes de degré 1 on T^*X est la restriction de $\mathcal{O}_X(1) \otimes \mathcal{O}_{X^*}(1)$ (exceptionnellement ici $\mathcal{O}_X(1)$ désigne le faisceau canonique sur l'espace projectif). On en déduit aisément $H^1(PX, \operatorname{gr}\mathcal{E}_-^\times) = 0$ donc $H^1(PX, \mathcal{E}_-^\times) = 0$, et plus généralement $H^1(PX, \mathcal{A}_-^\times) = 0$ pour toute $\mathcal{E}$-algèbre $\mathcal{A}$.

L'application symbole : $H^1(X, \operatorname{Aut}\mathcal{E}) \to H^1(X,\omega) = H^1(X, \mathcal{O}/\mathbf{C})$ est bijective, et de nouveau dans ce cas la correspondance $\mathcal{D}$-algèbres $\to$ $\mathcal{E}$-algèbres est une équivalence. Ici on a $H^1(PX, \mathcal{O}/\mathbf{C}) = H^{20} + H^{11} = H^{11} = \mathbf{C}$ [5], de sorte que les $\mathcal{E}$-algèbres $\sim$ $\mathcal{D}$-algèbres sont paramétrées par $H^{11} = \mathbf{C}$.

Comme la classification des variétés de dimension 2 est difficile et loin d'être connue, j'arrêté ici les exemples en dimension 2. On trouvera dans [2] le cas d'un tore $\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^4$, qui est aussi instructif.

5 $\mathcal{E}$-algèbres sur une Courbe $(\dim X = 1)$

Dans ce numéro nous étudions les $\mathcal{E}$-algèbres, et les comparons aux $\mathcal{D}$-algèbres, lorsque X est une courbe ($\dim X = 1$). On a alors $PX = X$. La méthode générale est la même, mais comme nous verrons les classifications diffèrent de façon frappante selon que la courbe X est ouverte, ou fermée de genre $g = 0, 1$ ou ≥ 2.

5.1 Courbes ouvertes et Courbes de genre $g \geq 2$

Si X est ouverte, son fibré tangent a une section et $H^2(X, \mathbf{C}) = 0$. On a aussi $H^1(X, \mathcal{E}_-^\times) = 0$ (parce que $PX = X$ est de Stein, donc $H^1(X, \mathcal{O}(n)) = 0$ pour tout n). Par suite l'application symbole : $H^1(X, \operatorname{Aut}\mathcal{E}) \to H^1(X, \omega) \simeq H^1(X, \mathbf{C})$ est un isomorphisme.

Finalement on a

$$H^1(X; \operatorname{Aut}\mathcal{E}) \simeq H^1(W, \omega) \simeq H^1(X, \mathbf{C}). \tag{7}$$

Par exemple si s_{ij} est un cocycle à coefficients dans $\mathbf{C}$, l'algèbre correspondante est définie par le cocycle $\operatorname{Int}\xi^{s_{ij}}$, où ξ est un champ de vecteurs sans zéro sur X.

Ces algèbres ont beaucoup de sections de degré négatif, et beaucoup d'automorphismes (l'application $H^0(X, \operatorname{gr}\mathcal{E}) \to \operatorname{gr} H^0(X, \mathcal{A})$ est bijective et la suite $0 \to H^0(X, \mathcal{A}_-^\times) \to H^0(X, \operatorname{Aut} A) \to H^0(X, \omega) \to 0$ est exacte).

Les $\mathcal{D}$-algèbres, classifiées par $H^1(X, \mathcal{O}/\mathbf{C}) = 0$ donnent des $\mathcal{E}$-algèbres isomorphes.[6]

De façon analogue, si X est de genre ≥ 2, on a $H^1(X, \mathcal{O}(n)) = 0$ pour tout $n < 0$, car $\mathcal{O}(-1)$ s'identifie au faisceau des sections de $(TX)^{-1} = T^*X$ qui est ample. Par suite $H^1(X, \operatorname{gr}\mathcal{E}_-^\times) = 0$ et $H^1(X, \mathcal{A}_-^\times) = 0$ pour toute $\mathcal{E}$-algèbre $\mathcal{A}$: l'application canonique $\operatorname{gr} H^0(X, \operatorname{Aut}\mathcal{A}) \to H^0(X, \operatorname{gr}\operatorname{Aut}\mathcal{E})$ est bijective (elle est surjective car sur toute courbe on a $H^2(X, \operatorname{gr}\mathcal{E}_-^\times) = 0$).

