J-P. Serre

Homotopie des espaces fibrés - applications

Séminaire Henri Cartan, tome 2 (1949-1950), exp. n° 10, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1949-1950__2__A11_0>

Séminaire H. CARTAN, E.N.S., 1949/50.

HOMOTOPIE DES ESPACES FIBRÉS - APPLICATIONS

(Exposé de J-P. SERRE, le 30.1.1950).

Nous allons appliquer les résultats de l'exposé précédent (et en particulier, la suite exacte d'homotopie) à la détermination des groupes d'homotopie de certains espaces.

1.- La suite exacte d'homotopie des espaces fibrés.

Soit E un espace fibré (avec ou sans groupe structural) de fibre F et de base B . Les seules hypothèses faites sur E , B , F sont les suivantes :

1) E , B , F sont des espaces séparés.

2) E est un espace fibré localement trivial.

Nous avons vu (théorème 4 de l'exposé précédent) que la suite :

$$0 \leftarrow \pi_0(B) \leftarrow \pi_0(E) \leftarrow \pi_0(F) \leftarrow \pi_1(B) \leftarrow \pi_1(E) \ \ldots\ \pi_{n-1}(F) \leftarrow \pi_n(B) \leftarrow \pi_n(E) \ \ldots$$

Cas particuliers.

Supposons que E admette une section. Il est alors immédiat que l'homomorphisme canonique de $\pi_n(B)$ dans $\pi_{n-1}(F)$ est nul. La suite exacte d'homotopie se décompose alors en une succession de suites exactes partielles :

$$0 \longleftarrow \pi_n(B) \longleftarrow \pi_n(E) \longleftarrow \pi_n(F) \longleftarrow 0 \qquad (n = 0 , 1 , \ldots) \text{ . D'où :}$$

Proposition 1.- Si E admet une section, $\pi_n(E)$ est une extension inessentielle de $\pi_n(F)$ par $\pi_n(B)$. Si $n \geqslant 2$, cette extension est triviale.

Démonstration : la section donne un relèvement du groupe $\pi_n(B)$ en un sous-groupe de $\pi_n(E)$.

Si E est trivial, ce dernier résultat vaut aussi pour $n = 1$. D'où :

Théorème 1.- Les groupes d'homotopie d'un produit direct sont les produits directs des groupes d'homotopie des facteurs.

Remarque : On peut démontrer le théorème précédent sans utiliser la notion d'espace fibré. On voit alors qu'il est valable pour les produits infinis d'espaces.

Autre cas particulier : la fibre est homotope à zéro dans l'espace fibré.

L'homomorphisme canonique de $\pi_n(F)$ dans $\pi_n(E)$ est alors nul et l'on a une succession de suites exactes :

$$0 \longleftarrow \pi_n(F) \longleftarrow \pi_{n+1}(B) \longleftarrow \pi_{n+1}(E) \longleftarrow 0 \quad . \quad \text{D'où :}$$

<u>Proposition 2</u>.- <u>Si</u> F <u>est homotope à zéro dans</u> E , $\pi_n(B)$ <u>est extension de</u> $\pi_n(E)$ <u>par</u> $\pi_{n-1}(F)$.

2.- <u>Les variétés de Stiefel</u>.

Soient p et n deux entiers $\geqslant 1$.

<u>Définition</u> : <u>On appelle variété de Stiefel d'indices</u> p <u>et</u> n , <u>et l'on note</u> $V_{p,n}$ <u>l'espace des systèmes orthonormaux de</u> p <u>vecteurs</u> $(x_1 , \dots , x_p)$ <u>de</u> R^{n+p} .

La topologie de cet espace (que l'on définit de façon évidente) en fait un espace <u>compact</u>. De plus c'est évidemment un espace homogène du groupe orthogonal à $n+p$ variables, $SO(n+p)$, le groupe d'isotropie étant formé des rotations qui laissent p vecteurs orthonormaux fixes, c'est-à-dire $SO(n)$. D'où :

<u>Proposition 3</u>.- $V_{p,n}$ <u>est homéomorphe à</u> $SO(n+p)/SO(n)$.

Dans la proposition précédente, $SO(n)$ est identifié au sous-groupe de $SO(n+p)$ qui laisse p vecteurs fixes. Identifions $SO(p)$ au sous-groupe de $SO(n+p)$ qui opère sur ces p vecteurs, en laissant la variété orthogonale fixe. On a : $SO(p) \cap SO(n) = (e)$. On en conclut que $SO(p)$ opère fidèlement sur $V_{p,n}$. On peut expliciter ceci de la façon suivante :

Si (c_{ij}) est une matrice appartenant à $SO(p)$, le produit de (c_{ij}) et du point $(x_1 , \dots , x_p) \in V_{p,n}$ est le point : $(c_{i1}x_1 , \dots , c_{ip}x_p)$. Il est alors immédiat que :

<u>Proposition 4</u>.- $V_{p,n}$ <u>est un espace fibré principal de groupe structural</u> $SO(p)$.

