D. Iftimie, M.C. Lopes Filho, and H.J. Nussenzveig Lopes

Comportement en temps grand pour les écoulements parfaits incompressibles dans un demi-plan

Séminaire É. D. P. (2001-2002), Exposé n° XVII, 8 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2001-2002____A17_0>

Comportement en temps grand pour les écoulements parfaits incompressibles dans un demi-plan

D. Iftimie M.C. Lopes Filho H.J. Nussenzveig Lopes

1. Introduction

Nous considérons dans cet exposé un écoulement parfait incompressible dans le demi-plan supérieur $\mathbb{H} = \{x \in \mathbb{R}^2;\ x_2 > 0\}$. Le problème de Cauchy associé est donné par l'équation d'Euler :

$$\omega_t + u \cdot \nabla\omega = 0, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad \operatorname{curl} u = \omega, \tag{1}$$

avec les conditions aux bords

$$u_2(t, x_1, 0) = 0, \qquad \lim_{|x|\to\infty} u(t, x) = 0, \qquad \omega(0, x_1, x_2) = \omega_0(x_1, x_2)$$

où $u = (u_1, u_2)$ désigne la vitesse du fluide et ω le tourbillon.

On peut se ramener à un problème dans l'espace entier par la méthode des images : en prolongeant le tourbillon ω par antisymétrie par rapport à l'axe $\{x_2 = 0\}$ on obtient un tourbillon qui résout l'équation d'Euler posée dans $\mathbb{R}^2$. On peut ainsi déduire la formule du noyau de la loi de Biot-Savart dans le demi-plan. L'existence globale des solutions est assurée pour des données initiales $\omega_0 \in L^p$ avec $p \geq 1$, voire même des mesures positives [4, 12], et l'unicité est connue pour $p = \infty$. Par contre, le comportement en temps grand des solutions est un problème actuellement largement ouvert. Les seuls résultats rigoureux disponibles dans la littérature mathématique donnent des estimations sur le diamètre du support du tourbillon. Ces résultats sont à l'origine de l'étude que nous présentons ici.

Dans le cas de $\mathbb{R}^2$, le premier théorème sur la propagation du support du tourbillon apparaît dans [13]. Marchioro montre dans cet article que dans le cas du tourbillon positif et borné, le diamètre du support du tourbillon est au plus en $O(t^{\frac{1}{3}})$. L'exposant $\frac{1}{3}$ est ensuite amélioré à presque $\frac{1}{4}$ dans [7] et [19]. De plus, ce résultat a été ensuite étendu au cas des tourbillons non-bornés, voir [5, 11], au cas de faible viscosité, voir [15], au cas des domaines extérieurs, voir [14], au cas tridimensionnel axisymétrique [2, 16, 17] et les techniques employées par Marchioro ont été utilisées pour étudier la convergence vers des tourbillons discrets. Remarquons enfin que dans le cas où le tourbillon change de signe, la borne triviale $O(t)$, qui vient du fait que la vitesse est bornée en espace et en temps, est en fait optimale (voir [7]).

Nous nous sommes intéressés dans [6] à la propagation du support du tourbillon dans le cas du demi-plan. On montre dans cet article un résultat de confinement du support dans la direction verticale. Quant à la direction horizontale, il est montré que le centre de masse se déplace parallèlement à l'axe et que sa vitesse est minorée par une constante strictement positive. Ceci exclut tout résultat de confinement du support meilleur que $O(t)$ dans la direction horizontale mais n'exclut pas une meilleure borne pour le diamètre du support.

