SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2003-2004

Luc Robbiano and Claude Zuily

Estimées de Strichartz pour l'équation de Schrödinger à coefficients variables

Séminaire É. D. P. (2003-2004), Exposé n° XIX, 23 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2003-2004____A19_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Estimées de Strichartz pour l'équation de Schrödinger à coefficients variables

L. Robbiano *et C. Zuily†

I Introduction et énoncé

L'objet de cet exposé est de présenter les principales étapes de la preuve des estimées de Strichartz (locales en temps) pour l'opérateur de Schrödinger correspondant à une perturbation asymptotiquement plate et non captante du Laplacien usuel de $\mathbb{R}^n$.

Pour être plus précis nous introduisons l'espace suivant. Soit $\sigma_0 \in]0,1[$. On pose

$$(I.1) \quad \mathcal{B}_{\sigma_0} = \left\{ a \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \ : |\partial^\alpha a(x)| \leq \frac{C_\alpha}{\langle x\rangle^{1+|\alpha|+\sigma_0}}, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \right\}.$$

où $\langle x\rangle = (1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Soit P un opérateur différentiel du second ordre formellement auto-adjoint.

$$(I.2) \qquad P = \sum_{j,k=1}^n D_j(g^{jk}(x)D_k) + \sum_{j=1}^n (D_j b_j(x) + b_j(x) D_j) + b_0(x)$$

où $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$, de symbole principal $p(x,\xi) = \sum\limits_{j,k=1}^n g^{jk}(x)\xi_j\xi_k, (g^{jk} = g^{kj})$.

Nous ferons les hypothèses suivantes :

$$(H.1) \quad \begin{cases} i) & \text{Il existe } \sigma_0 > 0 \text{ tel que } g^{jk} - \delta_{jk} \in \mathcal{B}_{\sigma_0}, b_j \in \mathcal{B}_{\sigma_0}\ , \\ & 1 \leq j,k \leq n\ . \ \text{Ici } \delta_{jk} \text{ désigne le symbole de Kronecker.} \\ ii) & b_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n). \end{cases}$$

*Université de Versailles LAMA Bât. Fermat 45, avenue des États Unis 78035 Versailles
†Université de Paris-Sud Département de Mathématiques F-91405 Orsay cedex

$(H.2)$ Il existe $\nu > 0$ tel que $p(x, \xi) \geq \nu|\xi|^2$, pour tout $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

L'opérateur P possède alors une extension auto-adjointe de domaine $H^2(\mathbb{R}^n)$. Nous associons ensuite, au symbole p, le flot bicaractéristique. Il est donné par les équations pour $j = 1, \dots, n$,

$$(I.3) \qquad \begin{cases} \dot{x}_j(t) = \dfrac{\partial p}{\partial \xi_j}(x(t), \xi(t)) \ , \ x_j(0) = x_j \ , \\ \dot{\xi}_j(t) = -\dfrac{\partial p}{\partial x_j}(x(t), \xi(t)) \ , \ \xi_j(0) = \xi_j \ . \end{cases}$$

On vérifie facilement à l'aide des hypothèses $(H.1)$ et $(H.2)$ que ce flot existe pour tout $t \in \mathbb{R}$. On notera $(x(t, x, \xi) \ , \ \xi(t, x, \xi))$ la solution de $(I.3)$.

On fera pour finir l'hypothèse suivante :

$$(H.3) \qquad \text{Pour tout } (x, \xi) \in T^*\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \text{on a } \lim_{t \to \pm\infty} |x(t, x, \xi)| = +\infty \ ,$$

ce qui s'exprime en disant que le flot n'est pas captant en $\pm\infty$.

Soit alors $e^{-itP}u_0$ la solution du problème

$$(I.4) \qquad \begin{cases} i\dfrac{\partial u}{\partial t} - Pu = 0, \\ u(0, \cdot) = u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n). \end{cases}$$

Le résultat principal de ce travail s'énonce alors comme suit.

Théorème I.1

Supposons que l'opérateur P défini en $(I.2)$ satisfasse les hypothèses (H.1), (H.2), (H.3). Soit $T > 0$ et (p, q) des réels tels que $q > 2$ et $\frac{2}{q} = \frac{n}{2} - \frac{n}{r}$. Il existe alors une constante $C \geq 0$ telle que,

$$(I.5) \qquad \|e^{-itP}u_0\|_{L^q([-T,T], L^r(\mathbb{R}^n))} \leq C\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \ ,$$

pour tout $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

L'estimée (I.5) est connue dans la littérature sous le nom d'estimée de Strichartz. Elle a été prouvée dans le cas du Laplacien usuel par Strichartz [St] lorsque $p = q = \frac{2n+4}{n}$ puis étendue à tous les couples (p, q) décrits dans l'énoncé par Ginibre et Velo [GV], Yajima [Y]. Le cas limite $q = 2$ en dimension $n \geq 3$, toujours dans le cas plat, a été résolu par Keel-Tao [KT].

Lorsque les coefficients sont variables il y a aussi des résultats plus récents. Staffilani-Tataru [ST] ont prouvé le Théorème I.1 sous les hypothèses (H.2), (H.3) pour des perturbations à support compact du Laplacien. Dans [B], Burq a donné une autre preuve de ce résultat en se basant sur le travail de Burq-Gérard-Tzvetkov [BGT]. Il annonce également dans ce travail une version affaiblie de (I.5), où la norme L^2 du second membre est remplacée par la norme H^ε, mais sous une hypothèse de décroissance des coefficients plus faible que $(H.1)$ (où $1+\sigma_0$ est remplacé par σ_0). Plus récemment Hassel-Tao-Wunsch [HTW] ont démontré en dimension $n = 3$ une version affaiblie de $(I.5)$ correspondant au cas $q = 4$, $r = 3$ sous des hypothèses proches des notre.

Il faut aussi mentionner le travail (évoqué ci-dessus) de Burq-Gérard-Tzvetkov [BGT] qui se sont intéressés aux estimées de Strichartz sur des variétés compactes. Dans ce même travail lorsque les coefficients (ainsi que leur dérivées) sont simplement bornés dans $\mathbb{R}^n$ ces auteurs démontrent des inégalités du type de $(I.5)$ mais où la norme L^2 du second membre est remplacée par la norme $H^{\frac{1}{q}}$.

Donnons maintenant une idée de notre démonstration du Théorème I.1. Il est bien connu maintenant qu'on peut donner une preuve des estimées de Strichartz basée sur trois ingrédients : une estimation de dispersion, des arguments de dualité et le Théorème de Hardy-Littlewood-Sobolev. Ceci a été formulée par Keel-Tao [KT] de la manière suivante.

Soit pour $t \in \mathbb{R}$ un opérateur $U(t)$ satisfaisant aux estimations suivantes.

$$(i) \qquad \|U(t)f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \ , \ \forall t \in \mathbb{R} \ , \ C \text{ indépendante de } t \ .$$

$$(ii) \qquad \|U(s)(U(t))^* g\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{|t-s|^{\frac{n}{2}}}\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \ , \forall t \neq s$$

Alors l'estimée de Strichartz $(I.5)$ est valable pour $U(t)$.

Bien entendu le point difficile est l'estimation (ii). Dans le cas où $U(t) = e^{it\Delta_0}$ (où Δ_0 est le Laplacien usuel) cette estimation est obtenue par la formule explicite donnant la solution. Dans le cas des coefficients variables une telle formule est pour l'instant sans espoir et on peut espérer au mieux avoir une parametrixe. A l'heure actuelle nous ne sommes pas capables de construire une parametrixe globale (on dira plus loin pourquoi). Il faut donc expliquer ce que l'on fait à la place. Tout d'abord soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi(x) = 1$ si $|x| \leq 1$ et $R > 0$ assez grand. On écrit

$$e^{-itP}u_0 = \varphi(\frac{x}{R})e^{-itP}u_0 + (1-\varphi(\frac{x}{R}))e^{-itP}u_0 = v + w$$

L'estimée de Strichartz pour v est obtenue grâce au Théorème de Staffilani-Tataru et à des résultats d'effets régularisants de Doï [D].

