SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2006-2007

Nicolas Burq

Existence globale pour l'équation des ondes semi linéaire H^1-critique dans des domaines de dimension 3

Séminaire É. D. P. (2006-2007), Exposé n° I, 8 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2006-2007____A1_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

EXISTENCE GLOBALE POUR L'ÉQUATION DES ONDES SEMI LINÉAIRE H^1-CRITIQUE DANS DES DOMAINES DE DIMENSION 3.

par

Nicolas Burq

Résumé. — On démontre que l'équation des ondes défocalisante quintique avec des conditions aux limites de Dirichlet est globalement bien posée sur tout domaine régulier et borné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. La démonstration repose sur des estimations L^5 pour le projecteur spectral obtenues récemment par Smith et Sogge [**12**], combinées avec une étude précise du problème aux limites. Ce travail a été obtenu en collaboration avec G. Lebeau. et F. Planchon

1. Introduction

Soit $\Omega \in \mathbb{R}^3$ un domaine borné, régulier à bord, $\partial\Omega$. On considère le Laplacien agissant sur les fonctions, avec conditions aux limites de Dirichlet. On s'interesse dans cet article à décrire les relations entre d'une part certaines estimées L^p pour les projecteurs spectraux obtenues récemment par H. Smith et C. Sogge [**12**], et d'autre part les estimations de Strichartz pour les solutions de l'équation des ondes dans Ω. D'une manière assez surprenante, ces relations aparaîssent de manière très simple, naturelle (et optimales, au moins dans une certaine plage d'indices), et sont reliées à un travail de Mockenhaupt, Seeger et Sogge sur les opérateurs intégraux de Fourier ([**7**], Corollary 3.3). Notre motivation vient de l'équation des ondes (avec données initiales réelles) dans Ω,

$$(1.1)\qquad \begin{aligned} &(\partial_t^2 - \Delta)u + u^5 = 0, \qquad \text{in } \mathbb{R}_t \times \Omega \\ &u\,|_{t=0} = u_0, \qquad \partial_t u\,|_{t=0} = u_1, \qquad u\,|_{\mathbb{R}_t\times\partial\Omega} = 0, \end{aligned}$$

pour laquelle l'énergie

$$E(u)(t) = \int_\Omega \Big(\frac{|\nabla u|^2(t,x) + |\partial_t u|^2(t,x)}{2} + \frac{|u|^6(t,x)}{6}\Big)dx = E(u)(0)$$

est conservée. Notre résultat principal est le suivant:

Théorème 1. — *Pour tout* $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ *il existe une unique solution de* (1.1) *(globale en temps), u, dans l'espace*

$$X = C^0(\mathbb{R}_t; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}_t; L^2(\Omega)) \cap L^5_{loc}(\mathbb{R}; L^{10}(\Omega)).$$

Remarque 1. — A notre connaissance, le fait que des estimations de dispersion affaiblies peuvent néanmoins impliquer des estimations de Strichartz optimales (et invariantes d'échelle) a été remarqué d'abord par G. Lebeau [**6**]. Il faut aussi remarquer que les résultats de Lebeau, bien que ne s'appliquant qu'au cas de l'intérieur de domaines strictement convexes, sont néanmoins beaucoup plus précis que ceux que nous présentons ici et s'appliqueraient à l'équation des ondes H^1-critique en dimension d'espace supérieures également.

Remarque 2. — La principale difficulté pour démontrer le théorème 1 est que, le problème étudié étant critique, nous ne pouvons nous permettre aucune perte dans les estimées que nous démontrons. Les estimées de Strichartz démontrées par D.Tataru [**15**] pour des métriques Lipschitz (voir aussi les travaux de R. Anton [**1**] pour Schrödinger) permettraient certainement d'améliorer le résultat classique (non linéarité cubique), mais ne permettraient certainement pas de traiter le cas des non linéarités quintiques

Remarque 3. — Finalement, on peut remarquer que nos résultats peuvent être localisés en espace et s'appliquent donc aussi à l'extérieur d'un obstacle, ce qui étend les résultats de Smith et Sogge [**11**] obtenus antérieurement pour des obstacles convexes.

