

# SÉMINAIRE DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

ALBRECHT DOLD

## Démonstration élémentaire de deux résultats du cobordisme

*Séminaire de topologie et géométrie différentielle*, tome 2 (1958-1960), exp. n° 4, p. 1-5

[http://www.numdam.org/item?id=SE\\_1958-1960\\_\\_2\\_\\_A4\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SE_1958-1960__2__A4_0)

© Séminaire de topologie et géométrie différentielle  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1958-1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire de topologie et géométrie différentielle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

C. EHRESMANN

Mars 1959

DEMONSTRATION ELEMENTAIRE  
DE DEUX RESULTATS DU COBORDISME

par Albrecht DOLD

Dans cet exposé <sup>(1)</sup> on donne des démonstrations élémentaires pour les propositions suivantes :

PROPOSITION I. Soit  $M$  une variété différentiable (= de classe  $C^\infty$ ), compacte, orientée, de dimension  $n$ , et soit  $p : \tilde{M} \rightarrow M$  un revêtement à deux feuillets. Il existe alors une variété différentiable à bord  $A$ , compacte, orientée, de dimension  $n + 1$ , dont le bord est  $\tilde{M} - 2M$ , c'est à dire  $\tilde{M}$  (avec l'orientation induite par  $p$ ) et  $2M$  sont cobordantes ([2], IV, p. 64).

PROPOSITION II. (Rohlin). Soit  $M$  une variété différentiable, orientée qui est le bord d'une variété différentiable compacte  $A'$ , non nécessairement orientable. Il existe alors une variété  $A$  comme en Prop. I dont le bord est de la forme  $M - 2N$  (pour  $N$  convenable), c'est à dire la classe  $[M] \in \Omega_n$  de cobordisme de  $M$  est divisible par 2.

La proposition II (annoncée par Rohlin en 1953, [1]) sera obtenue comme conséquence de I. Des résultats récents de Milnor, Rohlin, Wall montrent (tout en utilisant II) que I se généralise aux revêtements arbitraires à un nombre fini de feuillets.

DEMONSTRATION DE I. On peut supposer  $M$  connexe ; autrement on raisonnerait sur ses composantes. Alors  $\tilde{M}$  aussi peut être supposé connexe - autrement on aurait  $\tilde{M} \approx 2M$ .

a) La sous-variété caractéristique  $V$ . Soit  $\nu \in H^1(M ; Z_2)$  la classe caractéristique du revêtement  $p$ . C'est une classe de cohomologie modulo 2 de dimension un de  $M$  ; par définition sa valeur sur un chemin fermé  $s$  dans  $M$  est 0 (est 1) si et seulement si le relèvement de  $s$  dans  $\tilde{M}$  est fermé (est non-fermé).

Représentons  $\nu$  par une sous-variété  $V$  de dimension  $n-1$  de  $M$  ([2], Thm. II. 26). On obtient  $V$  en prenant une application  $f$  de classe  $C^\infty$  de  $M$  dans un espace projectif réel  $P_N R$  (de haute dimension  $N$ ) qui envoie la classe non-nulle de  $H^1(P_N R ; Z_2)$  dans  $\nu$  ; on peut supposer  $f$  transversalement régulière ([2], I. 3-4) sur un hyperplan  $P_{N-1} R$  de  $P_N R$ , et on prend  $V = f^{-1}(P_{N-1} R)$ . Par définition de  $V$  le nombre d'intersection

-----  
(1) Cette rédaction contient moins de remarques générales et plus de détails de démonstration que l'exposé fait au séminaire.

d'un chemin fermé  $s$  dans  $M$  avec  $V$  est  $0 \pmod 2$  si et seulement si le relèvement de  $s$  dans  $\tilde{M}$  est fermé.