---

[5] avec les notations de la géométrie Kählerienne : H^{pq} est l'espace des formes harmoniques de type p, q

[6] il y a probablement un lien entre l'existence de telles algèbres d'exposant non trivial, et le fait qu'il existe des $\mathcal{D}$-modules cohérents sans bonne filtration.

Ici l'application "de Chern" : $H^1(X, \mathcal{O}/\mathbf{C}) \to H^2(X, \mathbf{C})$ est bijective, ainsi que l'application "exposant" : $H^0(X, C) \to H^1(X, \mathcal{O}/\mathbf{C})$. Donc aussi l'application $H^1(X, \mathcal{E}) \to H^1(X, \omega) = H^1(X, \mathcal{O}/\mathbf{C})$:

Proposition 4 *Si X est une courbe fermée de genre $g > 1$, les $\mathcal{E}$-algèbres sur X sont classifiées par leur exposant $\sigma(\mathcal{A}) \in H^1(X, \mathbf{C}) = \mathbf{C}^{2g}$. Les $\mathcal{D}$-algèbres sont classifiées $H^1(X, \mathcal{O}/\mathbf{C}) = H^1(X, \mathbf{C}) = \mathbf{C}$ et produisent toutes des $\mathcal{E}$-algèbres isomorphes.*

Ici aussi les $\mathcal{E}$-algèbres ont beaucoup de sections de degré négatif, et beaucoup d'automorphismes.

5.2 Courbes de genre 1

Les courbes de genre 1 présentent les cas les plus compliqués et les plus variés, et je renvoie à [2] pour les détails.

Voici en résumé ce qu'on observe: on a $X \simeq \mathbf{C}/\Gamma$ où $\Gamma \simeq \mathbf{Z}^2$ est un sous-groupe discrèt. Il y a un champ de vecteurs ξ sans zéro, correspondant à $\frac{\partial}{\partial z}$. L'ensemble des sections globales de $\mathcal{E}$ est $\mathbf{C}((\xi^{-1}))$. Le groupe, noté $\mathcal{G}$, des automorphismes de $\mathcal{E}$ qui commutent à ξ est l'ensemble des $\mathrm{Int}\, \xi^s \mathrm{Int}\, (1 + \sum a_k \xi^{-k})$. $H^0(X, \mathrm{Aut}\, \mathcal{E})$ lui-même est produit semi-direct de $\mathcal{G}$ et du groupe $\mathrm{Aut}\, \mathcal{D} \simeq \mathcal{O}/\mathbf{C}$ dont les éléments sont les $\mathrm{Int}\, e^{az}$.

Le faisceau ω est scindé, et on a :

$$H^0(X, \omega) = H^0(X, \mathcal{O}/\mathbf{C}) + H^0(X, \mathbf{C}) = H^{10} + H^{00} \simeq \mathbf{C}^2$$

$$H^1(X, \omega) = H^1(X, \mathcal{O}/\mathbf{C}) + H^1(X, \mathbf{C}) = H^{11} + (H^{10} + H^{01}) = \mathbf{C}^3.$$

Proposition 5 *Si X est de genre 1, l'application symbole $\mathrm{Alg}_{\mathcal{E}} \to H^1(X, \omega)$ est surjective. Notons*

$$\sigma(\mathcal{A}) = \alpha = (\alpha^{11}, \alpha^{10}, a^{01}) \in H^{11} \times H^{10} \times H^{01}$$

le symbole d'une $\mathcal{E}$-algèbre $\mathcal{A}$. Alors

(i) les algèbres telles que $\alpha^{11} = 0$ sont caractérisée par le fait qu'elles ont une section globale de degré $\neq 0$, ou un automorphisme de symbole $\frac{d\xi}{\xi} = \sigma(\mathrm{Int}\, \xi)$.