Le théorème que nous présentons ici n'est pas un théorème de propagation du support mais est étroitement lié à de tels résultats. Soit ω une solution de l'équation d'Euler associée à une donnée ω_0 à support compact et positive. On veut étudier le comportement asymptotique du tourbillon dans la direction horizontale à l'échelle t qui est naturelle vu ce que l'on sait sur le support du tourbillon (où plus précisément sur le centre de masse du tourbillon). Soit $\widetilde{\omega}(t,x) = t^2\omega(t,tx)$. Les fonctions $\widetilde{\omega}(t,\cdot)$ sont bornées dans L^1. Par les résultats de confinement du support on sait aussi que $\operatorname{supp}\widetilde{\omega}(t,\cdot) \subset \left[-C\left(\frac{\log t}{t}\right)^{1/2}, M + \frac{C}{t}\right] \times \left[0, C\left(\frac{\log t}{t^2}\right)^{1/3}\right]$ où $M = \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{H})}$. Par conséquent, la famille de mesures $\widetilde{\omega}(t,\cdot)$ est relativement compacte pour la topologie vague et toute limite vague de sous-suites de cette famille est de la forme $\mu\otimes\delta_0$ avec μ une mesure positive à support dans l'intervalle $[0,M]$. Nous ferons dans la suite l'hypothèse cruciale suivante : il existe la limite vague de $\widetilde{\omega}(t,\cdot)$ quand $t\to\infty$. Sous cette hypothèse, on peut décrire la mesure limite μ de la manière suivante.

Théorème 1. *Soit $\omega_0 \in L^p_c(\mathbb{H})$, $p>2$, un tourbillon initial positif tel que $\widetilde{\omega}(t,\cdot)$ converge vaguement vers $\mu\otimes\delta_0$ lorsque $t\to\infty$. Alors la mesure limite μ doit être de la forme*

$$\mu = \sum_{i=1}^{\infty} m_i\,\delta_{\alpha_i}$$

où

(a) *$\alpha_i \neq \alpha_j$ si $i\neq j$ et $\alpha_i \to 0$ lorsque $i\to\infty$;*

(b) *les masses m_i sont positives et vérifient $\sum_{i=1}^{\infty} m_i = \|\omega_0\|_{L^1}$;*

(c) *pour tout i, $\alpha_i\in[0,M]$, où $M = \|u\|_{L^\infty([0,\infty)\times\mathbb{H})}$;*

(d) *il existe une constante $D>0$ qui dépend seulement de p, telle que pour tout i avec $m_i\neq 0$ on a*

$$\alpha_i \le D\|\omega_0\|_{L^p}^{\frac{p'}{2}}\, m_i^{1-\frac{p'}{2}}.$$

(On a noté $p' = \frac{p}{p-1}$.)

Quelques remarques sont en ordre pour bien comprendre ce résultat. Premièrement, la mesure limite μ ne peut pas se réduire à une masse de Dirac en 0. En effet, on sait par [6] que la première composante du centre de masse vérifie l'inégalité $\int x_1\omega(t,x)\,\mathrm{d}x \ge Ct$ pour une certaine constante $C>0$. À partir de cette relation on obtient tout de suite que $\int x_1\,\widetilde{\omega}(t,x)\,\mathrm{d}x \ge C$ ce qui implique que $\langle\mu(x_1),x_1\rangle \ge C > 0$ d'où μ ne peut pas être un multiple de δ_0.

Deuxièmement, il existe des exemples de tourbillon initial tel que la solution de l'équation d'Euler soit obtenue par translation à vitesse constante dans la direction horizontale : $\omega(t,x) = \omega_0(x_1-\sigma t, x_2)$. Ces exemples sont connus dans la littérature sous le nom de "paires de tourbillon stationnaires" ("steady vortex pairs") et leur existence a été montrée en donnant des formules explicites (voir [1], page 534), ou bien en minimisant l'énergie cinétique sur toutes les configurations de tourbillons qui sont des réarrangements d'une fonction donnée (voir [3]) ou bien en résolvant une équation elliptique semi-linéaire pour la fonction courant (voir [18] et [9]). Or la limite vague de la fonction $\widetilde{\omega}(t,x) = t^2\omega_0\big(t(x_1 - \sigma), tx_2\big)$ est égale a $\int \omega_0 \, \delta_\sigma \otimes \delta_0$. Ainsi, dans le cas des "paires de tourbillon stationnaires" la mesure limite μ est égale à $\int \omega_0 \, \delta_\sigma$.

