Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
Ecole Polytechnique

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2008-2009

Olivier Glass

Problèmes de contrôle pour des équations dispersives unidimensionnelles

Séminaire É. D. P. (2008-2009), Exposé n° III, 15 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2008-2009____A3_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Séminaire *Équations aux dérivées partielles*
Centre de mathématiques Laurent Schwartz, 2008-2009
Exposé n° III, 1-15

Problèmes de contrôle pour des équations dispersives unidimensionnelles

Olivier Glass

1 Introduction

Dans cet exposé, nous décrivons quelques résultats obtenus en collaboration avec Sergio Guerrero.

Nous nous intéresserons à trois modèles dispersifs unidimensionnels, que nous allons étudier du point de vue de la contrôlabilité frontière. La première équation que nous allons considérer est l'équation de Korteweg-de Vries (KdV), qui est modèle connu d'ondes de surface dans un canal d'eau peu profonde :

$$u_t + u_x + uu_x + \nu u_{xxx} = 0 \quad (\text{avec } \nu > 0). \tag{1}$$

La seconde, l'équation de KdV-Burgers, est considérée dans le même contexte pour tenir compte d'un effet dissipatif :

$$u_t + u_x + uu_x + \nu u_{xxx} - \varepsilon u_{xx} = 0 \quad (\text{avec } \nu, \varepsilon > 0). \tag{2}$$

Enfin, nous nous intéresserons également à l'équation de KdV du cinquième ordre (KdV5) aussi appelée équation de Kawahara (en voir en particulier la description dans [26]) :

$$u_t + \alpha u_{5x} + \mu u_{xxx} + \beta u u_{xxx} + \delta u_x u_{xx} + P'(u) u_x = 0, \tag{3}$$

où $\alpha > 0$, μ, β et δ sont des constantes et P est une fonction polynomiale de degré au plus trois :

$$P(u) = pu + qu^2 + ru^3. \tag{4}$$

Cette équation peut être utilisée dans le contexte de KdV lorsque régime est tel que le terme de troisième ordre est petit. Elle intervient aussi en modélisation d'ondes magnéto-acoustiques (voir Kawahara [24]).

1.1 Les questions de contrôlabilité

Le problème général que nous allons considérer est le problème de contrôlabilité de ces équations, par l'intermédiaire des termes de frontière. Pour être plus précis, nous considérons ces équations dans un intervalle borné, munies de conditions au bord adéquates. Nous utiliserons l'ensemble des conditions aux limites ou une partie d'entre elles (laissant les autres à zéro) comme contrôle, c'est-à-dire comme un moyen d'influencer le système, afin que l'état du système suive une dynamique prescrite. Parmi les problèmes les plus fréquents en la matière, rappelons ceux qui nous intéresseront particulièrement.

Définition 1 *On dira que le système est exactement contrôlable, si quels que soient les états u_0 et u_1, quel que soit le temps $T > 0$, on peut trouver un contrôle amenant le système de l'état u_0 à l'état u_1 en temps T.*

À défaut, on dira que le système est contrôlable vers les trajectoires, si quel que soit le temps $T > 0$, étant donnée une trajectoire de référence $\overline{u}$ du système donnée pendant $[0, T]$, quel que soit l'état u_0, on peut trouver un contrôle amenant le système de l'état u_0 à $\overline{u}(T)$ en temps T. Un cas particulier est le problème de zéro-contrôlabilité, où l'on demande que, quel que soit l'état u_0, quel *que soit le temps $T > 0$, on puisse trouver un contrôle amenant le système de l'état u_0 à 0 en temps T.*

Enfin, on dira que le résultat est local s'il est limité à u_0 et u_1 dans certains voisinages de points de référence, global sinon.

À toutes ces question, vient s'ajouter une autre naturelle : que peut-on dire du coût du contrôle : c'est-à-dire de sa taille (en une certaine norme), en comparaison de la « distance à parcourir »'.

Dans la suite, nous traiterons deux questions de ce type, sur les modèles exposés plus haut, ou sur leur version linéarisée.

1.2 Quelques références concernant le problème aux limites

Commençons par rappeler quelques résultats qui ont été obtenus pour la question de l'existence d'une solution au problème avec donnée initiale et condition frontière.

Pour ce qui est de l'équation de Korteweg-de Vries dans un intervalle, la forme la plus fréquente des conditions au bord rencontrées dans la littérature est la suivante :

$$\begin{cases} u_t + u_x + uu_x + \nu u_{xxx} = 0 \text{ dans } Q := (0,T) \times (0,L), \\ u_{|x=0} = v_1(t),\ u_{|x=L} = v_2(t),\ u_{x|x=L} = v_3(t) \text{ dans } (0,T), \\ u_{|t=0} = u_0 \text{ dans } (0,L). \end{cases}$$

Un certain nombre d'auteurs ont montré que sous cette forme, le système est bien posé pour des données u_0, v_1, v_2 et v_3 suffisamment régulières, voir en particulier Cattabriga [4], Bona-Sun-Zhang [2], Colliander-Kenig [9], Holmer [23]. Par exemple, J. Holmer montre l'existence de solutions dans dans $C^0([0,T]; H^s(0,L))$ pour $v_1, v_2 \in H^{(s+1)/3}(0,T)$ et $v_3 \in H^{s/3}(0,T)$, $s > -3/4$. Mais d'autres conditions au bord peuvent être considérées comme $u_{|x=0}$, $u_{x|x=L}$ et $u_{xx|x=L}$: voir en particulier Colin-Ghidaglia [8] et Bubnov [3].

Comme nous le verrons, l'équation de KdV-Burgers n'est pas très différente de l'équation de Korteweg-de Vries dans un intervalle, et l'on peut essentiellement considérer les références précédentes pour ce qui est du problème de Cauchy en domaine borné.

Enfin, en ce qui concerne l'équation de Kawahara, beaucoup d'études ont porté sur le problème posé sur toute la droite réelle, voir par exemple : Kichenassamy-Olver [26], Ponce [33], Kenig-Ponce-Vega [25], Dawson [13], Kwon [27]. Mais pour le problème aux limites, la seule référence qui nous est connue est Doronin-Larkin [14], où les conditions au bord sont les suivantes :

$$\begin{cases} u_t + \alpha u_{5x} + \mu u_{xxx} + \beta u u_{xxx} + u u_{xx} = 0 \text{ dans } Q := (0,T) \times (0,L), \\ u_{|x=0} = v_1, \quad u_{|x=L} = v_2, \quad u_{x|x=0} = v_3, \quad u_{x|x=L} = v_4, \quad u_{xx|x=0} = v_5, \\ u_{|t=0} = u_0 \text{ dans } (0,L). \end{cases}$$

On trouvera également des résultats sur ce problème de Cauchy dans [21] (qui comprennent le modèle plus général (3)).