Pour $s \geq 0$, on notera par la suite $H^s_D(\Omega)$ le domaine de l'opérateur $(-\Delta_D)^{s/2}$ ($H^s_D = H^s_0(\Omega)$ pour $0 \leq s < 3/2$).

2. Existence locale

Le résultat d'existence locale (en temps) pour (1.1) est en fait une conséquence facile de résultats récents de Smith et Sogge [**12**] sur le projecteur spectral défini par $\Pi_\lambda = 1_{\sqrt{-\Delta_D} \in [\lambda, \lambda+1[}$.

Théorème A **(Smith-Sogge** [**12**, Theorem 7.1]**).** — *Soit $\Omega \in \mathbb{R}^3$ un domaine à bord borné, régulier. Alors*

$$\|\Pi_\lambda u\|_{L^5(\Omega)} \leq \lambda^{\frac{2}{5}} \|u\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.1}$$

On déduit de ce résultat des estimations de Strichartz optimales.

Théorème 2. — *Supposons que pour un $2 \leq q < +\infty$, le projecteur spectral Π_λ vérifie*

$$\|\Pi_\lambda u\|_{L^q(\Omega)} \leq \lambda^\delta \|u\|_{L(\Omega)}. \tag{2.2}$$

Alors la solution de l'équation des ondes $v(t,x) = e^{it\sqrt{-\Delta_D}} u_0$ vérifie

$$\|v\|_{L^q((0,2\pi)_t \times \Omega_x)} \leq C \|u_0\|_{H_D^{\delta + \frac{1}{2} - \frac{1}{q}}}. \tag{2.3}$$

Démonstration. — La preuve consiste à combiner les estimations de Sobolev en temps avec l'estimation de projecteur spectral en espace

On note $(e_\lambda(x))$ la base orthonormale de $L^2(\Omega)$ formée des fonctions propres de $-\Delta_D$ associées aux valeurs propres (λ^2). On définit un opérateur autoadjoint abstrait $A = [\sqrt{-\Delta_D}]$ où $[x]$ est la partie entiere de x,

$$A(e_\lambda) = [\lambda] e_\lambda$$

On prouve d'abord l'estimation de Strichartz ou on a remplacé v par $\widetilde{v} = e^{itA}u_0$. On décompose $\widetilde{v}(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} v_k(t,x)$ avec

$$\widetilde{v}_k(t,x) = \sum_{\lambda\in\sigma(\sqrt{-\Delta_D})\cap[k,k+1)} e^{itk}u_\lambda e_\lambda(x), \qquad u_0 = \sum_\lambda u_\lambda e_\lambda(x).$$

D'après la formule de Plancherel (pour x fixé),

$$\|\widetilde{v}(\cdot,x)\|^2_{H^s(0,2\pi)} = \sum_{k\in\mathbb{N}}(1+k)^{2s}\|\widetilde{v}_k(\cdot,x)\|^2_{L^2(0,2\pi)}\,;$$

et donc, d'après l'injection de Sobolev en variable temporelle pour la première inégalité, (2.2) pour la dernière inégalité avec $s = \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$, et le fait que $q \geq 2$ pour passer de la ligne 3 à la ligne 4,