Quant au terme w il est solution de l'équation

$$(i\partial_t + \Delta_0 - (1-\tilde{\varphi}(\frac{x}{R}))(P+\Delta_0)(1-\tilde{\varphi}(\frac{x}{R}))w = [P,\varphi_R]u \ ,$$

où $\tilde{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \tilde{\varphi} = 1$ sur le support de φ. Notons

$$-\widetilde{P} = \Delta_0 - (1-\tilde{\varphi}(\frac{x}{R}))(P+\Delta_0)(1-\tilde{\varphi}(\frac{x}{R})) \ .$$

Soit f l'un des coefficients de l'opérateur $P+\Delta_0$. Compte tenu de l'hypothèse $(H.1)$ on voit facilement que

$$\left|\partial^\alpha \left[(1-\tilde{\varphi}(\frac{x}{R}))f\right](x)\right| \leq \frac{1}{R^{\frac{\sigma_0}{2}}} \cdot \frac{C_\alpha}{\langle x\rangle^{1+|\alpha|+\frac{\sigma_0}{2}}}$$

où les constantes C_α sont indépendantes de R.

Il s'en suit, en prenant R assez grand, que l'opérateur $-\widetilde{P}$ est une petite perturbation du Laplacien.

Nous sommes donc ramenés à prouver les estimées de Strichartz pour e^{-itP} où le symbole principal de P s'écrit

$$p(x,\xi) = |\xi|^2 + \varepsilon \sum_{j,k=1}^{n} b_{jk}^{\varepsilon}(x)\xi_j\xi_k \ ,$$

avec

$$|\partial^\alpha b_{jk}^{\varepsilon}(x)| \leq \frac{C_\alpha}{\langle x\rangle^{1+|\alpha|+\sigma_0}}, \forall x \in \mathbb{R}^n \ , \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \ ,$$

où C_α est indépendante de ε.

Notre méthode de construction d'une parametrixe est basée sur la transformation de FBI et la théorie de Sjöstrand.

Pour $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\alpha = (\alpha_x, \alpha_\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et $\lambda \geq 1$ on pose

$$Tv(\alpha,\lambda) = c_n \lambda^{\frac{3n}{4}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\varphi_0(y,\alpha)} v(y)dy$$

où

$$\varphi_0(y,\alpha) = (y-\alpha_x).\alpha_\xi + \frac{i}{2}|y-\alpha_x|^2 + \frac{1}{2i}|\alpha_\xi|^2$$

et c_n est une constante de normalisation.

Alors T est une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^n)$ sur $L^2(\mathbb{R}^{2n}, e^{-\lambda|\alpha_\xi|^2}d\alpha)$ et son adjoint $T^*\ : L^2(\mathbb{R}^{2n}, e^{-\lambda|\alpha_\xi|^2}d\alpha) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ s'écrit

$$(T^*w)(x) = c_n\lambda^{\frac{3n}{4}} \iint e^{-i\lambda(x-\alpha_x).\alpha_\xi - \frac{\lambda}{2}|x-\alpha_x|^2 - \frac{\lambda}{2}|\alpha_\xi|^2} w(\alpha)d\alpha$$

Un point important réside dans le fait que

$$T^*T = \text{ Identité de } L^2(\mathbb{R}^n).$$

Considérons pour $\theta \in \mathbb{R}$ une famille régulière de transformées de FBI,

$$T_\theta v(\alpha, \lambda) = c_n\lambda^{\frac{3n}{4}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\varphi(\theta,y,\alpha)} a(\theta, y, \alpha, \lambda)v(y)dy$$

et supposons qu'il existe φ et a telles que

$$(*) \begin{cases} \left[i\lambda\frac{\partial}{\partial\theta} + {}^tP(y, D_y)\right](e^{i\lambda\varphi}a) = 0 \\ \varphi(0, y, \alpha) = \varphi_0(y, \alpha) \\ a(0, y, \alpha) = 1 \end{cases}$$

Posons

$$U(t, \theta, \alpha, \lambda) = T_\theta(e^{-itP}u_0)(\alpha, \lambda)\ .$$

Alors

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \lambda\frac{\partial U}{\partial\theta} = 0\ ,$$

de sorte que l'on peut écrire

$$U(t, \theta, \alpha, \lambda) = V(\theta - \lambda t, \alpha, \lambda).$$

Par conséquent

$$U(t, 0, \alpha, \lambda) = U(-\lambda t, 0, \alpha, \lambda)$$

ce qui s'écrit

$$T(e^{-itP}u_0)(\alpha, \lambda) = T_{-\lambda t}(u_0)(\alpha, \lambda)$$

et comme $T^*T = Id$

$$\begin{aligned} e^{itP}u_0(x) &= T^*T_{-\lambda t}u_0(x) \\ &= \iiint e^{-i\lambda(x-\alpha_x)\alpha_\xi - \frac{\lambda}{2}|x-\alpha_x|^2 - \frac{\lambda}{2}|\alpha_\xi|^2 + i\lambda\varphi(-\lambda t,y,\alpha)} a(-\lambda t, y, \alpha, \lambda)u_0(y)dyd\alpha \\ &= \int k(t, x, y, \lambda)u_0(y)dy \end{aligned}$$

Pour obtenir l'estimation de dispersion il suffira donc de montrer que

$$|k(t,x,y,\lambda)| \leq \frac{c}{|t|^{\frac{n}{2}}} \quad t \neq 0 \; .$$

Pour résoudre le problème $(*)$ on est conduit aux équations eikonale et de transport

$$(E) \qquad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\theta,y,\alpha) = p(y, \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\theta,y,\alpha)) \\ \varphi(0,y,\alpha) = \varphi_0(y,\alpha) \end{cases}$$

$$(T) \qquad \begin{cases} Xa + ca + \frac{i}{\lambda}{}^tPa = 0 \\ a(0,y,\alpha,\lambda) = 1 \\ X = \frac{\partial}{\partial \theta} + 2 \sum\limits_{j,k=1}^{n} g^{jk}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\theta,x,\alpha) \frac{\partial}{\partial x_k} \end{cases}$$

Pour résoudre l'équation eikonale une première difficulté se présente. En effet les méthodes classiques utilisant la géométrie symplectique débutent par une étude du flot issu d'un point (x,ξ). A l'instant initial compte tenu de ce que l'on veut résoudre, on doit prendre $\xi = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}(x,\alpha)$. Mais ici φ_0 est non réelle donc le flot est non réel et p (le symbole principal) a des coefficients qui sont seulement C^∞. Pour palier à cette difficulté deux réponses ont été proposées. La première par Melin et Sjöstrand [MS] consiste à étendre tous les objets C^∞ du problème en des fonctions presque analytiques. La deuxième qui est dûe à Hörmander ([H] tome 4, chap. 25) et qui est connue sous le nom « idéaux Lagrangiens »permet de garder les conditions initiales du flot réelles et utilise un théorème de division. Voici en gros de quoi il s'agit.

Pour $(x,\xi) \in T^*\mathbb{R}^n$ posons

$$\begin{aligned} u_j(x,\xi,\alpha) &= \xi_j - \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_j}(x,\alpha) \\ &= \xi_j - \alpha_\xi^j - i(x_j - \alpha_x^j) \end{aligned}$$

Alors

$$\{u_j, u_k\} = 0 \; , \qquad \forall j,k = 1, \cdots, n \; .$$

Faisons évoluer u_j par le flot rétrograde *ie* posons

$$\begin{aligned} v_j(\theta,x,\xi,\alpha) &= u_j \circ \chi_{-\theta}(x,\xi) \\ &= \xi_j(-\theta,x,\xi) - \alpha_\xi^j - i(x_j(-\theta,x,\xi) - \alpha_x^j) \end{aligned}$$

Alors

$$\{v_j, v_k\} = 0 \ , \qquad \forall j,k = 1, \cdots, n \ .$$

Soit $\mathcal{J} = \{q = \sum_{j=1}^{n} q_j v_j\}$. Alors $\mathcal{J}$ est stable par crochet de Poisson.