Troisièmement, on ne dispose pas actuellement d'un exemple régulier de tourbillon initial pour lequel la mesure limite contiendrait au moins deux masses de Dirac différentes. Cependant, on pourrait considérer un tourbillon initial discret. Dans le cas où le tourbillon initial est la somme de deux masses de Dirac, on peut donner des conditions suffisantes pour que la mesure limite μ soit composée de deux masses de Dirac distinctes. On renvoie à [8] pour un énoncé plus précis.

Enfin, remarquons une similarité frappante avec l'équation de Korteweg-de-Vries. Il a été conjecturé par Lax [10], et depuis largement étudié, que la limite asymptotique à temps grand des solutions de KdV à donnée initiale régulière est donnée par une superposition de solitons. Or, si l'on prend le tourbillon égal à une masse de Dirac (où bien égal à une "paire de tourbillon stationnaire"), son évolution est similaire à celle des solitons de KdV : translation à vitesse constante. On peut donc considérer que les masses de Dirac (ou les "paires de tourbillon stationnaires") sont les équivalents des solitons pour l'équation d'Euler et le théorème devient ainsi une version du théorème conjecturé pour KdV.

2. Esquisse de la preuve

Nous donnons dans cette section l'esquisse de la preuve du théorème 1. Pour la preuve détaillée ainsi que quelques résultats de propagation du support du tourbillon nous renvoyons à [8].

Rappelons que $\widetilde{\omega}(t,y) = t^2\omega(t,ty)$. Introduisons aussi le champ de vitesses associé à ce tourbillon $\widetilde{u}(t,y) = tu(t,ty)$ de sorte que

$$\widetilde{u}(t,x) = \int_{\mathbb{H}} K(x,y)\,\widetilde{\omega}(t,y)\,\mathrm{d}y, \tag{2}$$

où le noyau K est le noyau de la loi de Biot-Savart et se déduit par la méthode des images :

$$K = K(x,y) = \frac{(x-y)^\perp}{2\pi|x-y|^2} - \frac{(x-\overline{y})^\perp}{2\pi|x-\overline{y}|^2}, \quad \overline{y} = (y_1, -y_2), \quad (z_1,z_2)^\perp = (-z_2, z_1).$$

Il est très facile de montrer à partir de (1) que le couple $(\widetilde{\omega}, \widetilde{u})$ vérifie l'équation suivante :

$$\partial_t \widetilde{\omega}(t,y) - \frac{1}{t}\operatorname{div}\big[y\,\widetilde{\omega}(t,y)\big] + \frac{1}{t^2}\operatorname{div}\big[\widetilde{u}(t,y)\,\widetilde{\omega}(t,y)\big] = 0. \tag{3}$$

On suppose dorénavant que $\widetilde{\omega}(t,x) \rightharpoonup \mu \otimes \delta_0$ vaguement lorsque $t \to \infty$. Si l'on regarde attentivement l'équation (3) on s'aperçoit que, en prenant par exemple le produit par une fonction test fixée, le premier terme est d'intégrale en temps bornée. Vu que

$\operatorname{div}\big[y\,\widetilde{\omega}(t,y)\big] \rightharpoonup \operatorname{div}\big[y\mu\otimes\delta_0\big]$, le deuxième terme aura en général une intégrale $\int_0^t$ divergente comme $\log t$ lorsque $t\to\infty$. Quant au troisième terme, il semble difficile de passer à la limite dans $\widetilde{u}(t,y)\,\widetilde{\omega}(t,y)$ car seule la borne L^1 est disponible sur $\widetilde{\omega}(t,y)$. Cependant, on voit facilement que $\|\widetilde{u}(t,\cdot)\widetilde{\omega}(t,\cdot)\|_{L^1} = O(t)$ ce qui fait que le troisième terme est en $O(1/t)$. Le problème est d'estimer la partie de ce terme qui est exactement en $1/t$; cette partie doit compenser la divergence en $\log t$ qui vient du deuxième terme. Cette approche permet d'obtenir l'estimation clef suivante.

Proposition 1. *Soit $\sum_i m_i\delta_{\alpha_i}$ la partie atomique de la mesure μ. Il existe une constante D qui ne dépend que de p telle que*

$$\big|\big\langle\mu(y_1), y_1\psi(y_1)\big\rangle\big| \le D\|\omega_0\|_{L^p}^{\frac{p'}{2}}\sum_{i=1}^{\infty}|\psi(\alpha_i)|m_i^{2-\frac{p'}{2}}, \tag{4}$$

pour toute fonction $\psi\in C^0(\mathbb{R})$.

