J-P. Serre

Groupes d'homotopie

Séminaire Henri Cartan, tome 2 (1949-1950), exp. nº 2, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1949-1950__2__A2_0>

Séminaire H. CARTAN, E.N.S., 1949/50.

GROUPES D'HOMOTOPIE

(Exposé de J-P. SERRE, le 14.11.1949)

1.- Groupe fondamental.

Soit Y un espace topologique et y un point de Y. Soit $F_1(Y, y)$ l'espace des applications continues f de I (segment $[o, 1]$) dans Y telles que $f(o) = f(1) = y$. Une telle application est dite un lacet. On peut aussi considérer un lacet comme une application d'un cercle dans Y telle qu'un point fixé du cercle vienne en y.

Dans $F_1(Y, y)$, on définit une loi de composition en posant :

$$\begin{aligned} f.g(t) &= f(2t) && \text{si } t \leqslant 1/2 \\ &= g(2t-1) && \text{si } t \geqslant 1/2 \end{aligned}$$

D'autre part, on dit que deux lacets f et g sont homotopes s'ils sont dans une même composante connexe par arc de $F_1(Y, y)$ (muni, comme d'habitude, de la topologie de la convergence compacte - voir 1-03). Il revient au même de dire qu'il existe une application continue F de I^2 dans Y, telle que $F(t, o) = f(t)$, $F(t, 1) = g(t)$ et $F(o, t') = F(1, t') = y$.

L'homotopie est une relation d'équivalence compatible avec la composition des lacets. Par passage au quotient, on montre que l'on obtient un groupe, généralement non abélien, appelé groupe fondamental de Y en y (ou groupe de Poincaré, ou encore premier groupe d'homotopie) et que l'on désigne par $\pi_1(Y, y)$.

Lorsque l'on change le point de base y, l'on obtient un système de groupes locaux au sens de Steenrod (voir An 1, Exposé X). En particulier, si l'espace Y est connexe par arc, le groupe de Poincaré ne dépend pas du point y choisi, et on le note alors $\pi_1(Y)$.

Donnons un cas important où le groupe de Poincaré est abélien :

Théorème 1.- *Le groupe de Poincaré de l'espace d'un groupe topologique est abélien.*

(On montrera dans un exposé ultérieur que ce résultat s'étend à une vaste catégorie d'espaces homogènes, résultat dû à Hu)

Démonstration : les translations étant des homéomorphismes, on peut se borner à montrer que le groupe de Poincaré au point unité e est abélien. Soit $q = xyx^{-1}y^{-1}$ un commutateur. L'égalité $q = 1$ signifie que l'on peut prolonger à tout le carré l'application de sa frontière qui est $f(t)$ pour les points (t , o) et $(t , 1)$ et qui est $g(t)$ pour les (o , t) et $(1 , t)$. Or, il suffit pour cela de poser $F(t , t') = f(t).g(t')$ (le produit étant pris au sens du groupe topologique).

Remarque : En fait, on n'a pas utilisé en entier l'hypothèse que G est un groupe topologique. En examinant le raisonnement précédent, on obtient :

Théorème 1'.- Soit X un espace topologique où est définie une loi de composition continue, admettant un idempotent e tel que les applications $x \to x.e$ et $x \to e.x$ soient homotopes à l'application identique (e restant fixe durant l'homotopie). Alors $\pi_1(X , e)$ est abélien.

2.- Définition des groupes d'homotopie.

Au lieu d'étudier les classes d'applications de cercles dans un espace donné Y, on va étudier les classes d'applications de sphères (de dimension quelconque) dans Y. Pour pouvoir définir une loi de groupe dans cet ensemble de classes, il est commode de remplacer la sphère par une figure équivalente ; dans le cas du cercle, on avait utilisé le segment I dont les deux extrémités étaient identifiées ; pour la sphère à n dimension S^n on utilisera le cube I^n dont la frontière F^{n-1} est identifiée à un point, ce point servant de "point marqué".