Pour une telle algèbre l'ensemble des sections globales est $\mathbf{C}((\xi^{-1}))$ et le groupe d'automorphisme est $\mathcal{G}$, sauf si $\mathcal{A} = \mathcal{E}$ ($\mathcal{E}$ se distingue par le fait qu'il a en plus un automorphisme de symbole $\sigma(\mathrm{Int}\, e^x)$).

Dans ce cas il y a beaucoup d'algèbres non isomorphes ayant un symbole donné.

(ii) Si $\alpha^{11} \neq 0$, $\mathcal{A}$ n'a pas de section de degré $\neq 0$ ($H^0(X, \mathcal{A}) = \mathbf{C}$), et $\mathcal{A}$ est complètement déterminée par son symbole (autrement dit l'image de $H^1(X, \mathcal{A})$ dans $H^1(X, \mathrm{Aut}\, \mathcal{A})$ est réduite à un point).

Pour une telle algèbre le groupe d'automorphismes est un groupe à un paramètre, de symbole $\mathbf{C}(a\,dx + b\frac{d\xi}{\xi})$ pour $(a, b) \neq 0$ convenables, sauf dans le cas $\alpha^{01} = 0, \alpha^{11}, \alpha^{10} \neq 0$ où il n'y a pas d'automorphisme non trivial du tout.

(iii) Les $\mathcal{E}$-algèbres non triviales qui proviennent d'une $\mathcal{D}$-algèbre sont celles telles que $\sigma(\mathcal{A}) = \alpha^{11} \in H^{11} \neq 0$ $(\alpha^{10} = \alpha^{01} = 0)$. Elles sont caractérisées par le fait qu'elles ont un automorphisme de symbole $\sigma(\mathrm{Int}\ e^z)$.

Ainsi sur un tore X de genre 1, deux $\mathcal{D}$-algèbres qui définissent des $\mathcal{E}$-algèbres isomorphes sont déja isomorphes comme $\mathcal{D}$-algèbres, et, sauf dans le cas des l'algèbres canoniques $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}$, les $\mathcal{E}$-automorphismes et les $\mathcal{D}$-automorphismes sont les mêmes.

5.3 La Droite Projective

Soit X la droite projective ($X = P_1(\mathbf{C})$). X est réunion des deux ouverts $X_0 = \{z \neq \infty\}, X_\infty = \{z \neq 0\}$, qui sont de Stein, contractiles (isomorphes à $\mathbf{C}$). Donc les $\mathcal{E}$ resp. $\mathcal{D}$-algèbres sont classifiées par des cocycles réduits à une seule fonction sur $X_0 \cap X_\infty$.

$\mathcal{D}$-algèbres sont classifiées par $H^1(X, \mathcal{O}/\mathbf{C}) = H^2(X, \mathbf{C}) = \mathbf{C}$. On note $\mathcal{D}_s$ $(s \in \mathbf{C} = H^1(X, \mathcal{O}/\mathbf{C}))$ la $\mathcal{D}$-algèbre définie par le cocycle $(\mathrm{Int}\ z)^s$.

En coordonnées homogènes x, y $(z = \frac{x}{y})$ on dispose du faisceau des opérateurs différentiels homogènes $\mathcal{D}^{hom}$, i.e. qui commutent avec le générateur des homothéties $\rho = x\partial_x + y\partial_y$; cette algèbre est engendrée par ρ et les opérateurs

$$e = x\partial_y, \quad h = x\partial_x - y\partial_y, \quad f = y\partial_x \tag{8}$$

qui vérifient les relations

$$[h, e] = 2e, \quad [h; f] = -2f, \quad [e, f] = h, \quad h^2 + 2(ef + fe) = \rho(\rho + 2). \tag{9}$$

$\mathcal{D}_s$ est isomorphe au quotient $\mathcal{D}^{hom}/(\rho + s)$ (on peut y penser comme au faisceau des opérateurs différentiels sur le faisceau virtuel $\mathcal{O}(s)$ sur X des fonctions homogènes de degré s de x, y (qui n'existe que si s est entier).