Supposons que $\mathcal{J}$ soit engendré par des fonctions de la forme $\xi_j - \Phi_j(\theta, x, \alpha)$. Alors pour $j, k = 1, \cdots, n$

$$\left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_k} - \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_j}\right) \in \mathcal{J}$$

Un lemme permet de montrer que les éléments de $\mathcal{J}$ qui sont indépendants de ξ sont $\mathcal{O}(|\mathrm{Im}\ \Phi|^N) \quad \forall N \in \mathbb{N}$. Donc

$$\left|\left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial x_j} - \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_k}\right)(\theta, x, \alpha)\right| \leq C_N |\mathrm{I}m\ \Phi(\theta, x, \alpha)|^N$$

On pose alors

$$\varphi(\theta, x, \alpha) = \int_0^1 (x - x(\theta, \alpha)).\Phi(\theta, sx + (1-s)x(\theta, \alpha), \alpha) ds + \theta p(\alpha) + \frac{|\alpha_\xi|^2}{2i}$$

Alors, modulo $|\mathrm{I}m\Phi|^N$ on a

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\theta, x, \alpha) = \Phi_j(\theta, x, \alpha) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\theta, x, \alpha) = p(x, \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\theta, x, \alpha)) \end{cases}$$

et on a résolu notre équation eikonale.

Une fois cette équation résolue on examine les équations de transport. Ici aussi le fait que la phase φ soit non réelle engendre une difficulté puisqu'il s'agit de résoudre globalement une équation du premier ordre à coefficients non réels dans le C^∞.

Finalement, modulo des restes convenables on écrit

$$e^{-itP} u_0(x) = \int k(t, x, y, \lambda) u_0(y) dy$$

où

$$k(t, x, y, \lambda) = \iint e^{i\lambda \Psi(-\lambda t, x, y, \alpha)} b(t, x, y, \alpha, \lambda) d\alpha$$

Dans l'intégrale ci-dessus le symbole b contient une troncature $\chi(\frac{y - x(-\lambda t, \alpha)}{<\lambda t>})$ supportée dans $|y - x(-\lambda t, \alpha)| \leq \delta \langle \lambda t \rangle$. Il y alors deux régimes : l'un où

$|\lambda t| \geq 1$. On peut être alors très loin du point critique de la phase Ψ. La dispersion est alors obtenue grâce aux propriétés de convexité de Ψ puisque

$$\mathrm{Im}\Psi(-\lambda t, x, y, \alpha) \geq c\left(|x-\alpha_x|^2 + \frac{|y - x(-\lambda t, \alpha)|^2}{< \lambda t >^2}\right)$$

Lorsque $|\lambda t| \leq 1$ on est proche du point critique et une méthode de phase stationnaire est possible. Cependant la phase Ψ est non réelle et peut dégénérer dans certaines directions (penser à $|X|^2 + i|\lambda t||Y|^2$ de sorte que les résultats disponibles ne s'appliquent pas. On utilise alors une méthode simple d'intégration par parties à l'aide d'un champ de vecteur bien adapté à notre cas.

La suite du texte donne quelques détails sur les points évoqués ci-dessus.

II Étude du flot

Les constructions microlocales que nous ferons nécessitent de distinguer les points de $T^*\mathbb{R}^n$. On introduit pour cela la définition suivante.

Définition II.1

On note

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_+ &= \{(x,\xi) \in T^*\mathbb{R}^n \quad : x\cdot\xi \geq -\frac{1}{4} < x > |\xi|\} \\ \mathcal{S}_- &= \{(x,\xi) \in T^*\mathbb{R}^n \quad : x\cdot\xi \leq \frac{1}{4} < x > |\xi|\} \end{aligned}$$

$\mathcal{S}_+$ *(resp. $\mathcal{S}_-$) est appelé l'ensemble des points sortants pour $t > 0$ (resp. $t < 0$).*

Rappelons que notre symbole p est de la forme

$$p(x,\xi) = |\xi|^2 + \varepsilon \sum_{j,k=1}^{n} b_{jk}(x)\xi_j\xi_k = |\xi|^2 + \varepsilon q(x,\xi) \ ,$$

où

$$|\partial^\alpha b_{jk}(x)| \leq \frac{C_\alpha}{< x >^{1+|\alpha|+\sigma_0}}$$

C_α indépendantes de ε.

On note $x(t,x,\xi)$, $\xi(t,x,\xi)$ la solution globale du problème

$$(II.1) \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\partial p}{\partial \xi}(x(t),\xi(t)) \ , \ x(0) = x \\ \dot{\xi}(t) = -\frac{\partial p}{\partial x}(x(t),\xi(t)) \ , \ \xi(0) = \xi \end{cases}$$

Proposition II.1 (flot à partir des points sortants)

Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ la solution du problème (II.1) avec $(x,\xi) \in \mathcal{S}_+$ (resp. $\mathcal{S}_-$) et $\frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2$ s'écrit pour tout $t \geq 0$ (resp. $t \leq 0$)

$$\begin{cases} x(t,x,\xi) = x + 2t\xi(t,x,\xi) + z(t,x,\xi) \\ \xi(t,x,\xi) = \xi + \zeta(t,x,\xi) \end{cases}$$

De plus

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1+|x(t,x,\xi)|^2}{1+|x|^2+t^2} \leq 40$$

et pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $M_k \geq 0$ telle que pour tous $A, B \in \mathbb{N}^n$ tels que $|A|+|B| \leq k$, pour tout $t \geq 0$ (resp. $t \leq 0$) et tout $(x,\xi) \in \mathcal{S}_+$ (resp. $\mathcal{S}_-$) on a

$$\begin{aligned} \left|\partial_x^A \partial_\xi^B z(t,x,\xi)\right| &\leq \frac{\varepsilon M_k}{< x >^{|A|+\sigma_0}} \ , \\ \left|\partial_x^A \partial_\xi^B \zeta(t,x,\xi)\right| &\leq \frac{\varepsilon M_k}{< x >^{|A|+1+\sigma_0}} \ . \end{aligned}$$

En particulier pour $j = 1, \cdots, n$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_k}(t,x,\xi) &= 2t\delta_{jk} + \mathcal{O}(\varepsilon < t >) \ , \quad & \frac{\partial x_j}{\partial x_k}(t,x,\xi) &= \delta_{jk} + \mathcal{O}(\varepsilon < t >) \\ \frac{\partial \xi_j}{\partial \xi_k}(t,x,\xi) &= \delta_{jk} + \mathcal{O}(\varepsilon) \ , \quad & \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k}(t,x,\xi) &= \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial \xi_j}{\partial \xi_k} - i\frac{\partial x_j}{\partial \xi_k}\right)(t,x,\xi) = (1-2it)\delta_{jk} + \mathcal{O}(\varepsilon < t >)$$

Proposition II.2 (flot en temps petit)

Pour $(x,\xi) \in \dot{T}^*\mathbb{R}^n$ posons

$$\begin{aligned} r(t,x,\xi) &= x(t,x,\xi) - (x+2t\xi) \\ \zeta(t,x,\xi) &= \xi(t,x,\xi) - \xi \end{aligned}$$

Soit $T > 0$. Alors pour tous $A, B \in \mathbb{N}^n$ il existe $C_{AB} \geq 0$ telle que

$$\begin{aligned} |\partial_x^A \ \partial_\xi^B Z(t,x,\xi)| &\leq C_{AB} \ |\varepsilon| t| \\ |\partial_t \ \partial_x^A \ \partial_\xi^B Z(t,x,\xi)| &\leq C_{AB} \ \varepsilon \end{aligned}$$

pour $Z = r$ ou ζ, pour tout $|t| \leq T$ et tout $(x,\xi) \in T^*\mathbb{R}^n$ tel que $|\xi| \leq 2$.