Ceci montre que  $p^{-1}(M-V)$  se décompose en deux feuilles homéomorphes à  $M-V$ , soient  $F_1, F_2$  (c'est à dire que le revêtement est trivial au-dessus de  $M-V$  ; on ne prétend pas, bien entendu, que les feuilles soient connexes) : Soient  $x, y$  deux points dans  $p^{-1}(M-V)$ , et soit  $\tilde{s}$  un chemin dans  $M$  qui les joint. Alors  $x$  et  $y$  sont dans la même feuille  $F_i$  si et seulement si le nombre d'intersections de  $\tilde{p}\tilde{s}$  avec  $V$  est  $0 \pmod 2$ .

Prenons maintenant un voisinage tubulaire  $T$  de  $V$  ([2], p. 21).  $T$  est fibré en segments géodésiques (orthogonaux à  $V$ ), de base  $V$ , de groupe structural  $0(1) = Z_2$ . Parce que  $M$  est orientable un chemin fermé  $w$  dans  $V$  renverse le segment-fibre de  $T$  si et seulement si  $w$  renverse l'orientation en  $V$ .

La contre-image  $\tilde{T} = p^{-1}(T)$  est un voisinage tubulaire de  $\tilde{V} = p^{-1}(V)$ , il est fibré sur  $\tilde{V}$  mais aussi, par composition avec  $p$ , sur  $V$ . En particulier, le bord  $\tilde{B}$  de  $\tilde{T}$  est fibré sur  $V$  ; la fibre consiste en quatre points. Ce fibré  $\tilde{B} \rightarrow V$  peut être considéré comme fibré associé au fibré  $T \rightarrow V$  de fibre quatre points  $(P_1, P_2, Q_1, Q_2)$ , où l'élément non-trivial  $\lambda$  de  $Z_2$  opère comme suit :

$$\lambda(P_1, P_2, Q_1, Q_2) = (Q_1, Q_2, P_1, P_2).$$

Dans la figure (1)  $\lambda$  est la réflexion à la droite pointillée. L'index  $i$  des points  $P_i, Q_i$  indique dans quelle feuille  $F_i$  les points correspondants du fibré  $\tilde{B}$  sont situés. La même lettre  $P$  ou  $Q$  signifie que les points correspondants de  $\tilde{B}$  ont même  $p$ -image dans  $M$ .

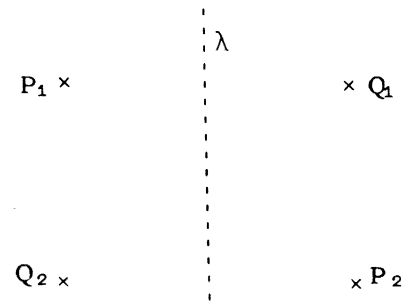


Fig. 1 (pour B)

Le fibré  $\tilde{T} \rightarrow V$  n'est autre que l'associé au fibré  $T \rightarrow V$ , de fibre à deux segments qui sont permutés par  $\lambda$  comme il est indiqué dans la figure 2. En effet, les segments géodésiques normaux à  $V$  joignent des points avec  $p$ -images différentes, et ils passent d'une feuille à l'autre parce que le nombre d'intersection de leur  $p$ -image avec  $V$  est égal à  $1 \pmod 2$ .

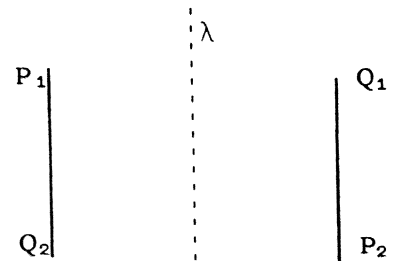


Fig. 2 (pour T)

Si au contraire on prend comme fibre deux segments, dans lesquels  $\lambda$  opère comme indiqué dans la figure 3, on obtient un fibré  $T' \rightarrow V$ , qui consiste simplement en deux exemplaires  $T$  (on ne fait que joindre les points de la même feuille).