1.3 Quelques références concernant la contrôlabilité d'équations de type Korteweg-de Vries

Indiquons à présents des résultats précédents en matière de contrôlabilité. Celle de l'équation de Korteweg-de Vries a fait l'objet d'un nombre relativement important d'études ces dernières années. Bien sûr, la propriété de contrôlabilité dépend de manière cruciale des conditions aux limites que l'on choisit comme contrôle, les autres étant en général fixées à zéro.

Avec trois contrôles ou un contrôle distribué, différents résultats de contrôlabilité exacte locale ou globale ont été obtenus, voir en particulier Russell-Zhang [37, 38], Zhang [40], Banks [1]. Citons un enfin résultat récent de Laurent, Rosier et Zhang [28] qui établissent un résultat précis de contrôlabilité « semi-globale ».

Le cas $v_1 = v_2 = 0$ a également fait l'objet de plusieurs études ces dernières années. Le point clé ici est que l'équation linéarisée n'est pas systématiquement contrôlable : cela dépend la longueur de l'intervalle et de ν. Mais il est maintenant connu que l'équation non linéaire est toujours localement contrôlable. Sur ce sujet, les travaux sont dûs à Rosier [34], Coron-Crépeau [10], Cerpa [5], Cerpa-Crépeau [6].

Le cas $v_2 = v_3 = 0$ a été considéré par Rosier [35], puis par Guerrero et l'auteur dans [19] ; dans ce cas de la contrôlabilité locale vers les trajectoires peut être établie pour KdV. La raison pour considérer ici cette notion de contrôlabilité tient à ce que le système possède dans ce cas un fort effet régularisant (à rapprocher de l'effet de Kato). Lorsque seul v_3 est nul, en revanche, on peut établir de la contrôlabilité locale exacte (cf. [19]).

Enfin, citons un résultat récent de M. Chapouly [7], qui montre un résultat de contrôlabilité globale exacte, si l'on autorise un contrôle distribué $u(t)$ dans le membre de droite.

Pour ce qui est de l'équation du cinquième ordre, le résultat dont cet exposé rend compte (voir [21]) est le seul que nous connaissions.

2 KdV/KdV-Burgers linéaires : limite diffusive-dispersive d'une équation de transport

Dans cette partie, nous n'allons pas exactement considérer le problème de contrôlabilité pour les équations (1), (2) ou (3), mais une question dite de contrôlabilité *uniforme* en limite singulière.

2.1 Position du problème

Le problème est le suivant. Considérons une équation de transport unidimensionnelle

$$y_t - My_x = 0 \text{ dans } [0,T] \times [0,1], \tag{5}$$

avec $M \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Le problème de contrôlabilité usuel, i.e. de la possibilité passer de y_0 à y_1 (par exemple dans L^2) en temps T en choisissant la condition à gauche ou de droite selon le signe de M, est ici trivial. L'équation est contrôlable pour $T > 1/|M|$ et non contrôlable pour $T < 1/|M|$. Mais la question que nous nous posons est d'un ordre légèrement différent. Nous considérons cette équation dans une limite singulière, plus précisément, une limite où apparaît à la fois un terme de dispersion et un terme de diffusion :

$$\begin{cases} y_t - My_x - \varepsilon y_{xx} + \nu y_{xxx} = 0 \text{ dans } (0,T) \times (0,L), \\ y_{|x=0} = v_1(t),\ y_{|x=L} = v_2(t),\ y_{x|x=L} = v_3(t) \text{ dans } (0,T), \\ y_{|t=0} = y_0 \text{ dans } (0,L). \end{cases} \tag{6}$$

lorsque ε et ν tendent vers 0^+.

Et la question est la suivante : que peut-on dire de la contrôlabilité de ce système dans cette limite de diffusion-dispersion évanescente, et en particulier du coût du contrôle ?

Une motivation pour cette question provient de la problématique du contrôle des lois de conservation et systèmes de lois de conservation unidimensionnels, dans le cadre de solutions (faibles) d'entropie. Ce type de système s'écrit, dans le cas scalaire qui est le plus simple :

$$u_t + f(u)_x = 0,\ u : [0,T] \times [0,1] \to \mathbb{R},\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Il est bien connu que les solutions de ces équations développent en général des singularités en temps fini, et qu'il est intéressant des deux points de vue mathématique et physique de considérer des solutions discontinues. Comme les solutions discontinues ne sont plus uniques, on ajoute des critères de sélection pour désigner parmi toutes les solutions faibles, la solution valable qui sera appelée solution « d'entropie ». Les solutions d'entropie « classiques » peuvent être définies comme les solutions faibles obtenues par viscosité évanescente :

$$u^\varepsilon \to u \text{ lorsque } \varepsilon \to 0^+ \quad \text{où} \quad u^\varepsilon_t + f(u^\varepsilon)_x - \varepsilon u^\varepsilon_{xx} = 0.$$

Ce sont en quelque sorte les solutions dont la viscosité a disparu, sauf en ce qui concerne la sélection des discontinuités admissibles. Il est alors particulièrement naturel pour ce genre d'équation, de vouloir obtenir un contrôle qui soit « uniforme » pour l'équation visqueuse lorsque $\varepsilon \to 0^+$, et de montrer ainsi qu'une petite viscosité, négligée dans le système limite, ne perturbe pas trop le contrôle.

Mais de la même façon, dans certaines situations physiques (comme par exemple en élastodynamique non linéaire en présence d'effets concurrents de viscosité et de capillarité) il est intéressant de considérer des limites diffusives-dispersives :

$$u_t + f(u)_x - \varepsilon u_{xx} + \nu u_{xxx} = 0 \ \text{ lorsque } \ \varepsilon, \nu \to 0^+,$$

qui peuvent converger vers une solution faible différente de la solution obtenue par viscosité évanescente, selon la situation (dans le cas où le flux f n'est pas convexe). Cela donne lieu à la théorie des « ondes de choc non classiques » ; nous renvoyons en particulier au livre de LeFloch [30] sur ce sujet. D'où notre question du point de vue du problème de contrôlabilité : est-il possible d'obtenir un contrôle uniforme pour l'équation diffusive-dispersive lorsque $\varepsilon, \nu \to 0^+$?