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{v}\|^2_{L^q(\Omega;L^q(0,2\pi))} &\leq C\|\widetilde{v}\|^2_{L^q(\Omega;H^s(0,2\pi))} = \|\|\widetilde{v}(\cdot,x)\|^2_{H^s(0,2\pi)}\|_{L^{q/2}(M)}\\
&\leq C\|\sum_k(1+k)^{1-\frac{2}{q}}\|\widetilde{v}_k(\cdot,x)\|^2_{L^2(0,2\pi)}\|_{L^{q/2}(\Omega)}\\
&\leq C\sum_k(1+|k|)^{1-\frac{2}{q}}\|\widetilde{v}_k\|^2_{L^q(\Omega;L^2_t(0,2\pi))}\\
&\leq C\sum_k(1+|k|)^{1-\frac{2}{q}}\|\widetilde{v}_k\|^2_{L^2((0,2\pi);L^q(\Omega))}\\
&\leq C\sum_k\sum_{\lambda\in\sigma(\sqrt{-\Delta_D})\cap[k,k+1)}(1+|k|)^{2\delta+1-\frac{2}{q}}|u_\lambda|^2 \sim \|u_0\|^2_{H_D^{\delta+\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

ce qui démontre l'estimation de Strichartz pour e^{itA}. On revient à $v = e^{it\sqrt{-\Delta_D}}u_0$ qui vérifie

$$(i\partial_t + A)v = (A - \sqrt{-\Delta_D})v,\ v\mid_{t=0}= u_0,$$

En écrivant la formule de Duhamel, et en utilisant que e^{itA} vérifie Strichartz, qu'il envoie $H^s_D(\Omega)$ dans lui même et enfin que $(A - \sqrt{-\Delta_D})$ est borné sur $H^s_D(\Omega)$, on en déduit Strichartz pour $e^{it\sqrt{-\Delta_D}}$ □

Corollaire 2.1. — *Soit u solution de*

$$(\partial_t^2 - \Delta)u = 0, \quad u\mid_{\partial\Omega}= 0, \quad u\mid_{t=0}= u_0, \quad \partial_t u\mid_{t=0}= u_1.$$

Alors

$$\|u\|_{L^5((0,1);L^{10}(\Omega))} \leq C\left(\|u_0\|_{H^1(\Omega)} + \|u_1\|_{L^2(\Omega)}\right). \tag{2.4}$$

et donc pour toute donnée initiale $(u_0,u_1) \in H^1_0(\Omega)\times L^2(\Omega)$, l'équation des ondes semi linéaire (1.1) *est localement bien posée dans*

$$X_T = C^0([0,T];H^1_0(\Omega)) \cap L^5((0,T);L^{10}(\Omega)) \times C^0([0,T];L^2(\Omega))$$

(globalement pour les données initiales suffisament petites).

3. Existence globale

En fait nos estimations de Strichartz, combinées avec un argument de non concentration, sont assez fortes pour obtenir l'existence *globale* en temps

Le but est donc de démontrer que si $t_0 < +\infty$ et $x_0 \in \overline{\Omega}$ alors on peut prolonger la solution au voisinage de (t_0, x_0). Par compacite de $\overline{\Omega}$, on en déduit qu'on peut prolonger la solution pour $t > t_0$. Par translation en temps-espace, on se ramène à $t_0 = 0, x_0 = 0$.

La première étape consiste à raffiner nos estimations de Strichartz. D'après (2.3), un argument de type TT^*, le lemme de Christ-Kiselev [**3**] et la régularité elliptique L^p pour le problème de Dirichlet (qui permet de passer des puissances du Laplacien à travers l'équation puis de convertir cela en dérivées fractionnaires par interpolation) impliquent:

Proposition 3.1. — *Soient u, f solutions de*

$$(\partial_t^2 - \Delta)u = f, \quad u\,|_{\partial\Omega} = 0, \quad u\,|_{t=0} = u_0, \quad \partial_t u\,|_{t=0} = u_1$$

alors

$$\begin{aligned}(3.1)\quad \|u\|_{L^5((0,1);W_0^{\frac{3}{10},5}(\Omega))} &+ \|u\|_{C^0((0,1);H_0^1(\Omega))} + \|\partial_t u\|_{C^0((0,1);L^2(\Omega))} \\ &\leq C\left(\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u_1\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^{\frac{5}{4}}((0,1);W^{\frac{7}{10},\frac{5}{4}}(\Omega))}\right).\end{aligned}$$