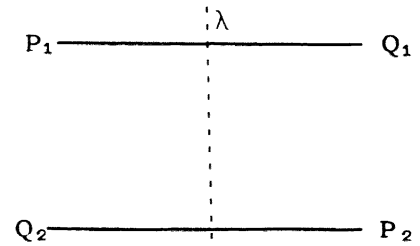
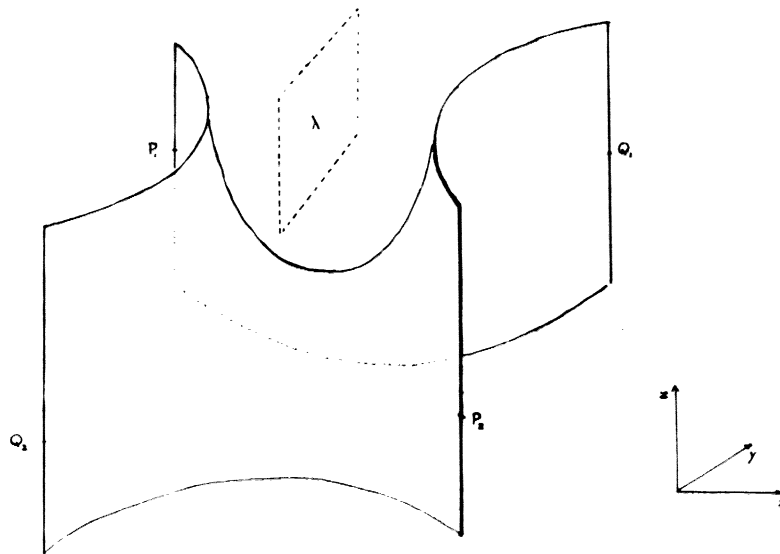


Fig. 3 (pour T')

On va maintenant construire un fibré  $S \rightarrow V$ , une «transition continue» entre  $T'$  et  $\tilde{T}$ ; la variété cherchée  $A$  sera alors obtenue en remplaçant la partie  $\tilde{T} \times I$  de  $\tilde{M} \times I$  par le fibré  $S$ .

b) *Fibré de transition  $S$ ; construction de  $A$ .*

Dans l'espace euclidien  $R^3$  on considère la surface  $x^2 - y^2 = z$ ; soit  $\sigma$  la partie  $|x| \leq 2, |z| \leq 1$  de cette surface, et soit  $\lambda$  la transformation  $(x, y, z) \rightarrow (-x, y, z)$  de  $\sigma$ . Soit  $S \rightarrow V$  le fibré associé à  $T \rightarrow V$  de fibre  $\sigma$ . Si l'on considère les points  $P_i, Q_i$  des figures précédentes comme étant les points  $|x| = 2, z$  fixe, de  $\sigma$ , comme il est indiqué dans la figure 4, on voit que la partie  $z = 1$  de  $S$  donne précisément  $\tilde{T}$ , tandis que



$z = -1$  donne  $T'$ . La partie  $|x| = 2$  de  $\sigma$  est formée de quatre segments; elle peut être considérée comme  $(P_1, P_2, Q_1, Q_2) \times I$ , où  $I$  est le segment  $-1 \leq z \leq +1$ . Cette partie  $|x| = 2$  donne donc un sous-fibré  $X$  de  $S$  qui est équivalent à  $\tilde{B} \times I$ .

Soit maintenant  $\tilde{M} - \tilde{T}$  l'adhérence de  $\tilde{M} - \tilde{T}$  dans  $\tilde{M}$  (c'est-à-dire  $\tilde{M}$  moins l'intérieur de  $\tilde{T}$ ), et formons le produit  $\tilde{M} - \tilde{T} \times I$ . Dans la somme topologique  $\tilde{M} - \tilde{T} \times I + S$  identifions chaque point  $x \in \tilde{B} \times I$  (= «bord vertical» de  $\tilde{M} - \tilde{T} \times I$ ) avec le point correspondant de  $X$  (= «bord vertical» de  $S$ ). Ceci définit un espace topologique compact  $A$ , dont on voit facilement qu'il hérite de ses parties  $\tilde{M} - \tilde{T} \times I$ , et de  $S$  une structure de variété différentiable à bord. Le bord est formé des deux pièces  $z = 1$  et  $z = -1$ . Mais ces pièces ne sont autres que  $\tilde{M}$  resp.  $2M$  parce qu'on a attaché à  $\tilde{M} - \tilde{T} = 2(M - T)$  d'une part  $\tilde{T}$  (pour  $z = 1$ ) et d'autre part  $2T$  (pour  $z = -1$ ). Pour compléter la démonstration il reste donc seulement à vérifier des questions d'orientation.