La Proposition II.1 permet de préciser le flot à partir de n'importe quel point et ce, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Proposition II.3

Soit $(x,\xi) \in T^*\mathbb{R}^n$ *avec* $\frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2$. *Alors pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *on a*

$$\begin{cases} x(t,x,\xi) = x + 2t\xi + r(t,x,\xi) \\ \xi(t,x,\xi) = \xi + \zeta(t,x,\xi) \end{cases}$$

où

$$|r(t,x,\xi)| \leq C\varepsilon < t > \quad , \quad |\zeta(t,x,\xi)| \leq C\varepsilon$$

C *étant indépendante de* (x,ξ) *et de* ε.

Cependant, et c'est l'une des difficultés du problème, on n'a pas de bon contrôle (analogues à ceux de la Prop. II.1) des dérivées de r par rapport à ξ lorsque par exemple $|x|$ est très grand mais la bicaractéristique retraverse un vosinage de zéro (pour repartir vers l'infini). Par contre pour de tels points on peut quand même obtenir ce contrôle pour un temps limité.

Proposition II.4

Soit $(x,\xi) \in T^*\mathbb{R}^n$ *tel que* $\frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2$ *et* $x \cdot \xi \leq -c_0 < x > |\xi|$.
On pose

$$I_+ = \left\{ t \geq 0 \quad : \quad x(t,x,\xi) \cdot \xi(t,x,\xi) \leq \frac{1}{4} < x(t,x,\xi) > |\xi(t,x,\xi)| \right\}$$

Alors pour $t \in I_+$ on a

$$\begin{aligned} x(t,x,\xi) &= x + 2t\xi - z(-t, x(t,x,\xi) \ , \ \xi(t,x,\xi)) \\ \xi(t,x,\xi) &= \xi - \zeta(-t, x(t,x,\xi) \ , \ \xi(t,x,\xi)) \end{aligned}$$

où z et ζ ont été définies dans la Proposition II.1.
En outre on a

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_k}(t,x,\xi) = \delta_{jk} + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad , \quad \frac{\partial x_j}{\partial \xi_k}(t,x,\xi) = -2t\delta_{jk} + \mathcal{O}(\varepsilon < t >)$$

$$\frac{\partial \xi_j}{\partial \xi_k}(t,x,\xi) = \delta_{jk} + \mathcal{O}(\varepsilon < t >) \quad , \quad \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k}(t,x,\xi) = \mathcal{O}(\varepsilon)$$

En particulier

$$\left(\frac{\partial \xi_j}{\partial \xi_k} - i \frac{\partial x_j}{\partial \xi_k} \right)(t,x,\xi) = (1 + 2it)\delta_{jk} + \mathcal{O}(\varepsilon < t >)$$

où les $\mathcal{O}$ sont uniformes en (x,ξ).

III L'équation de phase

On introduit tout d'abord le domaine de définition de la phase $\varphi(\theta, x, \alpha)$. Ici $\alpha \in T^*\mathbb{R}^n$ est tel que $\frac{1}{2} \leq |\alpha_\xi| \leq 2$.

Définition III.1

Soit $\delta > 0$, $c_0 > 0$, $c_1 > 0$ *des petites constantes (à fixer).*
(i) Si $|\alpha_x.\alpha_\xi| \leq c_0 < \alpha_x > |\alpha_\xi|$ *on pose*

$$\Omega_\delta = \{(\theta, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \quad : \quad |x - x(\theta, \alpha)| \leq \delta < \theta >\}$$

(ii) Si $\alpha_x \cdot \alpha_\xi > c_0 < \alpha_x > |\alpha_\xi|$ *on pose*

$$\Omega_\delta = \{(\theta, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \ : \ |x - x(\theta, \alpha)| \leq \delta < \theta > \, , \ x.\alpha_\xi \geq -c_1 < x > |\alpha_\xi|\}$$

(iii) Si $\alpha_x \cdot \alpha_\xi < -c_0 < \alpha_x > |\alpha_\xi|$ *on pose*

$$\Omega_\delta = \{(\theta, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \ : \ |x - x(\theta, \alpha)| \leq \delta < \theta > \, , \ x.\alpha_\xi \leq -c_1 < x > |\alpha_\xi|\}$$

Commentaires

Les constantes c_0 et c_1 seront prises petites par rapport à $\frac{1}{4}$. Le cas (i) correspond aux points α qui sont sortants pour $\theta \geq 0$ et $\theta \leq 0$. Dans ce cas Ω_δ est un voisinage conique de la bicaractéristique. Dans le cas (ii) le point α est sortant pour $\theta \geq 0$ et rentrant pour $\theta \leq 0$. Alors Ω_δ peut être aussi écrit :

$$\Omega_\delta = \{(\theta, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \ : \ |x - x(\theta, \alpha)| \leq \delta < \theta >\} \cup \{(\theta, x) \in \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^n \, ,$$
$$|x - x(\theta, \alpha)| \leq \delta < \theta > \quad \text{et} \quad x.\alpha_\xi \geq -c_1 < x > |\alpha_\xi|\}$$

Le cas (iii) est le symétrique de celui-là.
Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant.

Théorème III.1

Il existe $\delta > 0$, $c_0 > 0$, $c_1 > 0$ tels que $\forall \alpha \in T^*\mathbb{R}^n$ avec $\frac{1}{2} \leq |\alpha_\xi| \leq 2$ il existe une fonction $\varphi = \varphi(\theta, x, \alpha)$ qui est C^∞ sur Ω_δ et qui satisfait

$$(i) \qquad \begin{cases} \varphi(0,x,\alpha) = (x-\alpha_x).\alpha_\xi + \frac{i}{2}|x-\alpha_x|^2 + \frac{|\alpha_\xi|^2}{2i} + g(x,\alpha) \\ \text{où} \quad |g(x,\alpha)| \leq C_N|x-\alpha_x|^N \quad , \quad \text{pour tout } N \in \mathbb{N} \ . \end{cases}$$

$$(ii) \qquad \begin{cases} \text{Pour tout } N \in \mathbb{N} \text{ il existe } C_N \geq 0 \text{ tel que } \forall(\theta,x) \in \Omega_\delta \ , \\ \left|\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}(\theta,x,\alpha) - p\left(x, \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(\theta,x,\alpha)\right)\right| \leq C_N \left(\dfrac{|x-x(\theta,\alpha)|}{<\theta>}\right)^N \end{cases}$$

$$(iii) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x}(\theta,x,\alpha) = \alpha_\xi + \mathcal{O}(1) \quad , \quad \forall(\theta,x) \in \Omega_\delta$$

$$(iv) \qquad Im\ \varphi(\theta,x,\alpha) = \frac{1}{2}\frac{|x-x(\theta,\alpha)|^2}{1+4\theta^2} + \mathcal{O}(1)\frac{|x-x(\theta,\alpha)|^2}{<\theta>^2} - \frac{1}{2}|\alpha_\xi|^2$$

$$(v) \qquad |\partial_x^A\varphi(\theta,x,\alpha)| \leq C_A \quad , \quad \forall A \in \mathbb{N}\setminus\{0\},$$

où $\mathcal{O}(1)$ et C_A sont indépendantes de (θ,x,α).

Idée de la preuve du Théorème III.1

On utilise la théorie des idéaux Lagrangiens développée par L. Hörmander ([H] Tome 4 Chap. 25).

Le résultat essentiel de cette théorie est un théorème de division précisé.