On remarque maintenant que si $f = u^5$, on a

$$\begin{aligned}\|u^5\|_{L^{\frac{5}{4}}((0,1);L^{\frac{30}{17}}(\Omega))} &\leq \|u\|^4_{L^5((0,1);L^{10}(\Omega))}\|u\|_{L^\infty((0,1);L^6(\Omega))}, \\ (3.2)\qquad \|\nabla_x(u^5)\|_{L^{\frac{5}{4}}((0,1);L^{\frac{10}{9}}(\Omega))} &= 5\|u^4\nabla_x u\|_{L^{\frac{5}{4}}((0,1);L^{\frac{10}{9}}(\Omega))} \\ &\leq 5\|u\|^4_{L^5((0,1);L^{10}(\Omega))}\|u\|_{L^\infty((0,1);H^1(\Omega))}.\end{aligned}$$

Si on interpole entre ces deux inégalités, en remarquant que

$$\|g\|_{W^{\frac{7}{10},\frac{5}{4}}(\Omega)} \leq C\|g\|^{3/10}_{L^{\frac{30}{17}}(\Omega)}\|\nabla_x(g)\|^{7/10}_{L^{\frac{10}{9}}(\Omega)},$$

on obtient

$$(3.3)\quad \|u^5\|_{L^{\frac{5}{4}}((0,1);W^{\frac{7}{10},\frac{5}{4}}(\Omega))} \;\leq\; C\|u\|^4_{L^5((0,1);L^{10}(\Omega))}\|u\|^{\frac{3}{10}}_{L^\infty((0,1);L^6(\Omega))}\|u\|^{\frac{7}{10}}_{L^\infty((0,1);H^1(\Omega))}.$$

La suite de l'argument consiste alors, d'après les idées de Struwe [**13**], Grillakis [**4**] et Shatah-Struwe [**9, 10**], à localiser ces estimations dans des cônes de lumière et d'utiliser que, grace à une estimation de type Morawetz, la norme $L_t^\infty; L_x^6$ est petite dans de tels cônes.

3.1. L'estimée L^6. — On définit

$$K_S^T = \{(x,t); |x| < -t, S < t < T\} \cap \Omega, \qquad M_S^T = \{x; |x| = -t, S < t < T\} \cap \Omega$$

et le flux à travers M_S^T

$$\text{Flux } (u, M_S^T) = \int_{M_S^T} \langle e(u), \nu\rangle d\sigma(x,t)$$

qui vérifie (voir Rauch [**8**] ou [**11**, (3.3')])

$$(3.4)\quad \int_{x\in\Omega,|x|<-T}\Big(\frac{|\partial_t u|^2+|\nabla_x u|^2}{2}+\frac{|u|^6}{6}\Big)(x,T)dx+\text{ Flux }(u,M_S^T)$$
$$=\int_{x\in\Omega,|x|<-S}\Big(\frac{|\partial_t u|^2+|\nabla_x u|^2}{2}+\frac{|u|^6}{6}\Big)(x,S)dx=E_{loc}(S).$$

On a alors

Proposition 3.2. — *Supposons que $x_0\in\overline{\Omega}$. Alors pour toute solution u de* (1.1)*, on a*

$$(3.5)\quad \lim_{t\to t_0^-}\int_{x\in\Omega\cap\{|x-x_0|<t_0-t\}}u^6(t,x)dx=0.$$

Démonstration. — On suit [**13, 4, 9, 10**]. La nouveauté par rapport à cette approche très classique est que quand on démontre cette inégalité de Morawetz qui permet le contrôle de la norme L^6, des termes de bord apparaîssent, qu'il est nécessaire de contrôler. Dans le cas de l'extérieur d'un convexe, ces termes de bord ont le bon signe (cf Smith Sogge [**11**]. En général, ce n'est pas le cas. Néanmoins, le résultat suivant permet de contrôler ces termes.