La fibre de  $S \rightarrow V$  est un disque topologique  $\sigma$ . Un chemin fermé  $w$  dans  $V$  renverse l'orientation de la fibre si et seulement si  $w$  renverse l'orientation en  $V$  (on a vu qu'il en est ainsi dans le fibré associé  $T \rightarrow V$ ) ;  $S$  est donc une variété orientable à bord.

Chaque orientation de  $S$  induit une orientation dans son bord, en particulier dans la partie  $X$  de son bord. D'autre part  $\tilde{M}$  est orienté, donc aussi  $\tilde{M}-\tilde{T} \times I$ , et la partie  $\tilde{B} \times I \simeq X$  de son bord. Nous allons voir que cette orientation de  $X$  est induite par une orientation des  $S$  ; ceci montrera qu'on peut étendre l'orientation de  $\tilde{M}-\tilde{T} \times I$  à tout  $A$ , d'où la proposition.

Les applications  $\lambda : \sigma \rightarrow \sigma$ ,  $\lambda(x, y, z) = (-x, y, z)$  et  $\gamma : \sigma \rightarrow \sigma$ ,  $\gamma(x, y, z) = (x, -y, z)$  induisent des applications  $\Lambda : S \rightarrow S$  et  $\Gamma : S \rightarrow S$  (égales à  $\lambda$  resp.  $\gamma$  dans chaque fibre) qui, évidemment, renversent l'orientation de  $S$ .

LEMME. *Pour qu'une orientation de  $X$  soit induite par une orientation de  $S$  il faut et il suffit qu'elle soit renversée par  $\Lambda$  et  $\Gamma$ .*

PREUVE. On a déjà remarqué que la condition est nécessaire. Soit alors  $\nu$  une orientation de  $X$  qui est renversée par  $\Lambda$  et  $\Gamma$ . Prenons au-dessus de chaque composante  $V_\mu$  de  $V$  une composante  $X_\mu$  de  $X$ , et soit  $\vartheta$  l'orientation de  $S$  qui induit dans  $X_\mu$  l'orientation  $\nu$ . Alors l'orientation induite dans  $X$  par  $\vartheta$  et l'orientation  $\nu$  ont le même comportement vis à vis de  $\Lambda$  et  $\Gamma$ , et puisque les  $X_\mu$  et leurs transformés par  $\Lambda$ ,  $\Gamma$ ,  $\Lambda \circ \Gamma$  donnent tout  $X$ , ces orientations coïncident

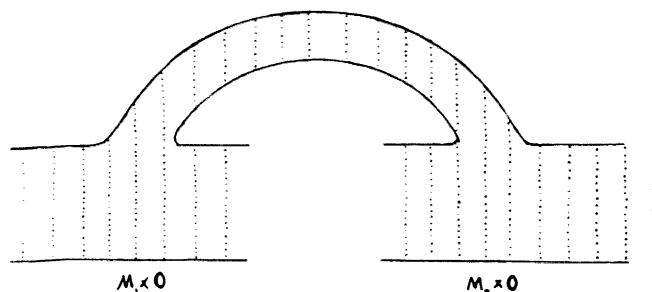
Soit  $\Gamma' : \tilde{T} \rightarrow \tilde{T}$  l'application qui renverse tous les segments-fibre du fibré  $\tilde{T} \rightarrow V$ , et soit  $\Lambda' = \tau \circ \Gamma' : \tilde{T} \rightarrow \tilde{T}$  la composition de  $\Gamma'$  avec la permutation  $\tau$  des feuillettes du revêtement. Alors  $\Gamma'$  et  $\Lambda'$  renversent l'orientation de  $\tilde{T}$ , donc l'orientation de son bord  $\tilde{B}$ , qui est induite par celle de  $\tilde{T}$  ou encore par celle de  $\tilde{M}-\tilde{T}$ . Il s'ensuit que  $\Gamma' \times \text{id}$  et  $\Lambda' \times \text{id}$  renversent l'orientation de  $\tilde{B} \times I$  qui est induite par celle de  $\tilde{M}-\tilde{T} \times I$ . Mais  $\Gamma' \times \text{id} \mid \tilde{B} \times I = \Gamma \mid \tilde{B} \times I$  et  $\Lambda' \times \text{id} \mid \tilde{B} \times I = \Lambda \mid \tilde{B} \times I$ . Donc, d'après le lemme, l'orientation de  $\tilde{M}-\tilde{T} \times I$  s'étend à tout  $A$ .