Examinons les $\mathcal{E}$-algèbres sur $X = P_1(\mathbf{C})$.

Lemme 2 *Si $X = P_1$ est la droite projective*
(i) $H^0(X, \mathrm{gr\,Aut}\,\mathcal{E}) = 0$ donc $H^0(X, \mathrm{Aut}\,\mathcal{A}) = 0$ pour toute $\mathcal{E}$-algèbre $\mathcal{A}$.
(ii) $H^1(X, \omega) = 0$ et $H^1(X, \mathcal{E}_-^\times) \to H^1(X, \mathrm{Aut}\,\mathcal{E})$ est bijective.

Preuve : En coordonnées homogènes, $\mathcal{O}(n)$ est le faisceau des fonctions homogènes de degré $2n$ de x, y; il n'a pas de section globale si $n < 0$, d'où $H^0(X, \mathrm{gr}\,\mathcal{E}_-^\times) = H^0(X, \mathcal{E}_-^\times) = 0$.

Dans la longue suite exacte de cohomologie

$$H^0(X, \mathcal{O}/\mathbf{C}) \to H^0(X, \omega) \to H^0(X, \mathbf{C}) \to H^1(X(\mathcal{O}/\mathbf{C}) \to$$

$$H^1(X, \omega) \to H^1(C, \mathbf{C}) \to \dots$$

on a $H^0(X, \mathcal{O}/\mathbf{C}) = 0$ car X ne porte pas de 1-forme holomorphe fermée non nulle ; l'application exposant $H^0(X, \mathbf{C}) \to H^1(X, \mathcal{O}/\mathbf{C})$ est bijective parce que la classe de Chern de $\mathcal{O}(1)$ est $\neq 0$. On a $H^1(X, \mathbf{C}) = 0$ puisque X est simplement connexe. D'où $H^0(X, \omega) = H^1(X, \omega) = 0$.

Remarquons qu'un $q \in H^1(X, \operatorname{Aut} \mathcal{E})$ a un unique représentant "normalisé" :

$$q_{0\infty} = \sum_{0>p>2q} a_{pq} z^p \zeta^q \in \widehat{\mathcal{O}}(X_0 \cap X_\infty). \tag{10}$$

Ceci vient du fait que les deux champs de vecteurs $\partial_0 = \partial_z, \partial_\infty = \partial_{1/z}$ sont globalement holomorphes, elliptiques sur X_0 (resp. X_∞), et ont pour symbole ζ, resp. $-z^2\zeta$. Aussi, comme pour $H^1(X, \operatorname{gr} \mathcal{E}_-^\times)$, tout cocycle peut être réduit, de façon unique à la forme ci-dessus.

Pour comparer les $\mathcal{D}$-algèbres et les $\mathcal{E}$-algèbres il est commode d'utiliser la suite exacte intermédiaire suivante : soit $\operatorname{Int} \mathcal{E}_0 \simeq \mathcal{E}_0^\times / \mathbf{C}^\times$ le groupe des automorphismes intérieurs de $\mathcal{E}_0$; on a une suite exacte :

$$0 \to \operatorname{Int} \mathcal{E}_0 \to \operatorname{Aut} \mathcal{E} \to \mathbf{C} \to 0$$

d'où une surjection

$$H^1(X, \operatorname{Int} \mathcal{E}_0) \to H^1(X : \operatorname{Aut} \mathcal{E}) \tag{11}$$

dont les fibres sont les orbites de $\mathbf{C} = H^0(X, \mathbf{C})$ sur $H^1(X, \operatorname{Int} \mathcal{E})$ $(q_{0\infty} \to (\operatorname{Int} \partial_0)^s q_{0\infty} (\operatorname{Int} \partial_\infty)^{-s})$.

Lemme 3 *On a l'identité suivante :*

$$(\operatorname{Int} z)^{-s-2} = (\operatorname{Int} \partial_0)^{s+1} (\operatorname{Int} z)^s (\operatorname{Int} \partial_\infty)^{-s-1}. \tag{12}$$

Preuve : Si $s = k$ est entier positif, on a

$$z^{-k-2}(z^2\partial)^{k+1} = \partial^{k+1} z^k.$$

En effet les deux membres de cette égalité sont des opérateurs différentiels ordinaires d'ordre $k+1$, de terme dominant $z^s \partial^{s+1}$, qui tuent tous les monômes $z^{-j}, 0 \geq j \geq -k$.

