

# SÉMINAIRE EHRESMANN. TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

WEISHU SHIH

## Sur les systèmes de Postnikov d'un fibré principal

*Séminaire Ehresmann. Topologie et géométrie différentielle*, tome 1 (1957-1958),  
exp. n° 5, p. 1-8

[http://www.numdam.org/item?id=SE\\_1957-1958\\_\\_1\\_\\_A4\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SE_1957-1958__1__A4_0)

© Séminaire Ehresmann. Topologie et géométrie différentielle  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1957-1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Ehresmann. Topologie et géométrie différentielle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR LES SYSTÈMES DE POSTNIKOV D'UN FIBRÉ PRINCIPAL

par SHIH Weishu

1. Définitions.

Soient  $G$  un groupe simplicial [1],  $B$  un ensemble simplicial,  $\tau \in \text{Hom}_0(B, \bar{W}(G))$ .

DEFINITION. -  $\tau$  est dite minimale si l'image  $\text{Im } \tau(B) \subseteq$  dans un certain sous-ensemble minimal de  $\bar{W}(G)$ . Il est immédiat que si  $x, y \in B$ ,  $\partial_i \tau(x) = \partial_i \tau(y)$  pour tout  $i \neq k$  alors  $\partial_k \tau(x) = \partial_k \tau(y)$ .

Pour tout  $\tau$ ,  $\exists \tau^*$  minimal, tel que  $\tau \sim \tau^*$ , homotopie dans  $\text{Hom}(B, \bar{W}(G))$ , car si  $Y \subseteq \bar{W}(G)$  est minimal et  $D: \bar{W}(G) \rightarrow Y$  est la déformation, alors  $\tau^* = D \cdot \tau$ . Donc, d'après un théorème de Cartan [2], on peut étudier simplement les fonctions tordantes minimales. Soit  $\tau \in \text{Hom}_0(B, \bar{W}(G))$  pour tout  $n > 0$ , définissons une relation d'équivalence dans  $B$ :

$$\underset{\langle m \rangle}{\sim} : x, \underset{\langle m \rangle}{\sim} y \iff x \underset{\langle m \rangle}{\sim} y \quad \text{et} \quad \tau(x) \underset{\langle m+1 \rangle}{\sim} \tau(y)$$

où  $\underset{\langle m \rangle}{\sim}$  désigne la  $m$ -ième relation du système de Postnikov donné par MOORE [5] il est évident que  $\underset{\langle n \rangle}{\sim}$  est une relation d'équivalence qui respecte les  $\partial_i \cdot s_j$  de  $B$ , donc soit  $B^{\langle m \rangle}$  le complexe quotient ainsi obtenu.

LEMME 1. - Si  $B$  est un ensemble de Kan [3], alors  $p: B \rightarrow B^{\langle m \rangle}$  est une fibration de Kan.

DÉMONSTRATION. - Soit  $p = \bigcup_{j \geq 0} p_j$ , comme  $B_j^{\langle m \rangle} = B_j$ , ( $j \leq m$ ); considérons  $\xi \in B_{m+1}^{\langle m \rangle}$ ,  $(x_i \in B_m)$  tels que  $p_m(x_i) = \partial_i \xi$ , ( $i \neq k$ ),  $\partial_i x_j = \partial_{j-1} x_i$ , ( $i \neq k$ ,  $i < j$ ); alors, si  $y \in B_{m+1}$  tel que  $p_{m+1}(y) = \xi$ , on a  $\partial_i y = x_i$ , ( $i \neq k$ ). Soit  $\bar{\xi} \in B_{m+2}^{\langle m \rangle}$  ( $x_i \in B_{m+1}$ ), et supposons