Exemple : Si $p = 1$, $V_{p,n} = S^n$ et $SO(p) = 1$.

Cherchons maintenant la base de l'espace fibré que nous venons de définir. Pour que $(x_1 , \dots , x_p)$ et $(y_1 , \dots , y_p)$ soient dans la même fibre, il faut que les vecteurs correspondants engendrent le même sous-espace vectoriel de dimension p . Mais cette condition ne suffit pas, du fait que nous utilisons le groupe $SO(p)$ et non le groupe $O(p)$: il faut en outre que les deux systèmes de vecteurs aient "même orientation" , c'est-à-dire que

$x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p = y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_p$. On obtient ainsi le résultat suivant :

Proposition 5.- La base de l'espace fibré défini par la proposition précédente est homéomorphe à l'espace des p-vecteurs décomposables de longueur unité de R^{n+1} c'est-à-dire à l'espace des variétés linéaires orientées de dimension p de R^{n+p} .

Cet espace sera désigné par $G^o_{p,n}$. C'est un revêtement d'ordre deux de la grassmannienne $G_{n+p-1,p-1}$ (avec les notations de BOURBAKI - Topologie Chapitre VI). Par abus de langage, nous appellerons encore $G^o_{p,n}$ grassmannienne. Il résulte immédiatement de la proposition 3 que $G^o_{p,n}$ est homéomorphe à l'espace homogène $SO(n+p)/SO(n) \times SO(p)$.

On va définir une autre fibration de $V_{p,n}$. Pour cela, soit $SO(n+p-1)$ le sous-groupe de $SO(n+p)$ formé des rotations conservant un vecteur. On a : $SO(n+p) \supset SO(n+p-1) \supset SO(n)$ (si les vecteurs qui ont servi à plonger $SO(n)$ dans $SO(n+p)$ contiennent le vecteur précédent). On en déduit (7-3-Exemple) :

Proposition 6.- $V_{p,n}$ est un espace fibré à fibre $V_{p-1,n}$ et à base S^{n+p-1} . En effet, l'on a $SO(n+p)/SO(n+p-1) = V_{1,n+p-1} = S^{n+p-1}$ et :

$$SO(n+p-1)/SO(n) = V_{p-1,n} .$$

Le groupe structural est $SO(n+p-1)$.

Remarque : La projection de $V_{p,n}$ sur S^{n+p-1} peut aussi se définir en faisant correspondre à $(x_1 , \ldots , x_p) \in V_{p,n}$, le vecteur $x_p \in S^{n+p-1}$.

On peut vérifier directement que les espaces fibrés que nous venons de définir sont localement triviaux. On peut aussi invoquer le fait que la fibration d'un groupe de Lie par un sous-groupe fermé est localement triviale et utiliser le "complément au théorème 3" de l'exposé 7.

3.- Homotopie des variétés de Stiefel.

Théorème 2.- Les groupes d'homotopie de $V_{p,n}$ sont nuls jusqu'au (n-1)-ième.

Raisonnons par récurrence sur p . Pour $p = 1$, on a $V_{1,n} = S^n$ et $\pi_i(S^n) = 0$ pour $i < n$.

En utilisant la proposition 6, l'on voit que :

$$\pi_i(S^{n+p-1}) \longleftarrow \pi_i(V_{p,n}) \longleftarrow \pi_i(V_{p-1,n})$$ est une suite exacte, ce

qui, d'après l'hypothèse de récurrence, montre bien que $\pi_i(V_{p,n}) = 0$ si $i < n$. Appliquant alors un théorème de l'exposé 8, on obtient :

Théorème 3.- Soit B un espace localement compact et paracompact de dimension $< n$. Tout espace fibré principal de base B et de groupe structural $SO(p)$ est image réciproque de $V_{p,n}$ par rapport à une certaine application de B dans $G^{\circ}_{p,n}$. Les classes d'espaces fibrés correspondent biunivoquement aux classes d'homotopie des applications correspondantes.

On remarquera, que si l'on avait fait opérer $O(p)$ sur $V_{p,n}$, la base aurait été une véritable grassmannienne. On aurait obtenu un théorème tout à fait analogue au théorème précédent, où $O(p)$ aurait remplacé $SO(p)$ et $G_{n+p-1,p-1}$ $G^{\circ}_{p,n}$.