Le cas général en résulte, car l'identité (12) est polynomiale en s mod. $\mathcal{E}_m$ pour tout $m < 0$.

On voit donc que $\mathcal{D}_s$ resp. $\mathcal{D}_{-s-2}$ définissent des $\mathcal{E}$-algèbres $\mathcal{E}_s, \mathcal{E}_{-s-2}$ isomorphes, bien qu'elles ne soient pas isomorphes comme $\mathcal{D}$-algèbres. Ceci est le seul cas où deux $\mathcal{D}$-algèbres non isomorphes sur $X = P_1$ donnent des $\mathcal{E}$-algèbres isomorphes : en effet l'algèbre des sections globales d'une $\mathcal{E}$-algèbre en est un invariant évident. Les sections globales e, h, f (avec les notations ci-dessus) aussi, si elles exitent car elles sont bien déterminées à une constante près par leurs symboles, et les relations de commutation fixent complètement ces constantes. La relation $h^2 + 2(ef + fe) = s(s+2)$ montre alors que, comme il se doit, le nombre $s(s+2)$ est un invariant de la $\mathcal{E}$-algèbre.

En dernière remarque, examinons le problème suivant : existe-t-il un symbole total, i.e. le faisceau sous-jacent à une $\mathcal{E}$-algèbre est-il isomorphe à $\widehat{\mathcal{O}}$? Ceci est toujours vrai pour une $\mathcal{E}$-algèbre rélle, pour laquelle on peut recoller des symboles totaux locaux grâce à une partition de l'unité.

Dans le cas de $X = P_1(\mathbf{C})$: $T^*X - \{0\}$ a un revêtement à deux feuillets canonique par $\mathbf{C}^2 - \{0\}$: $(u, v) \to (z = u/v, \zeta = \frac{1}{2}v^2)$. Si $\mathcal{A}$ est une $\mathcal{E}$-algèbre sur $\Sigma = T^*X$ elle se relève à $\Sigma' = \mathbf{C}^2 - \{0\}$ en une star-algèbre associée au crochet de Poisson canonique ($\{v, u\} = 1$), équivariante au-dessus de l'involution $(u, v) \to (-u, -v)$; noter que Σ', u and v sont de degré $\frac{1}{2}$). Si $\mathcal{A}$ a un calcul symbolique global, le relèvement définit un star-produit sur $\widehat{\mathcal{O}}(\Sigma')$.

Or sur $\widehat{\mathcal{O}}(\Sigma')$ il n'y a, à isomorphisme près qu'une seul star-algèbre associée au crochet de Poisson canonique : elle est engendrée par u, v soumis à la relation $[v, u] = 1$. À isomorphisme près elle est définie par la représentation $u \to u, v \to \partial_u$. Pour cette loi il y a beaucoup de sections globales (tous les polynômes de u, v) ; les sections globales e, h, f sont nécéssairement données par

$$e = -\frac{1}{2}u^2, \quad h = 2u * v + \frac{1}{2}, \quad f = \frac{1}{2}v^2 \tag{13}$$

(parce que les symboles respectifs sont

$$\sigma(e) = -z^2\zeta = -(\frac{u}{v})^2(\frac{1}{2}v^2), \quad \sigma(h) = 2z\zeta = 2(\frac{u}{v})(\frac{1}{2}v^2, \quad \sigma(f) = \zeta = \frac{1}{2}v^2$$

et que comme signalé plus haut ils déterminent e, h, f à des constantes additive près, que les relations de commutation achèvent de déterminer).

Ceci étant on obtient

$$h^2 + 2(ef + fe) = -\frac{3}{4} \qquad (s = -\frac{1}{2}. \quad \text{or} \quad s = -\frac{3}{2}) \tag{14}$$

Ainsi les seules $\mathcal{D}$-algèbres qui possèdent un symbole total sont $\mathcal{D}_{-1/2}$ et $\mathcal{D}_{-3/2}$. En particulier il n'y a pas de symbole total sur $\mathcal{E}$ ou sur $\mathcal{D}$.