Théorème III.2

Soit $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_\eta)$ et $a,b \in \mathbb{R}^n$. Il existe alors des fonctions $q_k(\eta,a,b,g), r(a,b,g)$ qui sont C^∞ par rapport à η,a,b et linéaires par rapport à g telles que

$$g(\eta) = \sum_{k=1}^n q_k(\eta,a,b,g)(\eta_k + a_k + ib_k) + r(a,b,g)$$

De plus on a les estimations suivantes sur r et les q_j

$$\left|\partial_\eta^A \partial_{(a,b)}^B q_k(\eta,a,b,g)\right| + \left|\partial_{(a,b)}^A r(a,b,g)\right| \leq C_{A,B} \sum_{|\gamma|\leq N(A,B,n)} \int |\partial^\gamma g(\eta)| d\eta$$

Remarque III.3

Il résulte de l'égalité décrite dans le Théorème que

$$\begin{cases} r(a,0,g) & = g(-a) \\ \frac{\partial r}{\partial b_k}(a,0,g) & = -i\frac{\partial g}{\partial \eta_k}(-a)\ ,\ k = 1,\cdots,n\ . \end{cases}$$

Introduisons les fonctions

$$u_j(x,\xi,\alpha) = \xi_j - \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_j}(x,\alpha) = \xi_j - \alpha_\xi^j - i(x_j - \alpha_x^j)$$

On voit facilement que

$$\{u_j, u_k\} = 0\ ,\ \forall j,k = 1,\cdots,n$$

Faisons évoluer les u_j par le flot retrograde ie posons

$$\begin{aligned} v_j(\theta,x,\xi,\alpha)_j &= u_j \circ \chi_{-\theta}(x,\xi) \\ &= \xi_j(-\theta,x,\xi) - \alpha_\xi^j - i(x_j(-\theta,x,\xi) - \alpha_x^j) \end{aligned}$$

Alors on a également

$$\{v_j, v_k\} = 0\ ,\ \forall_j, k = 1\cdots,n$$

On sépare la preuve du Théorème III.1 en plusieurs cas suivant la nature du point α.

Cas où α est sortant pour $t \geq 0$

Posons

$$\begin{cases} \Lambda_+ & = \left\{\alpha \in T^*\mathbb{R}^n\ :\frac{1}{2} \leq |\alpha_\xi| \leq 2\ ,\ \alpha_x.\alpha_\xi \geq -c_0 < \alpha_x > |\alpha_\xi|\right\} \\ \Omega_\delta^+ & = \{(\theta,x)\ :\theta \geq 0, |x - x(\theta,\alpha)| \leq \delta\langle\theta\rangle\} \\ y & = x - x(\theta,\alpha) \\ \tilde{\Omega}_\delta^+ & = \{(\theta,y)\ :\theta \geq 0\ , |y| \leq \delta\langle\theta\rangle\} \end{cases}$$

Soit $\chi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\ ,\ \chi_0(t) = 1$ si $|t| \leq 1\ ,\ \chi_0(t) = 0$ si $|t| \geq 2$. On a alors le résultat suivant.

Théorème III.4

Il existe des constantes μ_0, δ *positives telles que si l'on pose pour* $\alpha \in \Lambda_+ \ , \ \theta \geq 0 \ , \ y \in \mathbb{R}^n \ , \ |y| \leq \delta\langle\theta\rangle \ , \ \eta \in \mathbb{R}^n \ , \ j = 1, \cdots, n$

$$g_j(\eta) = \chi_0(\frac{1}{\mu_0}\eta)v_j(\theta \ , \ y + x(\theta,\alpha), \frac{\eta}{\langle\theta\rangle} + \frac{1}{2}\frac{y}{\langle\theta\rangle} + \xi(\theta,\alpha), \alpha)$$

il existe des fonctions $a_j = a_j(\theta, y, \alpha), b_j = b_j(\theta, y, \alpha) \quad C^\infty$ *sur* $\tilde{\Omega}_\delta^+$ *telles que*

$$g_j(\eta) = \sum_{k=1}^{n} q_k(\eta, a, b, g_j)\left(\eta_k + a_k(\theta, y, \alpha) + ib_k(\theta, y, \alpha)\right),$$

pour tout $\eta \in \mathbb{R}^n$ *et tout* $(\theta, y) \in \tilde{\Omega}_\delta^+$*, où les* q_k *sont ceux qui ont été introduits dans le Théorème III.2.*

En outre, pour tout $(\theta, y) \in \tilde{\Omega}_\delta^+$ on a,

(i) $$|a(\theta, y, \alpha)| \leq 2\frac{|y|}{\langle\theta\rangle}.$$

(ii) $$|b(\theta, y, \alpha) + \frac{y\langle\theta\rangle}{1+4\theta^2}| \leq \sqrt{\delta}\frac{|y|}{\langle\theta\rangle},$$

(iii) $$|\partial_y^A a(\theta, y, \alpha)| + |\partial_y^A b(\theta, y, \alpha)| \leq \frac{C_A}{\langle\theta\rangle^{|A|}},$$

(iv)
$$a_j(0, y, \alpha) = \mathcal{O}(|y|^N) \ , \ b_j(0, y, \alpha) = -y_j + \mathcal{O}(|y|^N) \ , \ j = 1, \cdots, n, \forall N \in \mathbb{N}.$$

(v) $$|q_k(\eta, a, b, g_j) - \frac{1+2i\theta}{\langle\theta\rangle}\delta_{jk}| \leq C(\varepsilon + \delta) \text{ si } |\eta| \leq \delta,$$

(vi) $$|\partial_{(a,b)}^A \partial_\eta^B q_j(\eta, a, b, g_j)| \leq C(\mu_0) \text{ si } |A| + |B| \geq 1 \text{ et } |\eta| \leq \mu_0.$$

Idée de la preuve

D'après le Théorème III.2 il suffit de trouver a, b tels que $r(a, b, g_j) = 0 \ , \ j = 1, \cdots, n$. On écrit un développement de Taylor de r à l'ordre deux au point $(a, 0)$. En utilisant la remarque II.3 on est ramené à résoudre le système d'équations,

$$g_j(-a) - i\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g_j}{\partial \eta_k}(-a) + \sum_{p,q=1}^{n}\int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 r}{\partial b_p \partial b_q}(a, tb, g_j(.))dt \ b_p b_q = 0 \ .$$

Comme g_j s'exprime en fonction du flot, en utilisant l'expression de celui-ci donnée par la Proposition II.1 on ramène l'étude de ce système à celui d'une équation vectorielle du type $(a, b) = \Phi(a, b)$ que l'on résout par une méthode de point fixe dans l'ensemble

$$E = \left\{ (a, b) : |a| \leq 2\frac{|y|}{\langle\theta\rangle} \ , \ |b + \frac{y\langle\theta\rangle}{1 + 4\theta^2}| \leq \sqrt{\delta}\frac{|y|}{\langle\theta\rangle} \right\},$$

en se servant également des estimations sur les dérivées de r données par le Théorème III.2. ■

On introduit alors la notion d'idéal Lagrangien.

Définition III.5

Soit $\mathcal{O} = \left\{ (\theta, y, \eta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : |y| < \delta\langle\theta\rangle \ , |\eta - \frac{1}{2}y| < \delta \right\}$.

Soit $F = (F(., \alpha))_{\alpha\in\Lambda_+}$ *une famille de fonctions sur* $\mathcal{O}$*. On dira que* $F \in \mathcal{I}$ *si on peut écrire pour tout* $(\theta, y, \eta) \in \mathcal{O}$ *et tout* $\alpha \in \Lambda_+$

$$F(\theta, y, \eta, \alpha) = \sum_{j=1}^{n} f_j(\theta, y, \eta, \alpha) v_j \left(\theta, y + x(\theta, \alpha), \frac{\eta}{\langle\theta\rangle} + \xi(\theta, \alpha) \right)$$

où

$$\sup_{\substack{(\theta,y,\eta)\in\mathcal{O} \\ \alpha\in\Lambda_+}} |\partial_y^A \partial_\eta^B f(\theta, y, \eta, \alpha)| < +\infty \ , \ \forall A, B \in \mathbb{N}^n.$$

Voici quelques propriétés de $\mathcal{I}$.