Remarque : On voit ainsi que le problème de classer les espaces fibrés de base B de dimension finie et de groupe structural le groupe orthogonal est équivalent à celui de la classification des classes d'homotopie des applications de B dans un espace bien déterminé, que l'on pourrait appeler espace classifiant (pour le groupe orthogonal).

Il existe des espaces classifiants pour tout groupe de Lie connexe.

En effet, si le groupe est compact, il peut être considéré comme un sous-groupe du groupe orthogonal et on peut le faire opérer sur une $V_{p,n}$. La base de l'espace fibré ainsi obtenu est l'espace classifiant cherché. Si le groupe n'est pas compact, il possède (Iwasawa) un sous-groupe compact maximal g et est homéomorphe à $g \times R^q$. On fait opérer g sur une $V_{p,n}$ et on fait l'extension de g au groupe considéré. Il n'est pas difficile de voir que l'espace obtenu a tous ses groupes d'homotopie nuls jusqu'au n-1-ième et sa base est l'espace classifiant cherché.

Dans des cas particuliers, on peut construire des espaces classifiants par d'autres méthodes. Par exemple, dans le cas du groupe unitaire, on peut construire une "variété de Stiefel complexe" en prenant les systèmes de p vecteurs orthonormaux d'un espace hermitien.

Autre remarque : Le théorème 3 a comme cas particulier la classification des espaces fibrés par des sphères, le groupe structural étant le groupe orthogonal (ou spécial orthogonal).

4.- Les groupes fondamentaux des groupes classiques.

Nous allons déterminer les groupes fondamentaux des groupes $SO(n)$, $SU(n)$ et $Sp(n)$, dits groupes classiques. On sait l'importance de cette détermination, par exemple pour l'étude des représentations de ces groupes.

On a vu que l'on avait les fibrations suivantes :

$Sp(n)$ fibré par $Sp(n-1)$, la base étant S^{4n-1}.

$SU(n)$ fibré par $SU(n-1)$, la base étant S^{2n-1}.

$SO(n)$ fibré par $SO(n-1)$, la base étant S^{n-1}.

La suite exacte d'homotopie donne alors :

$$\pi_2(S^{4n-1}) \longrightarrow \pi_1(Sp(n-1)) \longrightarrow \pi_1(Sp(n)) \longrightarrow \pi_1(S^{4n-1})$$
$$\pi_2(S^{2n-1}) \longrightarrow \pi_1(SU(n-1)) \longrightarrow \pi_1(SU(n)) \longrightarrow \pi_1(S^{2n-1})$$
$$\pi_2(S^{n-1}) \longrightarrow \pi_1(SO(n-1)) \longrightarrow \pi_1(SO(n)) \longrightarrow \pi_1(S^{n-1})$$

Ces suites exactes donnent pour des valeurs convenables de n :

$$\pi_1(Sp(n-1)) = \pi_1(Sp(n)) \quad \text{si} \quad 2 < 4n-1 \quad \text{ou} \quad n \geqslant 1 .$$
$$\pi_1(SU(n-1)) = \pi_1(SU(n)) \quad \text{si} \quad 2 < 2n-1 \quad \text{ou} \quad n \geqslant 2 .$$
$$\pi_1(SO(n-1)) = \pi_1(SO(n)) \quad \text{si} \quad 2 < n-1 \quad \text{ou} \quad n \geqslant 4 .$$

Autrement dit, les groupes fondamentaux des trois familles précédentes sont respectivement isomorphes à ceux de $Sp(o)$, $SU(1)$ et $SO(3)$. Les deux premiers sont nuls, puisque les groupes correspondants le sont aussi. Pour déterminer le troisième, il suffit d'observer que $SO(3)$ admet S^3, le groupe des quaternions de norme 1, comme revêtement à deux feuillets. Son groupe de Poincaré est donc cyclique d'ordre deux. On a ainsi établi le résultat suivant :

Théorème 4.- Les groupes symplectiques et unitaires unimodulaires sont simplement connexes. Le groupe orthogonal unimodulaire a un groupe fondamental cyclique d'ordre deux.

La même méthode récurrente permet d'obtenir des renseignements sur les groupes d'homotopie supérieurs des groupes classiques.

Elle permet de démontrer que le groupe G_2 des automorphismes de l'algèbre de Cayley (le premier groupe exceptionnel) est simplement connexe.

5.- Groupes d'homotopie des sphères.

Rappelons les fibrations suivantes :

S^3 fibrée par S^1 , la base étant S^2 .
S^7 fibrée par S^3 , la base étant S^4 .
S^{15} fibrée par S^7 , la base étant S^8 .