References

[1] Bayen F., Flato M., Fronsdal C., Lichnerowicz A., Sternheimer D. - Deformation theory and quantization I, II, *Ann. Phys 111 (1977), 61-131.*

[2] Boutet de Monvel L.- Complex Star Products, *à paraître dans Math Phys. Analysis and Geometry n°2, 1999.*

[3] Boutet de Monvel L.- On the index of Toeplitz operators of several complex variables, *Inventiones Math. 50 (1979) 249-272.*

[4] Boutet de Monvel L.- Star Products on Conic Poisson Manifolds of constant rank, *Mat. Fiz. Anal. Geom. (Kharkov), t.2, n°2 1-9 (1995).*

[5] Boutet de Monvel L. - Symplectic cones and Toeplitz operators. Actes du congrès en l'honneur de Trèves, Sao Carlos, *Contemporary Math., vol. 205 (1997) 15-24.*

[6] Boutet de Monvel L. - Guillemin V. - The Spectral Theory of Toeplitz Operators, *Ann. de Math Studies n°99, Princeton University Press, 1981.*

[7] Boutet de Monvel L. - Krée K. - Pseudodifferential operators and Gevrey classes, *Ann. Inst. Fourier 17 (1967), 295-323.*

[8] Carette M. - Exotic $\mathcal{D}$-modules in dimension 2, *(thèse Paris VI, en préparation)*

[9] D'Agnolo A., Schapira P. - The Radon-Penrose Correspondence II : Line Bundles and Simple $\mathcal{D}$-modules, *J. Funct. Anal. 153, n°2, 343-356 (1998).*

[10] De Wilde M., Lecomte P. - Existence of star-products and of formal deformations of Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifolds, *Lett. Math. Phys. 7 (1983), 487-496*

[11] De Wilde M., Lecomte P. - Formal deformations of the Poisson Lie algebra of a symplectic manifold and star-products. Existence, equivalence, derivations, in "Deformation Theory of algèbres and Structures and Applications", M.Hazewinkel & M. Gerstenhaber eds., *Kluwer Acad. Pub., Dordrecht (1988), 897-960.*

[12] Fedosov B.V. - A simple geometrical construction of deformation quantization, *Journal of Differential Geometry 40 (1994), no. 2, 213-238.*

[13] Gerstenhaber M. - On the deformation of rings and algèbres, *Annals of Math. 79 (1964), 59-103*

[14] Guillemin V., Sternberg S.- Geometrical asymptotics, *Amer. Math. Soc. Surveys 14, Providence RI, 1977.*

[15] Giraud J. Cohomologie non Abélienne, *Grudlehren der Math. Wiss 179, Springer Verlag, 1971.*

[16] Gutt S. - Equivalence of deformations of twisted products on a symplectic manifold, *Lett. Math. Phys. 3 (1979), 495-502.*

[17] Kashiwara M. - Quantization of Contact Manifolds, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 32 (1996), 1-7.

[18] Kawai T., Kashiwara M. - On holonomic systems of microdifferential equations III - systems with regular singularities, *publ. RIMS, Kyoto University 17 (1981) 813-979.*

[19] Kontsevitch M. - Deformation Quantization of Poisson Manifolds, *preprint, I.H.E.S.*

[20] Meyer D. - D-modules et E-modules associés à un opérateur à caractéristiques simples, *(thèse Paris VI, 1998).*

[21] Moyal J. - Quantum mechanics as a stastistical theory, *Proc. Camb. Phil. Soc. 45 (1965), 99-124.*

[22] Vey J. - Déformation du crochet de Poisson sur une variété symplectique, *Comment. Math. Helvet. 50 (1975), 421-454.*

[23] Weinstein A. - Deformation quantization, *Séminaire Bourbaki n^{o}789, 1994.*

L Boutet de Monvel
Institut de Mathématiques de Jussieu
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05 France
e-mail : boutet@math.jussieu.fr