$p_{m+2}(y) = \xi$ , alors  $\partial_i y \underset{\langle m \rangle}{\sim} x_i$ , ( $i \neq k$ ). Soit  $z \in B_{m+2}$  tel que  
 $\partial_i z = x_i$ , ( $i \neq k$ ), on a  $\partial_i y \underset{\langle m \rangle}{\sim} \partial_i z$ , ( $i \neq k$ ), et  $\tau(\partial_i y) \underset{\langle m+1 \rangle}{\sim} \tau(\partial_i z)$   
 c'est-à-dire  $\tau(\partial_i y) = \tau(\partial_i z)$ , ( $i \neq k$ ). Comme  $\tau$  est minimal  
 $\partial_k \tau(y) = \partial_k \tau(z)$ . Ceci entraîne  $\tau(y) \underset{\langle m+1 \rangle}{\sim} \tau(z)$ . Or  $\partial_i y \underset{\langle m \rangle}{\sim} \partial_i z$   
 ( $i \neq k$ ), entraîne  $y \underset{\langle m \rangle}{\sim} z$ . Donc  $y \underset{\langle m \rangle}{\sim} z$  et on a  $p_{m+2}(z) = \xi$ ,  $\partial_i z = x_i$ ,  
 ( $i \neq k$ ). Si  $n > m + 2$ ,  $\xi \in B_n^{<m>}$ ,  $x_i \in B_{n-1}$ ,  $p_n(y) = \xi$ , alors soit  
 $z \in B_n$ . Si  $z = x_i$ , ( $i \neq k$ ), ceci entraîne  $\partial_i z = x_i \underset{\langle m \rangle}{\sim} \partial_i y$ , ( $i \neq k$ ),  
 d'où  $\partial_i z \underset{\langle m \rangle}{\sim} \partial_i y$ ; comme  $n > m + 2$ ,  $z \underset{\langle m \rangle}{\sim} y$ , donc  $z \underset{\langle m \rangle}{\sim} y$  et  
 $p_n(z) = \xi$ ,  $\partial_i z = x_i$ , ( $i \neq k$ )

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 1. - Si  $B$  est de Kan alors  $B^{<m>}$  l'est aussi.

LEMME 2. - Soient  $B, B', B'', p, p', p''$  tels que  $B, B', B''$  soient des ensembles simpliciaux, et  $B'$  est de Kan.  $p' : B \rightarrow B'$  est surjective,  $p'' : B \rightarrow B''$  est une fibration de Kan et  $p : B' \rightarrow B''$  vérifie  $p \circ p' = p''$  : alors  $p$  est une fibration de Kan.

Vérification immédiate.

COROLLAIRE 2. - Les projections canoniques

$$B^{<m>} \rightarrow B^{<m-1>} \quad , \quad B^{<m>} \rightarrow B^{(m)} \quad , \quad B^{(m+1)} \rightarrow B^{<m>}$$

sont des fibrations de Kan.

LEMME 3. -  $\pi_i(B^{<m>}) \approx \pi_i(B)$  pour  $i \leq m$   
 $\pi_j(B^{<m>}) = 0$  pour  $j > m + 1$   
 $\pi_n(B^{<m>}) \approx \text{Im} [\pi_{m+1}(B) \xrightarrow{\tau} \pi_m(G)]$

DÉMONSTRATION. - Soit  $\xi \in B_j^{<m>}$ ,  $j \geq m + 2$  et  $\{y\} = \xi$ ,  $y \in B_j$ , où  $\{y\}$  désigne la classe de  $y$  pour  $\underset{\langle m \rangle}{\sim}$ , tel que  $\partial_i \xi = \{s_0^{j-1} b_0\}$ ,  $b_0 \in B_0$ , pour tout  $i$ , donc  $\partial_i y \underset{\langle m \rangle}{\sim} s_0^{j-1} b_0$  et  $\tau(\partial_i y) \underset{\langle m+1 \rangle}{\sim} \tau(s_0^{j-1} b_0)$ . Comme les  $\partial_i y$ ,  $s_0^{j-1} b_0$ ,  $\tau(\partial_i y)$  sont de dimension  $\geq m + 1$ , donc  $y \underset{\langle m \rangle}{\sim} s_0^j b_0$  et  $\tau(y) \underset{\langle m+1 \rangle}{\sim} \tau(s_0^j b_0)$  c'est-à-dire  $y \underset{\langle m \rangle}{\sim} \{s_0^j b_0\}$  donc

$\pi_j(B^{<m>}) = 0$ . Considérons l'homomorphisme induit par  $\mathcal{U}$ .