Dans chaque cas, la fibre est homotope à zéro dans l'espace fibré. On peut alors appliquer la Proposition 2 et l'on obtient :

Proposition 7.- Pour tout i , $\pi_i(S^2)$ (resp. $\pi_i(S^4)$, resp. $\pi_i(S^8)$) est une extension de $\pi_i(S^3)$ (resp. $\pi_i(S^7)$, resp. $\pi_i(S^{15})$) par $\pi_{i-1}(S^1)$ resp. $\pi_{i-1}(S^3)$, resp. $\pi_{i-1}(S^7)$) .

(Nota : On peut montrer au moyen de la suspension de Freudenthal que cette extension est triviale.)

Appliquons la proposition précédente au cas où $i \geqslant 3$. On a :

Proposition 8.- Pour $i \geqslant 3$, $\pi_i(S^2) = \pi_i(S^3)$. En particulier, $\pi_3(S^2) = Z$.

On verra dans l'exposé 11 comment ce résultat permet de déterminer les groupes d'homotopie $\pi_{n+1}(S^n)$.

Cherchons l'élément générateur de $\pi_3(S^2)$. Il correspond, d'après la suite exacte, à l'élément générateur de $\pi_3(S^3)$, c'est-à-dire à l'application identique. On en conclut que l'élément générateur de $\pi_3(S^2)$ n'est autre que la classe d'homotopie de la projection de S^3 sur S^2 .

6.- Impossibilité de certaines fibrations des sphères.

Nous allons donner des conditions nécessaires pour que l'on puisse fibrer une sphère de dimension $p+q$ par des sphères de dimension p , la base étant une sphère de dimension q . Nous supposons p et q supérieurs à 1 .

On peut alors appliquer la proposition 2 et l'on voit que :

$\pi_i(S^q)$ est une extension de $\pi_i(S^{p+q})$ par $\pi_{i-1}(S^p)$.

Appliquons ceci avec $i = \mathrm{Inf}(q , p+1)$. Si q n'est pas égal à $p+1$, deux des groupes précédents sont nuls sans que le troisième le soit, ce qui est impossible. D'où :

Proposition 9.- Si S^{p+q} est fibrée par S^p , la base étant S^q , on a $p = q - 1$.

On notera que l'on ne connaît l'existence de telles fibrations que si $q = 1, 2, 4$ ou 8. On a des conditions nécessaires plus fortes que celle donnée par la Proposition 9 (Cf. Gysin) mais aucune n'est suffisante.

APPENDICE

Un résultat sur l'homotopie des groupes topologiques.

Soit G un groupe topologique d'élément neutre e, et $\mathcal{F}_n(G, e)$ l'espace des applications continues de I^n dans G qui envoient F^{n-1} en e. Au lieu de munir cet espace de sa loi de composition habituelle, qui donne $\pi_n(G, e)$, munissons-le de la loi : $f.g(x) = f(x).g(x)$ (le dernier produit étant pris au sens de G). On obtient ainsi un groupe topologique (si on le munit de la topologie de la convergence compacte), et si l'on passe au quotient par rapport à la connexion par arc, un certain groupe K_n. K_n est en correspondance naturelle avec $\pi_n(G)$.

Proposition 10.- (Hurewicz) - La correspondance canonique entre K_n et $\pi_n(G)$ est un isomorphisme de groupes.

Remarquons que $K_n = K_1(\mathcal{F}_{n-1}(G, e))$ et que $\pi_n(G) = \pi_1(\mathcal{F}_{n-1}(G, e))$. Comme on a remarqué que $\mathcal{F}_{n-1}(G, e)$ était un groupe topologique, on voit qu'il nous suffira de montrer le résultat en question pour $n = 1$. Nous allons donc montrer que si f et g sont deux lacets de G, les lacets $f(t).g(t)$ et ($f(2t)$ si $t \leq 1/2$ et $g(2t-1)$ si $t \geq 1/2$) sont homotopes. Pour cela, il suffit d'introduire la famille de lacets suivante :

$$h_s(t) = \begin{cases} f(t).g(t) & \text{si } t \geq s \\ f(2t) & \text{si } t \leq s/2 \\ f(s).g(2t-s) & \text{si } s/2 \leq t \leq s \end{cases}$$

Pour $s = 0$ et $s = 1$ respectivement, on trouve les deux lacets en question.

BIBLIOGRAPHIE

Celle de l'exposé précédent, avec en outre :

[1] B. ECKMANN. Über die Homotopiegruppen von Gruppenraumen. Commentarii math. helvetici, t. 14, 1942, p. 234-256.

[2] N.E. STEENROD. The classification of sphere bundles. Annals of Math., t. 45, 1944, p. 294-311.

[3] H. WHITNEY. On the theory of sphere-bundles. Proc. nat. Acad. of Sc., U.S.A., t. 26, 1940, p. 148-153.