Lemme 3.3. — *On suppose que u est solution de* (1.1)*. Alors*

$$(3.6)\quad \Big\|\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big\|_{L^2((0,t_0)\times\partial\Omega)}\le CE(u)^{1/2}$$

où $\frac{\partial u}{\partial\nu}$ est la trace sur le bord de la dérivée normale de u.

La preuve suit une démonstration classique du résultat analogue pour l'équation *linéaire*:

Démonstration. — Soit $Z\in C^\infty(\Omega;T\Omega)$ un champ de vecteur dont la restriction à $\partial\Omega$ est égale à $\frac{\partial}{\partial\nu}$. Calculons, pour $0<T<t_0$

$$\int_0^T\int_\Omega[(\partial_t^2-\Delta),Z]u(t,x)\cdot u(t,x)dxdt$$
$$=\int_0^T\int_\Omega\big((\partial_t^2-\Delta)Zu(t,x)-Z(\partial_t^2-\Delta)u(t,x)\big)\,u(t,x)dxdt\,.$$

On intègre par parties et on obtient

$$(3.7)\quad \int_0^T\int_\Omega[(\partial_t^2-\Delta),Z]u(t,x)\cdot u(t,x)dxdt=\int_0^T\int_{\partial\Omega}\Big|\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|^2d\sigma dt$$
$$+\int_0^T\int_\Omega-(Zu)u^5(t,x)+Z(u^5)u(t,x)dxdt+\Big[\int_\Omega\partial_t(Zu)\cdot udx\Big]_0^T-\Big[\int_\Omega(Zu)\cdot\partial_t udx\Big]_0^T.$$

D'un autre coté, si $Z = \sum_j a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$, l'intégration par parties donne (en tenant compte de la condition de Dirichlet au bord)

$$\begin{aligned}\Big|\int_\Omega -(Zu)u^5(t,x) + Z(u^5)u(t,x)dxdt\Big| &= \frac{4}{6}\Big|\int_0^T\int_\Omega Z(u^6)(t,x)dx\Big| \\ &= \frac{4}{6}\Big|\int_0^T\int_\Omega \sum_j \frac{\partial a_j}{\partial x_j}u^6 dx\Big| \leq CE(u)\end{aligned} \tag{3.8}$$

tandis que

$$\Big|\Big[\int_\Omega \partial_t(Zu)udx\Big]_0^T - \Big[\int_\Omega (Zu)\partial_t udx\Big]_0^T\Big| \leq CE(u), \tag{3.9}$$

et $[(\partial_t^2 - \Delta), Z] = -[\Delta, Z]$ est un opérateur différentiel de degré 2 en variables x et est donc continu de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$. On en déduit

$$\Big|\int_{t=0}^T\int_\Omega [(\partial_t^2 - \Delta), Z]u(t,x)\overline{u}(t,x)dxdt\Big| \leq CE(u). \tag{3.10}$$

Comme nos constantes sont uniformes par rapport à $0 < T < t_0$, les équations (3.8), (3.9) (3.10) et (3.7) donnent (3.6). □

□

3.2. Existence globale.

— L'étape principale dans la preuve de l'existence globale est la suivante:

Proposition 3.4. — *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $t < 0$ tel que*

$$\|u\|_{(L^5;L^{10})(K_t^0)} < \varepsilon. \tag{3.11}$$

Soit $\breve{u}$ une extension convenable de u en dehors de K_t^0 (coincidant avec u dans K_t^0) et telle que

$$\begin{aligned}\|(\breve{u})^5\|_{L^{\frac{5}{4}}((t,t');L^{\frac{30}{17}}(\Omega)} &\leq \|\breve{u}\|^4_{L^5((t,t');L^{10}(\Omega))}\|\breve{u}\|_{L^\infty((t,t');L^6(\Omega)} \\ &\leq C\|u\|^4_{(L^5;L^{10})(K_t^{t'}))}\|u\|_{(L^\infty;L^6)(K_t^0)}.\end{aligned} \tag{3.12}$$