Posons alors les définitions suivantes :

Soit $F_n(Y , y)$ l'espace des applications continues de I^n dans Y qui appliquent F^{n-1} dans y. Désignons par y l'application constante de I^n dans y. On vérifie facilement que l'application qui à $f \in F_n(Y , y)$ fait correspondre l'élément de l'espace $F_1(F_{n-1}(Y , y) , y)$ défini par $t \to f(t , x_2 , \dots , x_n)$ est un homéomorphisme du premier espace sur le second (revenant aux sphères, cela revient à considérer une application d'une sphère de dimension n comme un lacet d'applications de sphères de dimension $n-1$, lacet ayant pour extrémités l'application constante y). Ainsi les composantes connexes par arc de $F_n(Y , y)$ correspondent canoniquement aux classes de lacets dans $F_{n-1}(Y , y)$. Pour définir une loi de groupe sur cet ensemble, il est alors naturel de prendre celle du groupe fondamental de $F_{n-1}(Y , y)$. Nous sommes ainsi amenés à la définition :

Le groupe $\pi_1(F_{n-1}(Y , y) , y)$ est appelé n-ème groupe d'homotopie de Y au point y et noté $\pi_n(Y , y)$. Ses éléments correspondent biunivoquement aux composantes connexes par arc de $F_n(Y , y)$.

Explicitons la loi de groupe de $\pi_n(Y , y)$: ses éléments sont, comme il vient d'être dit, les classes d'homotopie des applications de I^n dans Y, envoyant F^{n-1} en y. Si f et g sont deux telles applications, on pose :

$$f.g(x_1 , x_2 , \ldots , x_n) = \begin{cases} f(2x_1 , x_2 , \ldots , x_n) & \text{si } x_1 \leqslant 1/2 \\ g(2x_1-1 , x_2 , \ldots , x_n) & \text{si } x_1 \geqslant 1/2 \end{cases} .$$

Cette multiplication est compatible avec l'homotopie et définit, par passage au quotient, la loi de groupe de $\pi_n(Y , y)$.

Cas particuliers : Pour $n = 1$, on retrouve le groupe fondamental, car $F_o(Y , y)$ est homéomorphe à Y (si l'on fait la convention classique que I^o est réduit à un point). La notation π_n est donc cohérente.

Pour $n = o$, il est naturel d'appeler $\pi_o(Y , y)$ l'ensemble des composantes connexes par arc de Y. Il n'y a pas de procédé "naturel" d'en faire un groupe. Cependant on y considérera comme distinguée la composante de y.

Théorème 2.- Pour tout espace Y, $\pi_n(Y , y)$ est abélien si $n \geqslant 2$.

En effet, si $n \geqslant 2$, $F_{n-1}(Y , y)$ est muni d'une loi de composition, à savoir celle que l'on obtient en le considérant comme espace des lacets de $F_{n-2}(Y , y)$. Or un espace de lacets vérifie les conditions du théorème 1', ce qui démontre notre théorème.

"Géométriquement" cela signifie que l'on peut échanger continûment les deux moitiés d'un cube de dimension $n \geqslant 2$, ce qui est en effet facile par rotation.

3.- Le système local des groupes d'homotopie.

Soient y_o et y_1 deux points de Y, et φ un chemin joignant y_o à y_1, c'est-à-dire une application de I dans Y telle que $\varphi(o) = y_o$ et $\varphi(1) = y_1$. On désignera $\varphi(t)$ par y_t. Un élément $f_t \in F_n(Y , y_t)$ est appelé tube (bien entendu, on exige que f_t varie continûment au sens de la convergence compacte dans l'espace des applications continues de I^n dans Y). f_o et f_1 sont dits entrée et sortie du tube. On démontre que, le chemin y_t étant fixé, la classe d'homotopie de f_1 ne dépend que de celle de f_o et que l'on obtient ainsi un isomorphisme de $\pi_n(Y, y_o)$ sur $\pi_n(Y, y_1)$. En outre cet isomorphisme ne dépend que de la classe d'homotopie du chemin y_t [1]. On a ainsi muni l'ensemble des $\pi_n(Y, y)$ d'une structure de <u>système de groupes locaux</u> sur Y. Si $n = 1$, on retrouve le système défini au paragraphe 1.