Lemme III.6

a) $\mathcal{I}$ *est stable par crochet de Poisson.*

b) Soit $R = (R(., \alpha))_{\alpha\in\Lambda_+} \in \mathcal{I}$*. Supposons que* $R(\theta, y, \alpha)$ *soit indépendant de* η*. Alors pour tout* $N \in \mathbb{N}$ *il existe* $C_N > 0$ *tel que pour tout* $(\theta, y) \in \tilde{\Omega}_\delta$ *et tout* $\alpha \in \Lambda_+$ *on ait*

$$|R(\theta, y, \alpha)| \leq C_N |Im\Psi(\theta, y, \alpha)|^N$$

où

$$\Psi_R(\theta, y, \alpha) = \frac{1}{2}y_k - (a_k + ib_k)(\theta, y, \alpha) \ , \ k = 1, \cdots, n \ ,$$

les a_k, b_k *ayant été définies au Théorème III.4.*

Comme conséquence de ce résultat on a ce qui suit.

Corollaire III.6

Pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $C_N > 0$ telle que

$$\left| \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y_k} - \frac{\partial \psi_k}{\partial y_j} \right) (\theta, y, \alpha) \right| \leq C_N |Im\psi(\theta, y, \alpha)|^N .$$

On passe alors aux variables x, ξ originales i.e.

$$x = y + x(\theta, \alpha) \ , \ \xi = \frac{\eta}{\langle \theta \rangle} + \xi(\theta, \alpha) \ ,$$

pour $(\theta, x) \in \Omega_\delta$. Posons

$$\Phi_k(\theta, x, \alpha) = \xi_k(\theta, \alpha) + \frac{1}{\langle \theta \rangle} \left(\frac{1}{2}(x - x(\theta, \alpha)) - (a_k + ib_k)(\theta, x - x(\theta, \alpha), \alpha) \right) .$$

Le dernier point de la preuve du Théorème III.1 dans le cas $\alpha \in \Lambda_+$ est alors le suivant

Proposition III.7.

Pour $\alpha \in \Lambda_+$ et $(\theta, x) \in \Omega_\delta$ posons

$$\varphi(\theta, x, \alpha) = \int_0^1 (x - x(\theta, \alpha)).\Phi(\theta, sx + (1-s)x(\theta, \alpha), \alpha) ds + \theta p(\alpha) + \frac{1}{2i} |\alpha_\xi|^2 .$$

Alors φ vérifie toutes les conditions du Théorème III.1.

Remarquons que la preuve du Théorème III.1 dans le cas où $\alpha \in \Lambda_- = \{\alpha \in T^*\mathbb{R}^n : \frac{1}{2} \leq |\alpha_\xi| \leq 2 \ , \ \alpha_x.\alpha_\xi \leq c_0 \langle \alpha_x \rangle |\alpha_\xi|\}$ et $(\theta, x) \in \Omega_\delta^- = \{(\theta, x) : \theta \leq 0 \ , \ |x - x(\theta, \alpha)| \leq \delta \langle \theta \rangle\}$ est identique.

En particulier si $|\alpha_x.\alpha_\xi| \leq c_0 \langle \alpha_x \rangle |\alpha_\xi|$ on obtient une phase définie pour tout $\theta \in \mathbb{R}^n$.

La preuve de l'existence de la phase dans le cas des points entrants i.e. ceux vérifiant $|\alpha_x.\alpha_\xi| > c_0 \langle \alpha_x \rangle |\alpha_\xi|$ suit les mêmes idées ; elle est cependant un peu plus délicate car nous ne possédons de bonnes estimations sur le flot que dans un domaine limité de θ. Nous renvoyons le lecteur à notre article pour plus de détails.

IV Les équations de transport

Rappelons que l'ouvert Ω_δ a été introduit dans la Définition III.1. D'autre part le Théorème III.1 affirme l'existence d'une phase φ. Le présent paragraphe est consacré à l'existence des amplitudes. Le résultat principal est le suivant.

Théorème IV.1

Pour tout $\alpha \in T^*\mathbb{R}^n$ *tel que* $\frac{1}{2} \leq |\alpha_\xi| \leq 2$, *pour tout* $N \in \mathbb{N}$ *et tout* $\lambda \geq 1$ *il existe une amplitude* $a_N = a_N(\theta, x, \alpha, \lambda)$ *qui est* C^∞ *dans* Ω_δ *et qui est telle que*

$$(i) \qquad a_N(0, x, \alpha, \lambda) = 1$$

$$(ii) \qquad (i\lambda\partial_\theta - {}^tP)\left(e^{i\lambda\varphi(\theta,x,\alpha)}a_N(\theta, x, \alpha, \lambda)\right) = R_N(\theta, x, \alpha, \lambda)e^{i\lambda\varphi(\theta,x,\alpha)}$$

où

$$|R_N(\theta, x, \alpha, \lambda)| \leq C_N\left(\lambda^{-N} + \lambda^2\frac{|x - x(\theta, \alpha)|^N}{\langle\theta\rangle^N}\right)$$

uniformément en $(\theta, x, \alpha, \lambda)$.

$$(iii) \qquad |\partial_x^A a_N(\theta, x, \alpha, \lambda)| \leq C_{N,A}\langle\theta\rangle^{-\frac{n}{2}-|A|}\ ,\ \forall A \in \mathbb{N}^n$$

uniformément en $(\theta, x, \alpha, \lambda)$.

La preuve de ce résultat distingue les cas α sortants puis entrants. Comme c'était le cas précédemment le premier cas est plus facile à traiter. Le problème ici est que nous avons à résoudre une équation de transport non réelle dans le cadre C^∞. L'idée commune aux deux cas est de redresser le champ. Dans le cas « sortant »grâce à la décroissance des dérivées des coefficients en $\langle\theta\rangle^{-|A|}$ il est possible de tronquer brutalement le développement de Taylor des coefficients à un certain ordre pour se ramener au cas holomorphe. Par contre ceci n'est pas possible dans le cas « entrant ». Nous sommes alors contraints de prolonger tous les ingredients du problème presque analytiquement comme dans Melin-Sjöstrand [MS]. Cela conduit inévitablement à des complications importantes.

V Microlocalisations et utilisation de la transformation de FBI

Comme nous l'avons dit dans l'introduction l'idée de départ pour la construction d'un inverse est d'écrire $u = T^*Tu$, où T est la transformation de FBI classique, puis de déformer T en T_θ qui est une transformation de FBI générale. Le problème est que les constructions de la phase et de l'amplitude ont été faites microlocalement en α. Il est par conséquent nécessaire, avant de déformer T, d'introduire des troncatures microlocales.

Soit $\xi_0 \in S^{n-1}$ fixé. Soit $\chi_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\chi_0(s) = 1 \text{ si } s < \frac{3}{4}\ ,\ \chi_0(s) = 0 \text{ si } s \geq 1\ ,\ 0 \leq \chi_0 \leq 1.$$

On pose pour $j = 1, 2, 3$

$$\chi_j^+(x) = \chi_0\left(-\frac{x.\xi_0}{j\delta_1}\right)\ ,\ \chi_j^-(x) = \chi_0\left(\frac{x.\xi_0}{j\delta_1}\right)$$

où $\delta_1 > 0$ est à choisir.

Introduisons maintenant les troncatures en fréquence.