Esquisse de la preuve. Soit $\psi\in C^0(\mathbb{R})$ une fonction test quelconque et φ une primitive de ψ. Soit

$$f(t)\equiv\int_{\mathbb{H}}\varphi(y_1)\,\widetilde{\omega}(t,y)\,\mathrm{d}y.$$

On déduit facilement de (3) que

$$f'(t)=\frac{1}{t}\Big(\underbrace{\frac{1}{t}\int\psi(y_1)\widetilde{u}_1(t,y)\,\widetilde{\omega}(t,y)\,\mathrm{d}y}_{B(t)}-\underbrace{\int\psi(y_1)y_1\,\widetilde{\omega}(t,y)\,\mathrm{d}y}_{A(t)}\Big).$$

Les fonctions $\widetilde{\omega}(t,\cdot)$ sont bornées dans L^1 et de support contenu dans un même compact, donc la fonction f est bornée. En intégrant par exemple la relation ci-dessus de t a t^2 et en faisant $t\to\infty$ on déduit que

$$\limsup_{t\to\infty}\big(B(t)-A(t)\big)\ge 0$$

Par hypothèse $\lim\limits_{t\to\infty}A(t)=\big\langle\mu(y_1),y_1\psi(y_1)\big\rangle$ ce qui implique

$$\big\langle\mu(y_1),y_1\psi(y_1)\big\rangle\le\limsup_{t\to\infty}B(t).$$

En appliquant cette relation pour $-\psi$ on trouve finalement

$$\big|\big\langle\mu(y_1),y_1\psi(y_1)\big\rangle\big|\le\limsup_{t\to\infty}|B(t)|.$$

Nous montrons dans la suite que

$$\limsup_{t\to\infty}|B(t)|\le D\|\omega_0\|_{L^p}^{\frac{p'}{2}}\sum_{i=1}^{\infty}|\psi(\alpha_i)|m_i^{2-\frac{p'}{2}} \tag{5}$$

pour une constante D qui dépend seulement de p. En utilisant la loi de Biot-Savart (2) ainsi que l'estimation du noyau

$$|K(x,y)| \leq \frac{1}{\pi|x-y|}$$

il vient

$$|B(t)| \leq \frac{1}{t} \iint\limits_{x,y\in\mathbb{H}} \frac{|\psi(y_1)|}{\pi|x-y|} \,\widetilde{\omega}(t,x)\,\widetilde{\omega}(t,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

On se donne ensuite un petit paramètre δ et on décompose le domaine d'intégration en deux parties $\{|x-y| \leq \delta\}$ et $\{|x-y| \geq \delta\}$ pour obtenir

$$|B(t)| \leq \frac{\|\psi\|_{L^\infty}\|\,\widetilde{\omega}\|_{L^1}^2}{\pi\delta t} + \frac{1}{t} \iint\limits_{\substack{x,y\in\mathbb{H}\\ |x-y|<\delta}} \frac{|\psi(y_1)|}{\pi|x-y|} \,\widetilde{\omega}(t,x)\,\widetilde{\omega}(t,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{6}$$

Le premier terme est négligeable car il disparaît en prenant la $\limsup\limits_{t\to\infty}$. On estime le deuxième terme à l'aide du lemme suivant :

Lemme 1. *Soient $S \subset \mathbb{R}^2$ et $h : S \to \mathbb{R}_+$ une fonction appartenant à $L^1(S) \cap L^p(S)$, $p > 2$. Il existe une constante D_p telle que*

$$\int_S \frac{h(x)}{|x-y|}\,dx \leq D_p \|h\|_{L^p(S)}^{p'/2} \|h\|_{L^1(S)}^{1-p'/2}, \qquad \forall y \in \mathbb{R}^2$$

ou $p' = \frac{p}{p-1}$.