Cette question est ouverte en général. Ici nous ne considérerons que le cas linéaire. Plus précisément nous nous intéressons au problème de contrôlabilité *uniforme* de l'équation (6) : étant donné $T > 1/|M|$, est-il possible d'obtenir la contrôlabilité du système vers zéro à un coût borné lorsque $\varepsilon, \nu \to 0^+$? Est-ce possible en n'utilisant que v_1 avec $(v_2, v_3) \equiv (0,0)$? Et est-ce au moins possible lorsque $T \gtrsim 1/|M|$?

Il est par ailleurs naturel que lorsque $T < 1/|M|$, le coût du contrôle explose, puisque le système limite n'est pas contrôlable. D'où la question : peut-on obtenir une borne inférieure du coût du contrôle dans ce cas ?

2.2 Etudes précédentes sur la viscosité évanescente

Avant d'exposer nos résultats, citon quelques références antérieures sur le problème connexe de la contrôlabilité en limite de viscosité évanescente. Cette question a fait l'objet de quelques études récentes. Coron et Guerrero [11] ont étudié une équation de transport unidimensionnelle dans dans une limite de viscosité évanescente :

$$y_t + M y_x - \varepsilon y_{xx} = 0,$$

pour $M \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, contrôlé par la donnée de Dirichlet à gauche, celle de droite étant maintenue à zéro. Ils ont prouvé que le contrôle avait un coût de l'ordre de $\mathcal{O}(e^{-1/\varepsilon})$ pour $T \geq C/|M|$ avec C assez grand, et un coût de l'ordre de $\mathcal{O}(e^{1/\varepsilon})$ quand $T < 1/|M|$. Ils montrent également ce résultat très surprenant que, dans le cas particulier où $M < 0$ (parce que l'on contrôle par la gauche), ce coût est encore de l'ordre de $\mathcal{O}(e^{1/\varepsilon})$ quand $T < 2/|M|$, donc y compris pour des temps supérieurs au temps de contrôlabilité du système limite !

Par la suite, Guerrero et Lebeau [22] ont considéré un champ de transport variable et une dimension quelconque :

$$y_t + M(t,x).\nabla y - \varepsilon \Delta y = 0.$$

Là également, le coût est de l'ordre de $\mathcal{O}(e^{-1/\varepsilon})$ quand T est suffisamment grand et que toutes les caractéristiques associées au champ de vecteurs M rencontrent la zone de contrôle ou sortent du domaine, et de l'ordre de $\mathcal{O}(e^{1/\varepsilon})$ dans le cas opposé.

Enfin, nous avons considéré avec S. Guerrero [18] un cas non linéaire (ce qui est plus ou moins notre objectif en matière de contrôle de lois de conservation) : pour l'équation de Burgers unidimensionnelle dans une limite de viscosité évanescente :

$$u_t + u u_x - \varepsilon u_{xx} = 0,$$

nous montrons que l'on peut atteindre tout état constant $U \neq 0$ en temps $\mathcal{O}(1/|U|)$ à un coût borné, pour toute condition initiale dans L^∞, au moyen des deux données de Dirichlet au bord.

2.3 Résultats

Nous avons obtenu les deux résultats suivants.

Théorème 1 (Contrôlabilité uniforme, [20]) *Il existe une constante $K_0 > 0$ telle que pour tout M* ***strictement positif****, il existe $c, C > 0$ tels que pour tout $(\nu, \varepsilon) \in (0,1] \times [0,1]$, tout $T \geq K_0/M$, tout $y_0 \in L^2(0,1)$, il existe un contrôle $v_1 \in L^2(0,T)$ tel que la solution du système (6) avec $v_2 = v_3 = 0$ satisfasse $y_{|t=T} = 0$ in $(0,1)$ et de plus le contrôle est uniforme en (ν, ε) au sens où*

$$\|v_1\|_{L^2} \leq \frac{C}{\sqrt{\nu}} \exp\left\{-\frac{c}{\max\{\nu^{1/2}, \varepsilon\}}\right\} \|y_0\|_{L^2}.$$

Théorème 2 (Non contrôlabilité uniforme, [20]) *Considérons $M \neq 0$ et $T > 0$ tels que*

$$T < \frac{1}{|M|}. \tag{7}$$

Il existe des constantes $c > 0$ et $\ell \in \mathbb{N}$, telles que pour tout $\varepsilon \in [0,1]$ et $\nu \in (0,1]$, il existe des données initiales $y_0 \in L^2(0,1)$ telles que tout contrôle $v_1 \in L^2(0,T)$ amenant y_0 à 0 est estimé inférieurement par

$$\|v_1\|_{L^2} \geq c\nu^{\ell} \exp\left\{\frac{c}{\max\{\nu^{1/2}, \varepsilon\}}\right\} \|y_0\|_{L^2}.$$

Remarques.

- Le problème avec deux conditions homogènes à droite est irréversible (avec un important effet régularisant), d'où un résultat de zéro-contrôlabilité. La contrôlabilité vers les trajectoires serait ici une notion délicate, dans la mesure oİ la trajectoire de référence devrait dépendre de ε.

- Les solutions considérées ici sont des solutions de transposition (au sens de J.-L. Lions) ; on a également des résultats analogues avec des contrôles plus réguliers, atteints au sens des traces.

- Le résultat négatif est en fait valable pour $M = 0$, et minore le coût du contrôle de l'équation d'Airy ($M = \varepsilon = 0$, $\nu = 1$) en

$$\|v_1\|_{L^2(0,T)} \gtrsim \exp\left(\frac{c}{T^{1/2}}\right) \|y_0\|_{L^2(0,1)}.$$

  Citons Seidman [39], Fernández-Cara & Zuazua [16] et Miller [32] pour d'autres résultats de ce type pour l'équation de la chaleur ou celle de Schrödinger.