$\pi_{m+1}(B^{<m>}) \xrightarrow{\mathcal{U}_*} \pi_{m+1}(\overline{W}(G)^{(m+1)}) = \pi_m(G)$  on va démontrer que  $\mathcal{U}_*$  est une injection. Soient  $\{b\} = \xi \in B_{m+1}^{<m>}$  et tel que  $\partial_1 \xi = \{s_0^m b_0\} = s_0^m b_0 = \partial_1 b$ , et  $\mathcal{U}_* (\{\xi\}) = 0$ , c'est-à-dire  $\mathcal{U}(b) \sim s_0^{m+1} e_0$  où  $\sim$  est l'équivalence dans  $\pi_{m+1}(\overline{W}(G))$ . L'hypothèse que  $\mathcal{U}$  est minimal entraîne  $\mathcal{U}(b) = s_0^{m+1} e_0$ . D'autre part,  $\mathcal{U}(s_0^{m+1} b_0) = s_0^{m+1} e_0$ , ce qui entraîne  $\mathcal{U}(b) \stackrel{(m+1)}{\sim} \mathcal{U}(s_0^{m+1} b_0)$ , mais  $b \stackrel{(m)}{\sim} s_0^{m+1} b_0$ , donc  $b \stackrel{(m)}{\sim} s_0^{m+1} b_0$  et  $\{\xi\} = 0$  dans  $\pi_{m+1}(B^{<m>})$ , c'est-à-dire que  $\mathcal{U}_*$  est une injection. Maintenant considérons le composé :

$$\pi_{m+1}(B) \rightarrow \pi_{m+1}(B^{<m>}) \rightarrow \pi_{m+1}(\overline{W}(G)^{(m+1)}) = \pi_m(G)$$

la suite exacte d'homotopie de la fibration  $B \rightarrow B^{<m>}$  montre que la première flèche est une surjection ; donc

$$\text{Im}(\pi_{m+1}(B), \pi_m(G)) = \text{Im}(\pi_{m+1}(B^{<m>}), \pi_m(G)) \approx \pi_{m+1}(B^{<m>})$$

C. Q. F. D.

## 2. $\overline{W}$ -construction [4].

LEMME 4.

1° Il existe une projection naturelle

$$\overline{W}(G)^{(m+1)} \rightarrow \overline{W}(G)^{(m)}$$

qui est une bijection

2° Soit  $p : G \rightarrow B$  un épimorphisme simplicial de deux groupes simpliciaux alors

$$\overline{p} : \overline{W}(G) \rightarrow \overline{W}(B)$$

est une fibration de Kan. En particulier  $\overline{W}(G)$  est de Kan.

3° Soient  $N$  un groupe simplicial abélien et  $G$  un groupe simplicial  $\text{Hom}_{0,M}(G, \overline{W}(N))$  désigne l'ensemble des fonctions h-tordantes. Soit  $\Phi$  l'application évidente :

$$\Phi : \text{Hom}_{0,M}(G, \overline{W}(N)) \rightarrow \text{Hom}_0(\overline{W}(G), \overline{W}^2(N))$$

alors

$$\overline{W}(N \times_{\mathcal{V}} G) \approx \overline{W}(N) \times_{\mathcal{F}(\mathcal{V})} \overline{W}(G)$$

DEMONSTRATION

1° Comme  $G \rightarrow G^{(m)}$  induit  $\overline{W}(G) \rightarrow \overline{W}(G^{(m)})$  qui passe au quotient par la relation  $(\widetilde{m+1})$  donnée

$$\overline{W}(G)^{(m+1)} \rightarrow \overline{W}(G)^{(m)}$$

parce que, si  $\xi, \eta \in \overline{W}(G)_n$ ,  $n > m+1$ , tel que  $\xi \stackrel{(\widetilde{m+1})}{\sim} \eta$  alors

$$\partial_{i_1} \dots \partial_{i_{n-m-1}} \xi = \partial_{i_1} \dots \partial_{i_{n-m-1}} \eta. \text{ Si } \xi = (a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0, e_0),$$

$\eta = (b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_0, e_0)$ . On a :  $a_{n-i} \stackrel{(\widetilde{m})}{\sim} b_{n-i}$  du fait que  $G$  est un groupe simplicial. Il est facile de démontrer que c'est une bijection.