En combinant ce lemme avec la remarque

$$\|\,\widetilde{\omega}(t,\cdot)\|_{L^q} = t^{2(1-\frac{1}{q})}\|\omega(t,\cdot)\|_{L^q} = t^{2(1-\frac{1}{q})}\|\omega_0\|_{L^q} \quad \forall q \in [1,p]$$

on déduit à partir de (6) que

$$|B(t)| \leq \frac{\|\psi\|_{L^\infty}\|\,\widetilde{\omega}\|_{L^1}^2}{\pi\delta t} + \underbrace{\frac{D_p}{\pi}\|\omega_0\|_{L^p}^{\frac{p'}{2}} \int_{\mathbb{H}} |\psi(y_1)|\,\|\,\widetilde{\omega}\|_{L^1(I(y,\delta))}^{1-\frac{p'}{2}}\,\widetilde{\omega}(t,y)\,\mathrm{d}y}_{J}$$

où on a défini $I(y,\delta) = (y_1-\delta, y_1+\delta) \times \mathbb{R}_+$. Pour estimer la dernière intégrale on considère plusieurs cas. Si y_1 est proche de l'un des α_i, alors par continuité de ψ on a que $|\psi(y_1)| \simeq |\psi(\alpha_i)|$. Ensuite, comme $\mu(\{\alpha_i\}) = m_i$ on déduit que

$$\int_{y_1\simeq\alpha_i} \mathrm{d}\mu(y_1) \simeq m_i$$

et par l'hypothèse faite sur $\widetilde{\omega}$

$$\int_{y_1\simeq\alpha_i} \widetilde{\omega}(t,y)\,\mathrm{d}y \lesssim m_i$$

pour t assez grand. De plus, si y_1 est proche de α_i alors pour δ suffisamment petit tout l'intervalle $(y_1-\delta, y_1+\delta)$ est proche de α_i et donc $\|\widetilde{\omega}\|_{L^1(I(y,\delta))} \lesssim m_i$. On déduit que, pour δ suffisamment petit et t suffisamment grand,

$$\int_{y_1\simeq\alpha_i} |\psi(y_1)|\,\|\widetilde{\omega}\|^{1-\frac{p'}{2}}_{L^1(I(y,\delta))}\,\widetilde{\omega}(t,y)\,\mathrm{d}y \lesssim |\psi(\alpha_i)|m_i^{2-\frac{p'}{2}}$$

Enfin, si y_1 n'est pas proche de l'ensemble $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$, alors on peut considérer que y_1 est proche d'un point au voisinage duquel la mesure μ est diffuse. En appliquant le raisonnement ci-dessus avec $m_i = 0$ on trouve que cette partie du terme J est aussi petite qu'on veut après passage à la $\limsup_{t\to\infty}$, donc finalement négligeable.

En prenant en compte tous les termes de (6) comme expliqué ci-dessus on arrive finalement à l'inégalité (5) ce qui conclut la preuve de la proposition 1. □

Une fois la proposition 1 démontrée la preuve du théorème 1 suit en choisissant des fonctions test ψ particulières.

Lemme 2. *Soit $m_i\delta_{\alpha_i}$ une masse de Dirac de la partie atomique de μ. Alors*

$$\alpha_i \leq D\|\omega_0\|^{\frac{p'}{2}}_{L^p} m_i^{1-\frac{p'}{2}}. \tag{7}$$

Démonstration. En changeant éventuellement l'ordre dans la sommation des masses de Dirac on peut supposer que $i = 1$. Comme la conclusion est triviale si $\alpha_1 = 0$, on supposera que $\alpha_1 > 0$. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe $\delta \in (0, \alpha_1)$ tel que

$$\mu([\alpha_1-\delta, \alpha_1+\delta]) \leq m_1+\varepsilon. \tag{8}$$

Soit $\psi \in C^0(\mathbb{R})$ une fonction positive à support dans $(\alpha_1-\delta, \alpha_1+\delta) \subset \mathbb{R}_+$ qui atteint son maximum en α_1.