Maintenant l'équation voulue

$$\text{Bord de } A = \tilde{M} - 2M$$

est évidente parce qu'on peut la vérifier dans la partie  $\tilde{M}-\tilde{T} \times I$  de  $A$ .

DEMONSTRATION DE II. On peut supposer  $M$  connexe parce que chaque variété est cobordante à une variété connexe. Ceci est bien connu ; par exemple, pour «joindre»



les deux composantes  $M_1$  et  $M_2$  on forme  $M_1 \times I + M_2 \times I$  et on joint les «toits»  $M_i \times 1$  par un cylindre plein.

Soit alors  $\pi : \tilde{A} \rightarrow A'$  le revêtement - orientation. C'est un revêtement à deux feuillets, et  $\tilde{A}$  est orienté de telle façon que la transformation  $\tau : \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  qui permute les feuillets, renverse l'orientation. Parce que  $M$  est orientable le revêtement est trivial au-dessus de  $M$ . La restriction de la classe caractéristique  $\nu \in H^1(A', \mathbb{Z}_2)$  de  $\pi$  (c'est-à-dire  $W_1(A')$ ) à  $M$  est donc nulle (voir I-a), c'est-à-dire que  $\nu$  est une classe relative :  $\nu \in H^1(A', M ; \mathbb{Z}_2)$ . On peut alors réaliser  $\nu$  par une sous-variété  $N$  (de dimension  $n$ ) de  $A'$  qui ne rencontre pas  $M$ .

Au-dessus de  $A' - N$  le revêtement est trivial ; soit  $F$  une feuille de  $\pi^{-1}(A' - N)$ , et munissons  $A' - N$  de l'orientation de  $F$  (rappelons que  $\pi : F \approx A' - N$ ). Si  $s$  est un chemin fermé dans  $A'$  qui joint deux points  $x, y$  de  $A' - N$ , alors  $s$  renverse l'orientation de  $A' - N$  si et seulement si le nombre d'intersection de  $s$  avec  $N$  est 1 mod 2. Appliquant ceci à un segment géodésique qui coupe  $N$  orthogonalement en  $z \in N$  on voit que les deux orientations de  $N$  en  $z$ , qui sont induites par l'orientation de  $A' - N$  (des deux côtés), sont les mêmes. L'orientation de  $A' - N$  induit donc une orientation de  $N$  ; en particulier  $N$  est orientable (Rohlin [1]).

Soit maintenant  $T$  un voisinage tubulaire de  $\tilde{N}$ , de bord  $N$ . Si l'on enlève de  $A'$  l'intérieur de  $T$  on voit que  $M$  et  $\pm \tilde{N}$  sont cobordants (ici on utilise le fait que  $M$  est connexe) :

$$\text{bord de } A' - T = \pm M \pm \tilde{N}.$$

Mais  $\tilde{N}$  est un revêtement à deux feuillets de la variété orientée  $N$  (par restriction de  $T \rightarrow N$  à  $\tilde{N}$ ). D'après (I)  $\tilde{N}$  est cobordant à  $\pm 2N$ , d'où le résultat voulu :  $M$  est cobordant à  $2(\pm N)$ .

**Bibliographie**

- [1] ROHLIN V.A. Homologies intrinsèques. Doklady Akad. Nauk URSS 89 (1953), 789-792.
- [2] THOM R. Quelques propriétés globales des variétés différentiables. Comment. Math. Helv. 28(1954), 17-86.