2° Soit  $\xi = (b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_0, e_0) \in \overline{W}(B)_n$ ,

$$\eta_i = (x_{n-2}^i, x_{n-3}^i, \dots, x_0^i, e_0) \in \overline{W}(G)_{n-1}, \quad i = 0, 1, \dots, k, \dots, n$$

tels que  $\partial_i \eta_j = \partial_{j-1} \eta_i$ ,  $i < j \neq k$ , et  $p(\eta_i) = \partial_i \xi$ ,  $i \neq k$ .

Considérons les éléments de  $G_{n-2}$ ,

$$\Delta_0 = x_{n-2}^1 \cdot (x_{n-2}^0)^{-1}, \quad \Delta_1 = x_{n-2}^2 \dots \Delta_i = x_{n-2}^{i+1} \dots \Delta_{n-1} = x_{n-2}^n, \quad i \neq k.$$

On peut montrer à cause de  $\partial_i \eta_j = \partial_{j-1} \eta_i$ , que

$$\partial_i \Delta_j = \partial_{j-1} \Delta_i, \quad i < j \neq k-1$$

et que

$$p(\Delta_i) = \partial_i b_{n-1}, \quad i \neq k-1$$

donc l'hypothèse que  $p : G \rightarrow B$  est un épimorphisme donc une fibration de Kan, entraîne l'existence de

$$y_{n-1} \in G_{n-1} \text{ tel que } \partial_i y_{n-1} = \Delta_i, \quad p(y_{n-1}) = b_{n-1}$$

Considérons la suite

$$\eta = (y_{n-1}, x_{n-2}^0, x_{n-3}^0, \dots, x_0^0, \epsilon_0) \in \overline{W}(G)_n$$

on peut démontrer à cause de la construction de  $y_{n+1}$  et de  $\partial_i \eta_j = \partial_{j-1} \eta_i$ , que

$$\partial_i \eta = \eta_i, \quad i \neq k; \quad p(\eta) = \xi$$

Ce qui achève la démonstration du (29).

3° Il suffit de construire une bijection simpliciale  $f$

$$\begin{array}{ccc} \overline{W}(N) \times_{\Phi(\tau)} \overline{W}(G) & \xrightarrow{f} & \overline{W}(N \times_{\tau} G) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \overline{W}(G) & \end{array}$$

tel que le diagramme soit commutatif. On désigne par  $\underline{\tau}$  l'application composée

$$G_m \xrightarrow{\underline{\tau}} \overline{W}(N)_m \longrightarrow N_{m-1}.$$

Voici la construction :

$$f_0 : (\overline{W}(N) \times_{\Phi(\tau)} \overline{W}(G))_0 = \{(e_0, \epsilon_0)\} \rightarrow \{\epsilon_0\} = \overline{W}(N \times_{\tau} G)_0$$

Soit  $\xi \in (\overline{W}(N) \times_{\Phi(\tau)} \overline{W}(G))_m$

$$\xi = ((n_{m-1}, n_{m-2}, \dots, n_0, \epsilon_0); (g_{m-1}, g_{m-2}, \dots, g_0, \epsilon_0))$$

alors

$$f(\xi) = ((n_{m-1}^{-1}, g_{m-1}); (n_{m-2}^{-1} \underline{\tau}(g_{m-1})^{-1} g_{m-2}), \dots$$

$$\dots; (n_{m-j}^{-1} \underline{\tau}(\partial_0^{j-2} g_{m-1} \cdot \partial_0^{j-3} g_{m-2}, \dots, \partial_0 g_{m-j+2} \cdot g_{m-j+1})^{-1}, g_{m-j});$$

$$\dots; (n_0^{-1} \underline{\tau}(\partial_0^{m-2} g_{m-1} \cdot \partial_0^{m-3} g_{m-2} \dots \partial_0 g_2 \cdot g_1)^{-1}, g_0); \epsilon_0) \in \overline{W}(N \times_{\tau} G)_m$$

on peut démontrer, par un calcul direct, que  $f$  ainsi obtenu est une application simpliciale bijective et que le diagramme est commutatif.