Si $\alpha_i \in (\alpha_1-\delta, \alpha_1+\delta)$, $i \geq 2$, on a par (8) que $m_i \leq \varepsilon$. Si $\alpha_i \notin (\alpha_1-\delta, \alpha_1+\delta)$ alors $\psi(\alpha_i) = 0$. Dans les deux cas

$$\psi(\alpha_i)m_i^{1-\frac{p'}{2}} \leq \psi(\alpha_i)\varepsilon^{1-\frac{p'}{2}} \leq \psi(\alpha_1)\varepsilon^{1-\frac{p'}{2}}.$$

On déduit de (4) que

$$m_1\alpha_1\psi(\alpha_1) \leq D\|\omega_0\|^{\frac{p'}{2}}_{L^p}\psi(\alpha_1)\big[m_1^{2-\frac{p'}{2}} + \varepsilon^{1-\frac{p'}{2}}\sum_{i=2}^{\infty} m_i\big],$$

Il ne reste plus qu'à prendre la limite $\varepsilon \to 0$ pour conclure. □

Le lemme ci-dessus montre que le seul point d'accumulation possible pour l'ensemble $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ est 0. En effet, comme la série $\sum m_i$ est sommable on a que $m_i \to 0$ lorsque $i \to \infty$ et on obtient par (7) que $\alpha_i \to 0$. En réarrangeant les α_i on peut supposer que $\alpha_1 = 0$ et que la suite $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$ est décroissante.

Si l'on choisit maintenant une fonction ψ à support compact dans un intervalle (α_{i+1}, α_i), $i \geq 2$, alors le terme de droite de (4) s'annule ce qui implique que $\big\langle\mu(y_1), y_1\psi(y_1)\big\rangle = 0$.

On en déduit que $y_1\mu(y_1)\big|_{(\alpha_{i+1},\alpha_i)}= 0$ et finalement $\mu\big|_{(\alpha_{i+1},\alpha_i)}= 0$ car $0 \notin (\alpha_{i+1}, \alpha_i)$. Ceci implique que la partie diffuse de μ est nulle et conclut la preuve du théorème 1.

Quand on a défini le tourbillon modifié $\widetilde{\omega}$ on a choisi le même changement d'échelle aussi bien en direction horizontale que verticale. Si le scaling $x_1 \equiv ty_1$ en direction horizontale est justifié par le fait que la première composante du centre de masse est exactement en $O(t)$, le scaling $x_2 \equiv ty_2$ n'est pas justifié car la deuxième composante du centre de masse est constante. Idéalement il ne faudrait pas faire de changement de variable dans la direction verticale mais on est alors obligés de supposer dans notre théorème que $t\omega(tx_1, x_2)$ converge vaguement ce qui nous a paru excessif à cause des oscillations qui peuvent avoir lieu en direction verticale. On pourrait enfin considérer un scaling du type $x_2 \equiv f(t)y_2$ où f est une fonction telle que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$. Ce dernier problème est en fait équivalent au problème que nous considérons dans le théorème 1 car quelque soit la fonction f la limite vague de $\widetilde{\omega}_f(t, y) = tf(t)\omega\big(t, ty_1, f(t)y_2\big)$ est toujours la même. En effet, soit ν_f limite vague de $\widetilde{\omega}_f(t, y)$ quand $t \to \infty$ et choisissons $h \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{H}})$ une fonction test. Alors

$$\begin{aligned}
\big\langle \nu_f, h\big\rangle &= \lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{H}} \widetilde{\omega}_f(t, y)h(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{H}} \omega(t, x)h\big(\frac{x_1}{t}, \frac{x_2}{f(t)}\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to\infty} \Big(\int_{\mathbb{H}} \omega(t, x)h\big(\frac{x_1}{t}, 0\big)\,\mathrm{d}x + O\Big(\frac{\|\partial_2 h\|_{L^\infty}}{f(t)}\Big)\int_{\mathbb{H}} x_2\omega(t, x)\,\mathrm{d}x\Big) \\
&= \lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{H}} \omega(t, x)h\big(\frac{x_1}{t}, 0\big)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

car on sait que $\int_{\mathbb{H}} x_2\omega(t, x)\,\mathrm{d}x = cst.$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$. Le dernier terme ne dépend plus de f. Ici on a fait le choix $f(t) = t$ uniquement pour simplifier les calculs. Ce choix revient à étudier le comportement asymptotique en direction horizontale mais pas en direction verticale.