Soit ψ_0 , ψ_1 deux éléments de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tels que, $0 \leq \psi_j \leq 1$ et

$$\begin{cases} \psi_0(\xi) = 1 \text{ si } |\frac{\xi}{|\xi|} - \xi_0| \leq \delta_2 \text{ et } |\xi| \geq 2\delta_2 \\ \text{supp } \psi_0 \subset \{\xi : |\frac{\xi}{|\xi|} - \xi_0| \leq 2\delta_2 \text{ et } |\xi| \geq \delta_2\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi_1(\xi) = 1 \text{ si } a - \delta_2 \leq |\xi| \leq b + \delta_2 \\ \text{supp } \psi_1 \subset \{\xi : a - 2\delta_2 \leq |\xi| \leq b + 2\delta_2\} \end{cases}$$

où $a = \frac{6}{10}$, $b = \frac{19}{10}$ et $\delta_2 \leq \frac{1}{100}$ est à choisir.

Enfin on pose

$$\psi_2(\xi) = \psi_0(\xi)\psi_1(\xi).$$

Posons pour $t \in \mathbb{R}$,

$$U_\pm(t) = \chi_1^\pm(x)\psi_2(\frac{D}{\lambda})e^{-itP}.$$

Il s'en suit que l'on a,

$$U_\pm(t_1)U_\pm(t_2)^* = K_\pm(t_1 - t_2)\ ,$$

où

$$K_\pm(t) = \chi_1^\pm(x)\psi_2(\frac{D}{\lambda})e^{-itP}\psi_2(\frac{D}{\lambda})\chi_1^\pm\ .$$

Soit $\psi_3 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $0 \leq \psi_3 \leq 1$ et

$$\begin{cases} \psi_3(\xi) = 1 \text{ si } |\frac{\xi}{|\xi|} + \xi_0| \leq 3\delta_2 \text{ et } a - 3\delta_2 \leq |\xi| \leq b + 3\delta_2 \\ \text{supp } \psi_3 \subset \{\xi : |\frac{\xi}{|\xi|} + \xi_0| \leq 4\delta_2 \text{ et } a - 4\delta_2 \leq |\xi| \leq b + 4\delta_2\} \end{cases}$$

Le premier résultat de ce paragraphe est le suivant.

Théorème V.1

Soit $T > 0$. Pour tout $t \in [-T, T]$ et tout $\lambda \geq 1$ on peut écrire

$$K_{\pm}(t) = \chi_1^{\pm}\psi_2(\frac{D}{\lambda})\chi_2^{\pm}T^*_{\alpha\to x}\chi_3^{\pm}(\alpha_x)\psi_3(\alpha_\xi)T_{y\to\alpha}\left[e^{-itP}\chi_2^{\pm}\psi_2(\frac{D}{\lambda})\chi_1^{\pm}\right] + R_\lambda^{\pm}(t)$$

où

$$\|R_\lambda^{\pm}(t)u\|_{H^{2N}(\mathbb{R}^n)} \leq C_N\|u\|_{H^{-2N}(\mathbb{R}^n)}$$

pour tout $N \in \mathbb{N}$, uniformément en $(\lambda, t) \in [1, +\infty[\times[-T, T]$.

La preuve de ce théorème se fait de proche en proche en partant de l'égalité $T^*T = Id$ et en introduisant les troncatures une à une. Les restes sont exprimés en utilisant les formules explicites de T^* et T et en utilisant le lemme classique de Schur.

Ayant microlocalisé, on peut maintenant déformer T. Cela est exprimé dans l'énoncé suivant.

Théorème V.2

Soit

$$W^{\pm} = \left\{\alpha \in T^*\mathbb{R}^n : \frac{1}{2} \leq |\alpha_\xi| \leq 2\ ,\ |\alpha_x.\alpha_\xi| \leq c_0\langle\alpha_x\rangle|\alpha_\xi|\right\} \cup \{\alpha \in T^*\mathbb{R}^n :$$

$$\frac{1}{2} \leq |\alpha_\xi| \leq 2\ ,\ |\alpha_x.\alpha_\xi| > c_0\langle\alpha_x\rangle|\alpha_\xi| \text{ et } (\alpha_x, \alpha_\xi) \in \text{ supp } (\chi_3^{\pm}(\alpha_x)\psi_3(\alpha_\xi))\Big\}$$

Pour tout $t \in [-T, T]$ et tout $\alpha \in W^{\pm}$ on a

$$T\left[e^{-itP}\chi_2^{\pm}v\right](\alpha, \lambda) = c_n\lambda^{\frac{3n}{4}}\int e^{i\lambda\varphi(-\lambda t, y, \alpha)}a(-\lambda t, y, \alpha, \lambda)\chi_4^{\pm}(y).$$

$$\chi_5\left(\frac{y - x(-\lambda t, \alpha)}{\langle\lambda t\rangle}\right)\left[\chi_2^{\pm}v\right](y)dy + J_\lambda^{\pm}(t)v(\alpha)$$

où

$$\|e^{-\frac{\lambda}{2}|\alpha_\xi|^2}J_\lambda^{\pm}(t)v\|_{L^2(W^{\pm})} \leq \frac{C_M}{\lambda^M}\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\ ,\ \forall M \in \mathbb{N}\ ,\ \forall\lambda \geq 1\ ,\ \forall|t| \leq T\ ,$$

et

$$\chi_4^{\pm}(y) = \chi_0(\mp\frac{y.\xi_0}{5\delta_1}) \qquad \text{supp } \chi_5 \subset \{|y| \leq \delta\}\ ,\ \chi_5(y) = 1 \text{ si } |y| \leq \delta/2\ .$$

En combinant les théorèmes V.1 et V.2 on arrive à la conclusion suivante.

Corollaire V.3.

On peut écrire pour $t \in [-T, T]$,

$$K_{\pm}(t) = I + II + III$$

où

$$I = c_n \lambda^{\frac{3n}{2}} \chi_1^{\pm} \psi_2(\frac{D}{\lambda}) \chi_2^{\pm} \left[\iint e^{i\lambda F(-\lambda t, x, y, \alpha)} a(-\lambda t, y, \alpha, \lambda) \chi_2^{\pm}(y) \chi_3^{\pm}(\alpha_x) \psi_3(\alpha_\xi) \right.$$

$$\left. \chi_5(\frac{y - x(-\lambda t, \alpha)}{\langle \lambda t \rangle})(\psi_2(\frac{D}{\lambda}) \chi_1^{\pm} u)(y) dy d\alpha \right]$$

$$F(-\lambda t, x, y, \alpha) = \varphi(-\lambda t, y, \alpha) - (x - \alpha_x).\alpha_\xi + \frac{i}{2}|x - \alpha_x|^2 + \frac{i}{2}|\alpha_\xi|^2$$

$$|a(-\lambda t, y, \alpha, \lambda)| \leq C \langle \lambda t \rangle^{-\frac{n}{2}} \ .$$

$$\|II\|_{H^{2N}} \leq C_N \|u\|_{H^{-2N}} \ , \ \forall N \in \mathbb{N}$$

$$\|III\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \ .$$

On arrive alors à la dernière étape de ce travail.

VI L'estimation de dispersion

Rappelons qu'il s'agit de démontrer qu'il existe $C > 0$ telle que

$$\|K_{\pm}(t)u\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{|t|^{\frac{n}{2}}} \|u\|_{L^1}$$

pour tout $0 < |t| \leq T$ et tout $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Comme $L^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{-2N}(\mathbb{R}^n)$ et $H^{2N}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$ si $2N > \frac{n}{2}$ le Corollaire V.3 montre que l'estimation désirée est vraie pour les termes II et III entrant dans la composition de $K_{\pm}(t)$. Il reste à estimer le terme I.