D'un autre coté, $\nabla_x(\breve{u})^5 = 5(\breve{u})^4\nabla_x\breve{u}$ et

$$\begin{aligned}\|\nabla_x(\breve{u})^5\|_{L^{\frac{5}{4}}((t,t');L^{\frac{10}{9}}(\Omega)} &\leq 5\|\breve{u}\|^4_{L^5((t,t');L^{10}(\Omega))}\|\nabla_x\breve{u}\|_{L^\infty((t,0);L^2(\Omega)} \\ &\leq C\|u\|^4_{(L^5;L^{10})(K_t^{t'})}\|u\|_{L^\infty;H^1(\Omega)}.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Par interpolation complexe, comme pour (3.3),

$$\|(\breve{u})^5\|_{L^{\frac{5}{4}}((t,t');W^{\frac{7}{10},\frac{5}{4}}(\Omega))} \leq C\|u\|^4_{(L^5;L^{10})(K_t^{t'})}\|u\|^{\frac{7}{10}}_{L^\infty;H^1(\Omega)}\|u\|^{\frac{3}{10}}_{(L^\infty;L^6)(K_t^0)}.$$

Soit w la solution (qui par vitesse finie de propagation coincide avec u sur K_t^0) de

$$(\partial_s^2 - \Delta)w = -(\breve{u})^5, \qquad w\mid_{\partial\Omega} = 0, \qquad (w-u)\mid_{s=t} = \partial_s(w-u)\mid_{s=t} = 0,$$

D'après (3.1), et l'injection de Sobolev $W^{\frac{3}{10},5}(\Omega) \mapsto L^{10}(\Omega)$, on obtient

$$\begin{aligned}(3.14)\quad \|u\|_{(L^5;L^{10})(K_t^{t'})} &\leq \|w\|_{L^5((t,t');L^{10}(\Omega))} \leq C\|w\|_{(L^5((t,t');W^{\frac{3}{10},5})(\Omega))} \\ &\leq CE(u) + C\|u\|^4_{(L^5;L^{10})(K_t^{t'})}\|u\|^{\frac{7}{10}}_{L^\infty;H^1(\Omega)}\|u\|^{\frac{3}{10}}_{(L^\infty;L^6)(K_t^0)}.\end{aligned}$$

Finalement, d'après la proposition 3.2, (3.14) et la continuité de l'application $t' \in [t, 0) \to \|u\|_{(L^5;L^{10})(K_t^{t'})}$ (qui vaut 0 pour $t' = t$), il existe t (proche de 0) tel que

$$\|u\|_{(L^5;L^{10})(K_t^0)} \leq 2CE(u).$$

ce qui implique la proposition 3.4 (en prenant $t < 0$ plus petit).

La fin de la preuve de l'existence globale est assez simple: On déduit de l'estimation précédente que

$$\lim_{t\to 0}(u\mid_{\{|x|\leq -t\}\cap\Omega}, \partial_t u\mid_{\{|x|\leq -t\}\cap\Omega}) = 0$$

dans $H^1 \times L^2$. On en déduit pour $\eta > 0$ et $|\delta|$ assez petits ($\delta < 0$),

$$\|(u(\delta, x)1_{|x|\leq -\delta+\eta\cap\Omega}, \partial_t u(\delta, x)1_{\{|x|\leq -\delta+\eta\}\cap\Omega})\|_{H^1\times L^2} \leq \epsilon$$

et donc la solution de l'équation des ondes (1.1) associée aux données initiales à $t = \delta$,

$$(u(\delta, x)1_{|x|\leq -\delta+\eta\cap\Omega}, \partial_t u(\delta, x)1_{\{|x|\leq -\delta+\eta\}\cap\Omega})$$

(étendues de manière convenable) existe globalement. Comme elle coincide avec u sur le grand cone de la figure, on en déduit que u peut être prolongée au voisinage de $x_0 = 0, t_0 = 0$. Par compacité de $\overline{\Omega}$, on conclut que u peut être prolongée sur un intervalle de temps plus grand.