Références

[1] G. K. Batchelor, *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1967.

[2] D. Benedetto, E. Caglioti and C. Marchioro, *On the motion of a vortex ring with a sharply concentrated vorticity*, Math. Methods Appl. Sci. **23** (2000), no. 2, 147–168.

[3] G. Burton, *Steady symmetric vortex pairs and rearrangements* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **108**(1988) 269–290.

[4] J.-M. Delort, *Existence de nappes de tourbillon en dimension deux*, J. Amer. Math. Soc. **4** (1991), no. 3, 553–586.

[5] J. Hounie, M. C. Lopes Filho and H. J. Nussenzveig Lopes, *Bounds on the dispersion of vorticity in 2D incompressible, inviscid flows with a priori unbounded velocity*, SIAM J. Math. Anal. **31** (1999), no. 1, 134–153 (electronic).

[6] D. Iftimie, *Évolution de tourbillon à support compact*, Journées "Équations aux Dérivées Partielles" (Saint-Jean-de-Monts, 1999), Exp. No. IV, 1999, available at http ://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/1999/.

[7] D. Iftimie, T. C. Sideris and P. Gamblin, *On the evolution of compactly supported planar vorticity*, Comm. Partial Differential Equations **24** (1999), no. 9-10, 1709–1730.

[8] D. Iftimie, M. C. Lopes Filho and H. J. Nussenzveig Lopes, *Large time behavior for vortex evolution in the half-plane*, preprint.

[9] Jianfu Yang, *Existence and asymptotic behavior in planar vortex theory*, Math. Models Meth. in Appl. Sci. **1**(1991), 461–475.

[10] P. Lax, *Integrals of nonlinear evolution equations and solitary waves*, Comm. Pure Appl. Math. **21**(1968), 467–490.

[11] M. C. Lopes Filho and H. J. Nussenzveig Lopes, *An extension of Marchioro's bound on the growth of a vortex patch to flows with L^p vorticity*, SIAM J. Math. Anal. **29** (1998), no. 3, 596–599.

[12] M. C. Lopes Filho, H. J. Nussenzveig Lopes and Zhouping Xin, *Existence of vortex sheets with reflection symmetry in two space dimensions*, Arch. Ration. Mech. Anal. **158** (2001), no. 3, 235–257.

[13] C. Marchioro, *Bounds on the growth of the support of a vortex patch*, Comm. Math. Phys. *164* (1994), no. 3, 507–524.

[14] C. Marchioro, *On the growth of the vorticity support for an incompressible non-viscous fluid in a two-dimensional exterior domain*, Math. Methods Appl. Sci. **19** (1996), no. 1, 53–62.

[15] C. Marchioro, *On the inviscid limit for a fluid with a concentrated vorticity*, Comm. Math. Phys. **196** (1998), no. 1, 53–65.

[16] C. Marchioro, *Large smoke rings with concentrated vorticity*, J. Math. Phys. **40** (1999), no. 2, 869–883.

[17] C. Maffei and C. Marchioro, *A confinement result for axisymmetric fluids*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **105** (2001), 125–137.

[18] J. Norbury, *Steady planar vortex pairs in an ideal fluid*, Comm. Pure and Appl. Math. **28**(1975), 679–700.

[19] Ph. Serfati, *Borne en temps des caractéristiques de l'équation d'Euler 2D à tourbillon positif et localisation pour le modèle point-vortex*, preprint, 1998.

Dragoş Iftimie
IRMAR, Univ. Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes, France
et
Centre de Mathématiques, École Polytechnique, 91128 Palaiseau, France
E-mail : iftimie@math.polytechnique.fr

Milton C. Lopes Filho
Departamento de Matematica, IMECC-UNICAMP.
Caixa Postal 6065, Campinas, SP 13083-970, Brasil
E-mail : mlopes@ime.unicamp.br

Helena J. Nussenzveig Lopes
Departamento de Matematica, IMECC-UNICAMP.
Caixa Postal 6065, Campinas, SP 13083-970, Brasil
E-mail : hlopes@ime.unicamp.br