Si on pose

$$k^{\pm}(t, x, y, \lambda) = c_n \lambda^{\frac{3n}{2}} \int e^{i\lambda F(-\lambda t, x, y, \alpha)} a(-\lambda t, y, \alpha, \lambda) \chi_2^{\pm}(y) \chi_3^{\pm}(\alpha_x) \psi_3(\alpha_\xi) \chi_5 \left(\frac{y - x(-\lambda t, \alpha)}{\langle \lambda t \rangle} \right) d\alpha$$

il suffit de montrer que,

$$|k^{\pm}(t, x, y, \lambda)| \leq \frac{C}{|t|^{\frac{n}{2}}} \ , \ \forall 0 < |t| \leq T.$$

Pour démontrer une telle estimation on est tenté d'appliquer une méthode de phase stationnaire. On commence par chercher les points critiques de la phase F i.e. à t, x, y, λ fixés les α tels que

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_x}(-\lambda t, x, y, \alpha) = \frac{\partial F}{\partial \alpha_\xi}(-\lambda t, x, y, \alpha) = 0$$

Il se trouve que l'on peut les déterminer complètement. Les α critiques sont tels que

$$\alpha_x = x \ , \ x(-\lambda t, (x, \alpha_\xi)) = y$$

D'autre part, dans l'intégrale donnant $k^\pm$, on a $|y - x(-\lambda t, \alpha)| \leq \delta\langle \lambda t\rangle$. Si λt est très grand on peut donc être très loin du point critique de sorte qu'une méthode de phase stationnaire a peu de chance de s'appliquer. Par contre si $|\lambda t| \leq 1$ on pourra appliquer une telle méthode.

On traite alors différemment les cas $|\lambda t| \geq 1$ et $|\lambda t| \leq 1$. Lorsque $\lambda t \geq 1$ (pour k^+) sur le support des troncatures en α on a $\alpha_x.\alpha_\xi \leq c_0\langle \alpha_x\rangle |\alpha_\xi|$ de sorte que l'on est « sortant »pour $\theta \leq 0$. Ici $\theta = -\lambda t$. Dans ce cas la Proposition II.1 montre que

$$\frac{\partial x_j}{\partial \alpha_\xi^k}(-\lambda t, \alpha) = -2\lambda t \delta_{jk} + \mathcal{O}(\varepsilon\langle \lambda t\rangle)$$

D'autre part d'après le théorème III.1 (iv) on a

$$|e^{i\lambda F(-\lambda t, x, y, \alpha)}| \leq e^{-\frac{\lambda}{2}|x-\alpha_x|^2} e^{-\frac{\lambda}{16}\frac{|y - x(-\lambda t, \alpha)|^2}{\langle \lambda t\rangle^2}}$$

On fait alors le changement de variables

$$\tilde{\alpha}_x = \alpha_x \ , \ x(-\lambda t, \alpha) = \tilde{\alpha}_\xi$$

et grâce à l'estimation ci-dessus on a

$$|\det \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial \alpha}| \geq (\lambda t)^n$$

Ces ingrédients mis bout à bout fournissent l'estimation désirée de k^+. Le cas $\lambda t \leq -1$ (pour k^+) est un peu plus délicat mais là encore c'est la convexité de $\mathrm{Im}\varphi$ qui fournit le résultat. Lorsque $|\lambda t| \leq 1$ on se tourne vers une méthode de phase stationnaire. Là on est confronté à deux difficultés. La première vient du fait que la phase n'est pas réelle. Heureusement ce cas a été étudié dans la littérature : par Hörmander [H] tome 1 par exemple. Ses résultats sont très précis puisqu'il donne un équivalent de l'integrale (et même un développement) lorsque $\lambda \to +\infty$. Cependant une hypothèse essentielle dans ces résultats est une borne inférieure uniforme du Hessien de la phase F. Malheureusement cette hypothèse n'est pas vérifiée dans notre cas puisque le Hessien dégénére lorsque $\lambda t \to 0$. Ceci dit, nous n'avons pas besoin ici d'un équivalent de l'intégrale mais juste d'une majoration et là il a été montré par d'autres auteurs qu'une simple méthode d'intégration par partie peut aboutir. En effet, après avoir étudié très précisément la phase F pour λt petit on fait des intégrations par parties à l'aide du champ de vecteurs

$$L = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \alpha_x}.\frac{\partial}{\partial \alpha_x} + \frac{1}{D}.\frac{\partial \bar{F}}{\partial \alpha_\xi}.\frac{\partial}{\partial \alpha_\xi},$$

où $D = |\theta|$ ou bien $D = |x - y|$ suivant les cas.

Ayant démontré l'estimation de dispersion on obtient l'inégalité de Strichartz pour $U_\pm(t)$ i.e.

$$\|U_\pm(.)u_0\|_{L^q(I,L^r(\mathbb{R}^n))} \leq C\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Comme $\chi_1^+(x) + \chi_1^-(x) \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ on en déduit

$$\|\psi_2(\frac{D}{\lambda})e^{-itP}u_0\|_{L^q(I,L^r(\mathbb{R}^n))} \leq C\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \ .$$

Par une partition de l'unité (pour « sommer »sur tous les $\xi_0 \in S^{n-1}$) puis par une technique classique de Littlewood-Paley on aboutit à l'inégalité de Strichartz pour e^{-itP}, ce qui était le but recherché.

Références

[B] N. Burq : Estimations de Strichartz pour des perturbations à longue portée de l'opérateur de Schrödinger. *Séminaire Équations aux Dérivées partielles 2001-2002 exposé n° XI. École Polytechnique.*

[BGT] N. Burq - P. Gérard - N. Tzvetkov : Strichartz inequalities and the non linear Schrödinger equation on compact manifold. American Journal of math 126 (2004) 569-605.

[CK] M. Christ - A. Kiselev : Maximal functions associated to filtrations. J. Funct. Anal. 179 (2001) 409-425.

[CS] G.M. Constantin - T.H. Savits : A multivariate Faa di Bruno formula with applications. *Trans AMS vol.348 n° 2 (1996), 503-520.*

[D] S.I. Doi : Smoothing effects of Schrödinger evolution groups on Riemannian manifolds. *Duke Math. J. 82 (1996), 679-706.*

[GV] J. Ginibre - G. Velo : Smoothing properties and retarted estimates for some dispersive evolution equations. *Comm. Math. Phys 144 (1992), 163-188.*

[H] L. Hörmander : The analysis of linear partial differential operators vol.1 and 4. Grundhehren. *Springer*

[HTW] A. Hassel - T. Tao - J. Wunsh : A strichartz inequality for the Schrödinger equation on non mapping asymptotically conic manifolds. *Preprint.*

[KT] M. Keel - T. Tao : End point Strichartz estimate. *Amer. Math. J. 120 (1998), 955-980.*

[MS] A. Melin - J. Sjöstrand : Fourier integral operators with complex valued phase functions. *Springer Lecture Notes in Mathematics 459, 121-223.*

[Sj] J. Sjöstrand : Singularités analytiques microlocales *Astérisque 95 (1982) 1-205.*

[St] R. Strichartz : Restriction of Fourier transform to quadratic surfaces and decay of solutions to the wave equation. *Duke Math. J., 44 (1977), 705-714.*

[ST] G. Staffilani - D. Tataru : Strichartz estimates for a Schrödinger operator with non smooth coefficients. *Comm. on PDE 27 (5 & 6) (2002), 1337-1372.*

[RZ1] L. Robbiano - C. Zuily : Microlocal analytic smoothing effect for the Schrödinger equation. *Duke Math J. 100, n°1, 93-129.*

[RZ2] L. Robbiano - C. Zuily : Analytic theory for the quadratic scattering wave front set and application to the Schrödinger equation *Asterisque 283 (2002), 1-128.*

[SS] H. Smith - C. Sogge : Global Strichartz estimates for non trapping perturbations of the Laplacian. *Comm on PDE 25 (11 & 12) (2000), 2171-2183.*

[Y] K. Yajima : Existence of solutions for Schrödinger evolution equations. *Comm. Math. Phys. 110 (1987), 415-426.*