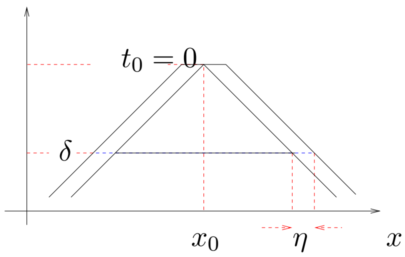

FIGURE 1. Les cônes de dépendance

Références

[1] Ramona Anton. Strichartz inequalities for lipschitz metrics on manifolds and nonlinear Schrödinger equation on domains, 2005. preprint, `arXiv:math.AP/0512639`.

[2] Nicolas Burq, Patrick Gérard, and Nikolay Tzvetkov. Strichartz inequalities and the nonlinear Schrödinger equation on compact manifolds. *Amer. J. Math.*, 126(3):569–605, 2004.

[3] Michael Christ and Alexander Kiselev. Maximal functions associated to filtrations. *J. Funct. Anal.*, 179(2):409–425, 2001.

[4] Manoussos G. Grillakis. Regularity and asymptotic behaviour of the wave equation with a critical nonlinearity. *Ann. of Math. (2)*, 132(3):485–509, 1990.

[5] Sergiu Klainerman and Matei Machedon. Remark on Strichartz-type inequalities. *Internat. Math. Res. Notices*, (5):201–220, 1996. With appendices by Jean Bourgain and Daniel Tataru.

[6] Gilles Lebeau. Estimation de dispersion pour les ondes dans un convexe. In *Journées "Équations aux Dérivées Partielles" (Evian, 2006)*. 2006.

[7] Gerd Mockenhaupt, Andreas Seeger, and Christopher D. Sogge. Local smoothing of Fourier integral operators and Carleson-Sjölin estimates. *J. Amer. Math. Soc.*, 6(1):65–130, 1993.

[8] Jeffrey Rauch. I. The u^5 Klein-Gordon equation. II. Anomalous singularities for semilinear wave equations. In *Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France Seminar, Vol. I (Paris, 1978/1979)*, volume 53 of *Res. Notes in Math.*, pages 335–364. Pitman, Boston, Mass., 1981.

[9] Jalal Shatah and Michael Struwe. Regularity results for nonlinear wave equations. *Ann. of Math. (2)*, 138(3):503–518, 1993.

[10] Jalal Shatah and Michael Struwe. Well-posedness in the energy space for semilinear wave equations with critical growth. *Internat. Math. Res. Notices*, (7):303ff., approx. 7 pp. (electronic), 1994.

[11] Hart F. Smith and Christopher D. Sogge. On the critical semilinear wave equation outside convex obstacles. *J. Amer. Math. Soc.*, 8(4):879–916, 1995.

[12] Hart F. Smith and Christopher D. Sogge. On the l^p norm of spectral clusters for compact manifolds with boundary, 2006. to appear, Acta Matematica, `arXiv:math.AP/0605682`.

[13] Michael Struwe. Globally regular solutions to the u^5 Klein-Gordon equation. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 15(3):495–513 (1989), 1988.

[14] Terence Tao. Local well-posedness of the Yang-Mills equation in the temporal gauge below the energy norm. *J. Differential Equations*, 189(2):366–382, 2003.

[15] Daniel Tataru. Strichartz estimates for second order hyperbolic operators with nonsmooth coefficients. III. *J. Amer. Math. Soc.*, 15(2):419–442 (electronic), 2002.

N. BURQ, Université Paris Sud, Mathématiques, Bât 425, 91405 Orsay Cedex, France et Institut Universitaire de France • *E-mail :* `Nicolas.burq@math.u-psud.fr`