- On peut transformer l'équation diffusive-dispersive en une équation purement dispersive de la manière suivante : y satisfait

$$y_t - My_x + \nu y_{xxx} - \varepsilon y_{xx} = 0$$

  si et seulement si

$$z = \exp(-\alpha x)y \text{ avec } \alpha = \frac{\varepsilon}{3\nu}.$$

  satisfait

$$z_t + \nu z_{xxx} - \left(\frac{\varepsilon^2}{3\nu} + M\right) z_x - \frac{\varepsilon}{3\nu}\left(M + \frac{2\varepsilon^2}{9\nu}\right) z = 0.$$

  D'où le fait que les équations de KdV et KdV-Burgers ne sont pas très différentes (des du points de vue du problème de Cauchy dans un intervalle et de celui de la contrôlabilité), lorsque les paramètres sont fixés. Mais dans le « régime diffusif » ($\nu \to 0$ et $\varepsilon^2 \gg \nu$) cela donne de mauvaises estimées...

2.4 Idées de preuve

Dans ce paragraphe, nous donnons quelques idées de preuve des Théorèmes 1 et 2.

1. Contrôlabilité uniforme, cas purement dispersif ($\varepsilon = 0$), avec trois contrôles

Considérons pour commencer un cas plus simple, à savoir, celui où seule la dispersion est présente, et où l'on dispose des trois contrôles au bord.

Nous avons ici affaire à une équation linéaire : nous pouvons donc utiliser l'argument classique de dualité (D. Russell [36], J.-L. Lions [31]), et nous sommes amenés à établir une inégalité d'observabilité pour le système adjoint, qui prend la forme suivante :

$$\begin{cases} L\varphi := -\varphi_t - \nu\varphi_{xxx} + M\varphi_x = 0 & \text{dans } (0,T_0)\times(0,L), \\ \varphi(t,0) = \varphi(t,L) = \varphi_x(t,0) = 0 & \text{dans } (0,T_0), \\ \varphi(T_0,x) = \varphi_0(x) & \text{dans } (0,L). \end{cases}$$

Si l'on obtient l'inégalité d'observabilité suivante :

$$\int_0^L |\varphi(0,x)|^2\,dx \leq K(T_0,M,\nu)\int_0^{T_0} |\varphi_{xx|x=0}|^2\,dt,$$

alors on peut trouver des contrôles v_1, $v_2 = v_3 = 0$ qui amènent le système à 0, avec

$$\|v_1\|^2_{L^2(0,T_0)} \leq \frac{K(T_0,M,\nu)}{\nu^2}\|y_0\|^2_{L^2(0,L)}.$$

Obtenir cette inégalité repose ici sur une estimée de Carleman « globale », comme dans le cas des équations paraboliques, à la Fursikov-Imanuvilov (voir [17]).

Posons

$$\alpha(t,x) := \frac{\beta(x)}{t^{1/2}(T_0-t)^{1/2}},$$

avec β un fontion polynomiale de degré 2 strictement positive, croissante et concave. Nous obtenons alors :

Proposition 1 *Il existe une constante $C > 0$ indépendante de T_0, ν et M telle que pour tout φ solution du système adjoint, on a*

$$\iint_{(0,T_0)\times(0,L)} \alpha e^{-2s\alpha}(|\varphi_{xx}|^2 + s^2\alpha^2|\varphi_x|^2 + s^4\alpha^4|\varphi|^2)\,dx\,dt \leq C\int_0^{T_0} \alpha_{|x=0}e^{-2s\alpha_{|x=0}}|\varphi_{xx|x=0}|^2\,dt,$$

pour tout $s \geq s_0 = C(T_0 + T_0^{1/2} + T_0|M|^{1/2}/\nu^{1/2})$.

Un résultat proche a été établi par Rosier [35], avec un poids de la forme

$$\exp\left(\frac{s\beta(x)}{t(T_0-t)}\right),$$

qui donne un s_0 différent (et un coût du contrôle différent, qui ne permettrait pas de conclure dans notre situation).

Pour prouver cette inégalité, on suit la méthodologie de [17]. On pose $\psi := e^{-s\alpha}\varphi$, où φ est une solution du système adjoint $L\varphi = 0$. On décompose $L(e^{s\alpha}\psi) = 0$ en

$$L_1\psi + L_2\psi = L_3\psi,$$

avec L_1 antisymétrique, L_2 symétrique, et oİ L_3 représente les « termes résiduels ». On écrit alors (avec $Q_0 := (0,T_0)\times(0,L)$)

$$\|L_1\psi\|^2_{L^2(Q_0)} + \|L_2\psi\|^2_{L^2(Q_0)} + 2\iint_{Q_0} L_1\psi\, L_2\psi\,dx\,dt = \|L_3\psi\|^2_{L^2(Q_0)}.$$

On développe l'intégrale, opére beaucoup d'intégrations par parties, et absorbe les termes d'erreur en prenant s suffisamment grand.

Ensuite, en revenant à la fonction φ initiale et en utilisant une inégalité d'énergie, on déduit une borne sur la constante d'observabilité de la forme :

$$\exp\left\{C\frac{|M|^{1/2}}{\nu^{1/2}}\left(1+\frac{1}{|M|T_0^{1/2}}\right)\right\}.$$

Cette constante est très grande ; on doit donc compenser d'une manière ou d'une autre cette constante d'observabilité. D'où la question : est-il possible d'appliquer cette partie du contrôle à une condition initiale très petite ?

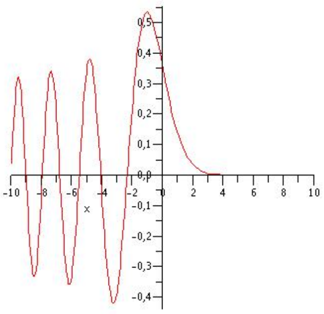
Une façon de répondre positivement à la question précédente est de prévoir une étape préliminaire, à appliquer avant le contrôle que nous avons décrit ci-dessus. Pour cela, on étend y_0 à $\mathbb{R}$ par 0 (d'une manière régulière), et on laisse le système évoluer librement sur la droite réelle assez longtemps :

$$y_t - My_x + \nu y_{xxx} = 0.$$

La solution est explicite en utilisant la fonction d'Airy :

$$y(t,x) = y_0 *_x \left[\frac{1}{(3\nu t)^{1/3}}\mathrm{Ai}\left(\frac{\cdot - Mt}{(3\nu t)^{1/3}}\right)\right].$$

En utilisant les propriétés de décroissance de la fonction d'Airy en $+\infty$ et le fait que $M>0$, on



obtient aisément

$$\|y(T_1,\cdot)\|_{L^\infty(0,1)} \lesssim \frac{\|y_0\|_\infty}{(\nu T_1)^{1/3}}\exp\left(-\frac{2}{3}\frac{(-MT_1-1)^{3/2}}{(3\nu T_1)^{1/2}}\right),$$

ce qui permet de compenser la taille de la constante d'observabilité obtenue ci dessus, à condition que

$$T \geq \frac{K_0}{M},$$

avec K_0 assez grand. Nous voyons sur ce cas simple l'asymétrie entre le cas où $M>0$ et le cas où $M<0$, qui vient de celle de la fonction d'Airy.