C. Q. F. D.

3. Système de Postnikov d'un fibré.

Considérons le composé des applications

$$B \xrightarrow{\tau} \bar{W}(G) \longrightarrow \bar{W}(G)^{(n+1)} \xrightarrow{\tau} \bar{W}(G)^{(n)}$$

Par passage au quotient par la relation d'équivalence  $\sim_{\langle n \rangle}$  on obtient

$$\tau^{\langle n \rangle} : B^{\langle n \rangle} \rightarrow \bar{W}(G)^{(n)}$$

THEOREME. - Il existe une application simpliciale naturelle

$$\varphi_m : G^{(n)} \times_{\tau^{\langle n \rangle}} B^{\langle n \rangle} \rightarrow (G \times_{\tau} B)^{(n)}$$

qui est une homotopie équivalente, et si  $G$  est minimal c'est un isomorphisme. Donc le  $m$ -ième système de Postnikov d'un fibré principal de base  $B$  de groupe structural  $G$  est un fibré principal dont le groupe structural est le  $m$ -ième système de Postnikov de  $G$  et dont la base est elle-même fibrée sur le  $m$ -ième système de Postnikov de  $B$ . La fibre étant de type  $K(\pi, m+1)$  où  $\pi$  est l'image de  $\pi_{m+1}(B)$  dans  $\pi_n(G)$ .

DEMONSTRATION. - Soit  $E = G \times_{\tau} B$ . Considérons le diagramme où l'on se propose de construire  $\varphi_m$  telle que le diagramme commute

$$\begin{array}{ccc} E = G \times_{\tau} B & \longrightarrow & G^{(n)} \times_{\tau^{\langle n \rangle}} B^{\langle n \rangle} \\ \downarrow & \swarrow \varphi_m & \\ E^{(n)} & & \end{array}$$

Pour la construction de  $\varphi_m$ , il suffit de démontrer que, si  $g \sim_{(m)} g'$ ,  $b \sim_{\langle n \rangle} b'$  alors  $(g, b) \sim_{(m)} (g', b')$ . Or  $b \sim_{\langle n \rangle} b' \implies b \sim_{(n)} b'$  et  $\tau(b) \sim_{(m+1)} \tau(b') \implies \tau(b) \sim_{(m)} \tau(b')$ ,  $[\tau : B \rightarrow \bar{W}(G) \rightarrow G]$ . Soit  $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_{n-m}}$  une suite d'opérateurs tel que  $i_1 < i_2 < \dots < i_{n-m}$ . Si  $i_1 \neq 0$ , alors  $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_{n-m}}(g, b) = \partial_{i_1} \dots \partial_{i_{n-m}}(g', b')$  parce que  $b \sim_{(m)} b'$ ,  $g \sim_{(m)} g'$ . Si  $i_1 = 0$ , comme  $\tau(b) \sim_{(n+1)} \tau(b')$ , on a :

$$\begin{aligned} \tau(\partial_{i_1} \dots \partial_{i_{n-m}} b) &= \partial_{i_2} \dots \partial_{i_{n-m}} \tau(b) \sim_{(n+1)} \partial_{i_2} \dots \partial_{i_{n-m}} \tau(b') \\ &= \tau(\partial_{i_2} \dots \partial_{i_{n-m}} b') \end{aligned}$$

donc  $\tau(\partial_{i_2} \dots \partial_{i_{n-m}} b) = \tau(\partial_{i_2} \dots \partial_{i_{n-m}} b')$  [parce que