2. Contrôlabilité uniforme, cas général ($\varepsilon \geq 0$), à l'aide d'un seul contrôle

Considérons à présent le cas général où la viscosité n'est pas nulle, et où comme annoncé dans le résultat, nous n'utilisons qu'un seul contrôle. Nous devons alors considérer le problème adjoint suivant :

$$\begin{cases} -\varphi_t - \nu\varphi_{xxx} - \varepsilon\varphi_{xx} + M\varphi_x = 0 \text{ dans } (0,T)\times(0,L), \\ \varphi_{|x=0} = \varphi_{|x=L} = \varphi_{x|x=0} = 0 \text{ dans } (0,T), \\ \varphi_{|t=T} = \varphi_T \text{ dans } (0,L). \end{cases} \tag{8}$$

Dans un premier temps, on doit adapter l'inégalité de Carleman pour tenir compte du terme dissipatif. Or dans le cas purement dispersif, on utilise un poids de la forme (ceci afin d'avoir une dépendance optimale de la constante par rapport au temps) :

$$\alpha(t,x) := \frac{\beta(x)}{t^{1/2}(T_0-t)^{1/2}},$$

tandis que dans le cas parabolique de [17], celui-ci prend la forme suivante :

$$\alpha(t,x) := \frac{\beta(x)}{t(T_0-t)}.$$

Pour notre cas général, nous poserons donc

$$\alpha(t,x) = \frac{\beta(x)}{t^{\mu}(T_0-t)^{\mu}},$$

pour $\mu \in [1/2,1]$ et β comme précédemment. Nous avons alors le résultat suivant.

Proposition 2 *Il existe une constante $C>0$ indépendante de T_0, $\nu>0$, $\varepsilon \geq 0$ et $M \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $\varphi_T \in L^2(0,1)$, on a*

$$s \iint_{Q_0} \alpha e^{-2s\alpha}\Big(\nu^2|\varphi_{xx}|^2 + (\nu^2 s^2\alpha^2+\varepsilon^2)|\varphi_x|^2 + (\nu^2 s^4\alpha^4 + \varepsilon^2 s^2\alpha^2)|\varphi|^2\Big)\,dx\,dt \\ \leq C\nu \int_0^{T_0} (\nu s\alpha_{|x=0}+\varepsilon)e^{-2s\alpha_{|x=0}}|\varphi_{xx|x=0}|^2\,dt,$$

pour tout $s \geq CT_0^{\mu}(T_0^{\mu} + (1+T_0^{\mu}|M|^{\mu})/(\nu^{1-\mu}\varepsilon^{2\mu-1}))$, où φ est la solution correspondante du système adjoint.

Cela donne une constante d'observabilité d'ordre

$$K \sim \exp\left\{\frac{C}{\nu^{1/2}}\right\},$$

dans le « régime dispersif » où $\nu \gtrsim \varepsilon^2$, et

$$K \sim \Big(\frac{\nu^2}{\varepsilon^2}+\frac{\nu}{\varepsilon}\Big)\exp\left\{\frac{C}{\varepsilon}\right\}.$$

dans le « régime diffusif » où $\nu \lesssim \varepsilon^2$.

Ensuite, comme dans le cas présenté précédemment, on doit obtenir une « estimée de dissipation » (ici, au niveau de l'équation adjointe) pour compenser la taille de ces constantes. Il s'agit de montrer que hors du support de l'équation de transport (5), l'énergie de la solution décroît exponentiellement lorsque ε et ν tendent vers 0^+.

Un résultat connexe a été obtenu par Danchin [12] pour le problème de limite de viscosité évanescente pour des poches de tourbillon. Une manière d'obtenir de telles estimées est la suivante.

On multiplie le système adjoint par $\exp(r(M(T_1-t)-x))\varphi$, on intègre en x (r est un paramètre positif). Il est ici essentiel que la fonction $(t,x) \mapsto M(T_1-t)-x$ satisfasse l'équation de transport. Après quelques intégrations par parties, on obtient

$$-\frac{d}{dt}\Big(\exp\{-(\nu r^3+\varepsilon r^2)(T_1-t)\}\int_0^1 \exp\{r(M(T_1-t)-x)\}|\varphi(t,x)|^2\,dx\Big) \leq 0.$$

On intègre entre t_1 et t_2, et on obtient

$$\int_0^1 |\varphi(t_1,x)|^2 dx \leq \kappa \int_0^1 |\varphi(t_2,x)|^2 dx,$$

avec

$$\kappa = \exp\{\nu(t_2 - t_1)r^3 + \varepsilon(t_2 - t_1)r^2 + (1 - M(t_2 - t_1))r\}.$$

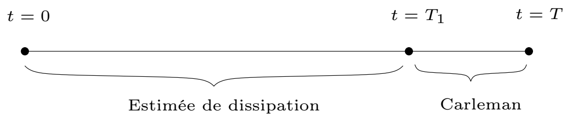
On optimise en r pour déduire finalement

$$\int_0^1 |\varphi(t_1, x)|^2 dx \leq \kappa \int_0^1 |\varphi(t_2, x)|^2 dx,$$

avec κ satisfaisant

- si $\varepsilon^2 \gtrsim \nu$:
$$\kappa \leq \exp\left\{-c\frac{(M(t_2 - t_1) - 1)^2}{\varepsilon(t_2 - t_1)}\right\},$$
- si $\varepsilon^2 \lesssim \nu$:
$$\kappa \leq \exp\left\{-c\frac{(M(t_2 - t_1) - 1)^{3/2}}{\nu^{1/2}(t_2 - t_1)^{1/2}}\right\}.$$

Maintenant, si $t_2 - t_1 \geq K_0/M$ pour K_0 assez grand, cela permet « d'absorber » la constante de Carleman. En quelque sorte, nous découpons l'intervalle de temps en deux parties. Une partie de taille d'ordre $1/M$ où nous appliquons l'inégalité de Carleman, et une phase assez longue par rapport à $1/M$ et où l'on applique ces estimées de dissipation.



3. Non contrôlabilité uniforme lorsque $T < 1/|M|$

Donnons à présent des idées de preuve pour le résultat qui donne une croissance exponentielle de la taille du contrôle pour des temps trop courts.

Il suffit ici d'établir une borne inférieure pour la constante d'observabilité : trouver une solution de l'équation adjointe (8) telle que

$$\int_0^1 |\varphi(0, x)|^2 \, dx \geq c > 0,$$

et

$$\|\varphi_{xx|x=0}\|_{L^2(0,T)} \leq C \exp\Big(- c\frac{1}{\max(\nu^{1/2}, \varepsilon)}\Big).$$

On considère φ_T supporté près du bord gauche $\{0\}$, qui serait transporté comme dans la Figure 1 (si $M > 0$).

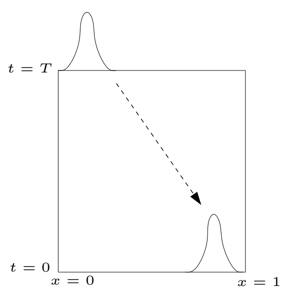


Fig. 1 – Donnée transportée

Dans le cas de l'équation de transport (5), on aurait

$$\int_0^1 |\varphi(0,x)|^2 \, dx \geq c > 0,$$

et

$$\varphi_{xx|x=0} = 0.$$

En utilisant l'estimée de dissipation et l'effet régularisant de l'équation (en domaine borné), on montre que pour ε et ν assez petits, cela est toujours vrai à un terme d'erreur exponentiellement petit près, ce qui permet de conclure. Dans le cas où $M < 0$, on peut adapter sans difficulté la preuve avec φ_T supporté près du bord droit $\{1\}$.

2.5 Autres résultats

Ajoutons quelques autres résultats du même ordre. Dans le cas purement diffusif, Coron et Guerrero [11] ont obtenu un resultat de contrôlabilité uniforme indépendamment du signe de M. Notre résultat de contrôlabilité uniforme précédent ne porte que sur le cas $M > 0$. Mais dans le régime diffusif, on peut obtenir le résultat suivant.

Théorème 3 ([20]) *Soit $0 < \gamma \leq 1$. Il existe K_0 (dépendant de γ), tel que pour tout $M < 0$, tout $T \geq K_0/|M|$, il existe des constantes c et C (dépendant de T et γ) telles que pour tout $(\nu, \varepsilon) \in (0,1] \times [0,1]$ satisfaisant*

$$\varepsilon^2 \geq \gamma\nu|M|, \tag{9}$$

on peut trouver un contrôle amenant y_0 à 0 et satisfaisant l'estimée suivante :

$$\|v\|_{L^2} \leq \frac{C}{\sqrt{\nu|M|}} \exp\left\{-\frac{c|M|}{\varepsilon}\right\} \|y_0\|_{L^2}. \tag{10}$$

Dans un autre ordre d'idées, on peut montrer que le terme dispersif est suffisamment fort pour gérer un terme diffusif avec le mauvais signe.

Théorème 4 ([20]) *Soit $M > 0$. Soit $\nu \in (0,1]$ et ε* **négatif** *mais satisfaisant*

$$-\varepsilon < \min(\kappa\nu, \frac{3}{4}\sqrt{\nu M}),$$

pour un certain $\kappa > 0$. Alors :

- *le problème de Cauchy est bien posé,*
- *la contrôlabilité uniforme a lieu comme précédemment.*

2.6 Problèmes ouverts

Terminons cette section par quelques problèmes ouverts.

- Peut-on obtenir la bonne constante d'observabilité directement au sein de l'inégalité de Carleman ?
- Que se passe-t-il pour des M négatifs dans le régime dispersif ? (L'asymétrie de la fonction d'Airy est plutôt de nature à faire penser que l'uniforme contrôlabilité pourrait ne pas avoir lieu. . .)
- Peut-on obtenir la convergence de l'équation (nonlinéaire) de KdV-Burgers vers Burgers dans le cadre d'un problème de contrôlabilité ?
- Plus généralement, que dire des limites diffusives-dispersives pour des lois de conservation non linéaires et en particulier non convexes ?
- Peut-on espérer dire quelque chose dans le cas de systèmes ?

3 Contrôle de l'équation de KdV du cinquième ordre

Dans cette dernière partie, nous considérons le problème de contrôlabilité pour l'équation de KdV du cinquième ordre (3).

Le système est donc le suivant :

$$\begin{cases} u_t + \alpha u_{5x} + \mu u_{xxx} + \beta u u_{xxx} + \delta u_x u_{xx} + [p + 2qu + 3ru^2]u_x = 0 \text{ dans } (0,T) \times (0,L), \\ u_{|x=0} = v_1,\ u_{x|x=0} = v_3,\ u_{xx|x=0} = v_5 u_{|x=L} = v_2,\ u_{x|x=L} = v_4 \text{ dans } (0,T), \\ u_{|t=0} = u_0 \text{ dans } (0,L). \end{cases}$$

En ce qui concerne le problème de Cauchy, on peut montrer que l'équation dans un domaine est localement bien posée pour des contrôles assez réguliers (voir [14] et [21]).

Les questions que nous soulevons sont ici les suivantes.

- Peut-on obtenir un résultat de contrôlabilité locale de l'équation ?
- Peut-on obtenir un résultat avec un nombre limité de contrôles ?

3.1 Résultat

Notre résultat principal est le suivant.