$\tau(\partial_{i_2} \dots \partial_{i_{n-m}} b) \in \overline{W}(G)_{m+1}$  ce qui entraîne

$$(\partial_0 \partial_{i_2} \dots \partial_{i_{n-m}} (g, b) = (\partial_0 \partial_{i_2} \dots \partial_{i_{n-m}} g : \tau(\partial_{i_2} \dots \partial_{i_{n-m}} b), \partial_0 \partial_{i_2} \partial_{i_{n-m}} b)$$

$$= (\partial_0 \partial_{i_2} \dots \partial_{i_{n-m}} g' \cdot \tau(\partial_{i_2} \partial_{i_{n-m}} b'), \partial_0 \partial_{i_1} \partial_{i_{n-m}} b')$$

$$= \partial_0 \partial_{i_2} \dots \partial_{i_{n-m}} (g', b'),$$

donc

$$(g, b) \underset{(m)}{\sim} (g', b').$$

Montrons maintenant que  $\varphi_x$  ainsi définie est une homotopie-équivalence

$$\begin{array}{ccc} E = G \times_{\tau} B & \xrightarrow{\quad} & G^{(m)} \times_{\tau^{(m)}} B^{(m)} = E^{(m)} \\ \downarrow & \searrow \varphi_m & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\quad} & B^{(m)} \end{array}$$

Considérons la suite exacte de fibration à droite :

$$0 \rightarrow \pi_{m+1}(E^{(m)}) \rightarrow \pi_{m+1}(B^{(m)}) \rightarrow \pi_m(G^{(m)}) \rightarrow \pi_m(E^{(m)}) \rightarrow \pi_m(B^{(m)}) \rightarrow \pi_{m-1}(G^{(m)}) \rightarrow \dots$$

comme on sait déjà :  $\pi_{m+1}(B^{(m)}) \rightarrow \pi_m(G^{(m)})$  est une injection, donc  $\pi_{m+1}(E^{(m)}) = 0$ . D'autre part  $\pi_i(B^{(m)}) = 0$ , si  $i \geq m+2$ ,  $\pi_i(G^{(m)}) = 0$ . Si  $i \geq m+1$ , donc on a :  $\pi_i(E^{(m)}) = 0$ , si  $i \geq m+1$ . Considérons la suite exacte de fibration à gauche :

$$0 \rightarrow \text{Im}(\pi_{m+1}(B), \pi_m(G)) \rightarrow \pi_m(G) \rightarrow \pi_m(E) \rightarrow \pi_m(B) \rightarrow \pi_{m-1}(G) \rightarrow \dots$$

alors le lemme 4 et le lemme 5 montrent que

$$\pi_i(E) \xrightarrow{\cong} \pi_i(E^{(m)}) \quad i \leq m$$



Or la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(E) & \xrightarrow{\approx} & \pi_1(E^{<m>}) \\
 \searrow \approx & & \swarrow \varphi_m \\
 & \pi_1(E^{(m)}) &
 \end{array}
 \quad i \leq m$$

montre que  $\varphi_m : \pi_1(E^{<m>}) \xrightarrow{\approx} \pi_1(E^{(m)})$  pour  $i \leq m$ , mais on sait déjà

$$\pi_j(E^{<m>}) = \pi_j(E^{(m)}) = 0$$

donc

$$\varphi_m : \pi_1(E^{<m>}) \xrightarrow{\approx} \pi_1(E^{(m)})$$

sont des isomorphismes pour tout  $i$ , donc  $\varphi_m$  est une homotopie d'équivalence.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] CARTAN (Henri). - Sur la théorie de Kan, Séminaire Cartan, t. 9, 1956/57, n° 1.
- [2] CARTAN (Henri). - Sur le foncteur  $\text{Hom}(X, Y)$  en théorie simpliciale, t. 9, 1956/57, n° 3.
- [3] KAN (Daniel M.). - Abstract homotopy, IV., Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 42, 1956, p. 542-544.
- [4] MOORE (J. C.). - Homotopie des complexes monoïdaux, II., Séminaire Cartan, t. 7, 1954/55, n° 19.
- [5] MOORE (J. C.). - Notes on homotopy. - Princeton, Princeton University, 1955/56 (multigraphié).