Théorème 5 (Contrôlabilité aux trajectoires par la droite, [21]) *Soit $T > 0$. Soit $\overline{u} \in L^\infty(0,T; W^{3,\infty}(0,1))$ une trajectoire de l'équation avec des conditions homogènes au bord gauche :*

$$\overline{u}_{|x=0} = \overline{u}_{x|x=0} = \overline{u}_{xx|x=0} = 0.$$

Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $u_0 \in L^2(0,1)$ satisfaisant

$$\|u_0 - \overline{u}(0,\cdot)\|_{L^2(0,1)} \leq \varepsilon, \tag{11}$$

il existe deux contrôles v_2, v_4 dans $L^2(0,T)$ tels que la solution u de l'équation avec condition initiale

$$u_{|t=0} = u_0,$$

et les conditions au bord associées à $(v_i)_{i=1\ldots5} = (0, v_2, 0, v_4, 0)$, appartienne à $C^0([0,T]; L^2(0,1)) \cap L^2(0,T; H^2(0,1))$ et satisfasse

$$u_{|t=T} = \overline{u}(T,\cdot).$$

Corollaire 1 *Pour des données suffisamment régulières, l'équation est localement exactement contrôlable en zéro en utilisant les cinq contrôles.*

La dernière affirmation provient, en plus du résultat du Théorème 5, de la réversibilité de l'équation lorsqu'elle est posée sur la droite réelle tout entière.

Remarques.

- Ici aussi, les solutions sont des solutions de transposition, et l'on peut trouver des contrôles plus réguliers si les données sont elles-mêmes plus régulières.
- On peut montrer que l'équation avec données homogènes à gauche possède un fort effet régularisant, ce qui explique ici le fait que l'on ne démontre que de la contrôlabilité vers les trajectoires.

3.2 Ingrédients de preuve

Indiquons briévement quelques idées de la preuve du Théorème 5. Il y a ici essentiellement deux ingrédients.

1. Inégalité de Carleman pour le problème linéarisé adjoint.
Comme dans la section précédente, le résultat repose sur la preuve d'une inégalité d'observabilité pour le système linéarisé, qui elle même repose sur une inégalité de Carleman pour le problème linéarisé adjoint :

$$\begin{cases} \varphi_t + \alpha\varphi_{5x} = \sum_{k=0}^{3}(-1)^{k+1}\partial_x^k(a_k(t,x)\varphi) + f & \text{dans } (0,T)\times(0,1), \\ \varphi_{|x=0} = \varphi_{|x=L} = \varphi_{x|x=0} = \varphi_{x|x=L} = \varphi_{xx|x=L} = 0 & \text{dans } (0,T), \\ \varphi_{|t=T} = \varphi_T & \text{sur } (0,1), \end{cases}$$

où

$$a_k \in L^\infty(0,T;W^{k,\infty}(0,1)) \text{ pour } k = 0\ldots 3.$$

Posons

$$\alpha(t,x) := \frac{\beta(x)}{t^{1/4}(T-t)^{1/4}}.$$

avec β un fontion polynomiale de degré 2 strictement positive, croissante et concave.

L'inégalité obtenue est la suivante.

Proposition 3 *Il existe une constante $C > 0$ indépendante de T, telle que pour tout φ solution du système adjoint, on a*

$$\iint_Q e^{-2s\alpha}\alpha(|\varphi_{4x}|^2 + s^2\alpha^2|\varphi_{xxx}|^2 + s^4\alpha^4|\varphi_{xx}|^2 + s^6\alpha^6|\varphi_x|^2 + s^8\alpha^8|\varphi|^2)\,dt\,dx$$
$$\leq C\Big(\int_0^T \alpha_{|x=L}e^{-2s\alpha_{|x=L}}(|\varphi_{4x|x=L}|^2 + s^2\alpha^2_{|x=L}|\varphi_{xxx|x=L}|^2)\,dt + s^{-1}\iint_Q e^{-2s\alpha}|f|^2 dt\,dx\Big),$$

pour $s \geq C(T^{1/4} + T^{1/2})$.

L'autre ingrédient de la preuve est le suivant.

2. Effet régularisant pour le problème linéarisé direct.
Nous prouvons que dans un intervalle, lorsque les conditions à gauche sont homogènes, cette équation du cinquième ordre se conduit essentiellement de manière parabolique. Cela est résumé dans le résultat suivant.

Proposition 4 *Soit u qui satisfait*

$$\begin{cases} u_t + \alpha u_{5x} = g & \textit{dans } (0,T)\times(0,L), \\ u_{|x=0} = u_{x|x=0} = u_{xx|x=0} = 0 & \textit{dans } (0,T), \\ u_{|x=L} = v_2,\ u_{x|x=L} = v_4 & \textit{dans } (0,T), \\ u_{|t=0} = u_0 & \textit{dans } (0,L). \end{cases}$$

Alors pour $k \geq 2$, on a

$$\|(L-x)^{k+\frac{1}{2}}u\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))} + \|(L-x)^k u_{xx}\|_{L^2(0,T;L^2(0,L))} + \|(L-x)^{k-1}u_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,L))}$$
$$\lesssim \|(L-x)^{k+1}g\|_{L^2(0,T;H^{-2}(0,L))} + \|(L-x)^{k-2}u\|_{L^2(0,T;L^2(0,L))} + \|(L-x)^{k+\frac{1}{2}}u_0\|_{L^2(0,L)}.$$

Dans le cas de l'équation usuelle de Korteweg-de Vries, des résultats approchants ont été établis par Rosier [35] et par Faminskii dans le cas de la demi-droite [15].

3.3 Question ouvertes

Donnons pour conclure quelques problèmes ouverts sur la question.

- Peut-on limiter le nombre de contrôles ?
- Lorsque $v_5 = u_{xx}$ est un des contrôles, peut on obtenir de la contrôlabilité locale exacte ?
- Lorsque $v_5 = u_{xx}$ est le seul contrôle, il peut exister des longueurs critiques où le linéarisé n'est pas contrôlable. Les travaux de Rosier, Coron-Crépeau, Cerpa et Cerpa-Crépeau s'étendent-ils ici ?
- Les problèmes de stabilisation sont ouverts.

Références

[1] Banks S. P.,Exact boundary controllability and optimal control for a generalised Korteweg de Vries equation, Nonlinear Anal. 47 (2001), no. 8, pp. 5537–5546.

[2] Bona J., Sun S. M., Zhang B.-Y., A nonhomogeneous boundary-value problem for the Korteweg-de Vries equation posed on a finite domain, Comm. Partial Differential Equations 28 (2003), no. 7-8, pp. 1391–1436.

[3] Bubnov B. A., General boundary value problems for the Korteweg-de Vries equation in a bounded domain, Differentsial'nye Uravneniya 15 (1979), no. 1, pp. 26–31 & 185–186.

[4] Cattabriga L., Un problema al contorno per una equazione parabolica di ordine dispari, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 13 (1959), pp. 163–203.

[5] Cerpa E., Exact controllability of a nonlinear Korteweg-de Vries equation on a critical spatial domain, SIAM J. Control Optim. 46 (2007), pp. 877–899.

[6] Cerpa E., Crépeau E., Boundary controlability for the non linear Korteweg-de Vries equation on any critical domain, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 26 (2009), no. 2, 457–475.

[7] Chapouly M., Global controllability of a nonlinear Korteweg-de Vries equation, Communications in Contemporary Mathematics, à paraître.

[8] Colin T., Ghidaglia J.-M., An initial-boundary value problem for the Korteweg-de Vries equation posed on a finite interval, Adv. Differential Equations 6 (2001), no. 12, pp. 1463–1492.

[9] Colliander J. E. and Kenig C. E., The generalized Korteweg-de Vries equation on the half line, Comm. Partial Diff. Eq. 27 (2002), no. 11-12, pp. 2187–2266.

[10] Coron J.-M., Crépeau E., Exact boundary controllability of a nonlinear KdV equation with critical lengths, J. Eur. Math. Soc 6 (2004), pp. 367–398.

[11] Coron J.-M., Guerrero S., Singular optimal control : A linear 1-D parabolic-hyperbolic example, Asymp. Anal. 44 **3,4** (2005), pp. 237–257.

[12] Danchin R., Poches de tourbillon visqueuses, J. Math. Pures Appl. 76 (1997), pp. 609–647.

[13] Dawson L., Uniqueness properties of higher order dispersive equations, J. Differential Equations 236 (2007), no. 1, pp. 199–236.

[14] Doronin G. G., Larkin N A., Kawahara equation in a bounded domain. Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 10 (2008), no. 4, pp. 783–799.

[15] Faminskii A. V., On Two Initial Boundary Value Problems for the Generalized KdV Equation, Nonlinear Boundary Problems 14 (2004), pp. 58–71.

[16] Fernández-Cara E., Zuazua E., The cost of approximate controllability for heat equations : the linear case. Adv. Differential Equations 5 (2000), no. 4-6, pp. 465–514.

[17] Fursikov A., Imanuvilov O. Yu., *Controllability of Evolution Equations*, Lecture Notes #34, Seoul National University, Korea, 1996.

[18] Glass O., Guerrero S., On the uniform controllability of the Burgers equation, SIAM J. Control Optim. 46 (2007), no. 4, pp. 1211–1238.

[19] Glass O., Guerrero S., Some exact controllability results for the linear KdV equation and uniform controllability in the zero-dispersion limit, Asymp. Anal. 60 (2008), no. 1-2, pp. 61–100.

[20] Glass O., Guerrero S., Uniform controllability of a transport equation in zero diffusion-dispersion limit, Math. Models Methods Appl. Sci., à paraître.

[21] Glass O., Guerrero S., On the controllability of the fifth-order Korteweg-de Vries equation, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, à paraître.

[22] Guerrero S., Lebeau G., Singular optimal control for a transport-diffusion equation, Comm. Partial Differential Equations 32 (2007), no. 12, pp. 1813–1836.

[23] Holmer J., The initial-boundary value problem for the Korteweg-de Vries equation, Communications in Partial Differential Equations, 31 (2006), pp. 1151-1190.

[24] Kawahara R., Oscillatory solitary waves in dispersive media, J. Phys. Soc. Japan, 33 (1972), pp. 260–264.

[25] Kenig C., Ponce G., Vega L., Higher-order nonlinear dispersive equations, Proc. Amer. Math. Soc. 122 (1994), no. 1, pp. 157–166.

[26] Kichenassamy S., Olver P. J., Existence and nonexistence of solitary wave solutions to higher-order model evolution equations, SIAM J. Math. Anal. 23 (1992), no. 5, pp. 1141–1166.

[27] Kwon S., Well-posedness and ill-posedness of the fifth-order modified KdV equation, Electron. J. Differential Equations 2008, No. 01, pp. 1–15.

[28] Laurent C., Rosier L., Zhang B.-Y., Control and Stabilization of the Korteweg-de Vries Equation on a Periodic Domain, preprint 2009.

[29] Lax P. D., Levermore C. D., The zero dispersion limit for the Korteweg-de Vries KdV equation, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 76 (1979), pp. 3602–3606.

[30] LeFloch P. G., *Hyperbolic systems of conservation laws : The theory of classical and nonclassical shock waves*, Lectures in Mathematics, ETH Zürich, Birkhäuser, 2002.

[31] Lions J.-L., Exact controllability, stabilizability and perturbations for distributed systems, SIAM Review, **30** (1988), pp. 1–68.

[32] Miller L., How violent are fast controls for Schrödinger and plate vibrations ?, Arch. Ration. Mech. Anal. 172 (2004), no. 3, pp. 429–456.

[33] Ponce G., Lax pairs and higher order models for water waves, J. Differential Equations 102 (1993), no. 2, pp. 360–381.

[34] Rosier L., Exact boundary controllability for the Korteweg-de Vries equation on a bounded domain. ESAIM Control Optim. Calc. Var. 2 (1997), pp. 33–55.

[35] Rosier L., Control of the surface of a fluid by a wavemaker. ESAIM Control Optim. Calc. Var. 10 (2004), no. 3, pp. 346–380

[36] Russell D. L., Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations. Recent progress and open questions, SIAM Review 20 (1978), pp. 639–739.

[37] Russell D. L., Zhang B. Y., Controllability and stabilizability of the third-order linear dispersion equation on a periodic domain. SIAM J. Control Optim. 31 (1993), no. 3, pp. 659–676.

[38] Russell D. L., Zhang B. Y., Exact controllability and stabilizability of the Korteweg-de Vries equation. Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996), no. 9, pp. 3643–3672.

[39] Seidman T. I., Two results on exact boundary control of parabolic equations, Appl. Math. Optim. 11 (1984), no. 2, pp. 145–152.

[40] Zhang B.-Y., Exact boundary controllability of the Korteweg-de Vries equation, SIAM J. Control Optim. 37 (1999), no. 2, pp. 543–565.