En particulier, si Y est connexe par arc, les $\pi_n(Y, y)$ sont tous isomorphes. Dans la suite de ce paragraphe nous ferons l'hypothèse que Y est connexe par arc. Dans ce cas, on sait (An 1, X-1) que le système local est entièrement <u>déterminé</u> par l'homomorphisme de $\pi_1(Y, y)$ dans $\mathrm{Aut}(\pi_n(Y, y))$. Si $n=1$, cet homomorphisme n'est autre que la représentation adjointe.

<u>Espace</u> n-<u>simple</u> : un espace Y connexe par arc est dit n-simple <u>si le système de groupes locaux</u> $\pi_n(Y, y)$ <u>est constant</u> (ou simple-loc. cit. p.3). Il revient au même de dire que $\pi_1(Y, y)$ opère trivialement sur $\pi_n(Y, y)$, ou encore que deux éléments de $F_n(Y, y)$ homotopes au sens large (c'est-à-dire dans une homotopie où le point marqué peut se déplacer) le sont aussi au sens strict.
"1-simple" est donc équivalent à : $\pi_1(Y)$ est abélien. Le théorème 1 se laisse généraliser de la façon suivante :

<u>Théorème 3</u>.- L'espace d'un groupe topologique est n-simple.

(De même que le théorème 1, le théorème 3 a été généralisé par Hu à certains espaces homogènes)

Soient f_1 et f_o deux applications de I^n dans Y telles que $f_i(F^{n-1}) = e$ (unité du groupe Y). Supposons f_o et f_1 homotopes <u>au sens large</u> : il existe une famille continue d'applications f_t de I^n dans Y telles que $f_t(F^{n-1})$ soit un point unique y_t. Posons :

$g_t(x) = y_t^{-1}.f_t(x)$. On a : $g_o = f_o$ et $g_1 = f_1$. Cela montre que f_o et f_1 sont homotopes <u>au sens strict</u>, c.q.f.d.

Autres cas de n-simplicité : $\pi_1(Y) = o$, ou bien $\pi_n(Y) = o$, car dans les deux cas on est bien sûr que la représentation de $\pi_1(Y)$ dans $\mathrm{Aut}(\pi_n(Y))$ est triviale !

Signalons enfin que, lorsque Y est simple en dimension n, les éléments de $\pi_n(Y)$ correspondent canoniquement aux classes d'applications de S^n dans Y.

---

[1] Les démonstrations se font en utilisant de façon répétée le théorème 4 de l'Exposé 1.

4.- Compléments homologiques.

Pour étudier les rapports de l'homotopie et de l'homologie, il est parfois commode d'introduire l'homologie cubique.

Un cube singulier de dimension n est une application continue de I^n dans Y, c'est-à-dire une fonction continue de n variables x_i $(o < i \leq n)$ variant entre o et 1, et à valeurs dans Y. Une chaîne singulière cubique est une somme formelle de cubes singuliers, à coefficients dans un groupe abélien G. On convient d'identifier à o les "cubes aplatis", c'est-à-dire dépendant effectivement de moins de n variables. Dans ce groupe $C_n(Y, G)$ des chaînes cubiques on définit un opérateur de dérivation de degré -1 par la formule :

$$df_n = f(1, x_1, \dots, x_n) - f(o, x_1, \dots, x_n) - f(x_1, 1, x_2, \dots) +$$
$$+ f(x_1, o, x_2, \dots) + f(x_1, x_2, 1, \dots) - \dots$$

On vérifie que $d.d = o$, ce qui permet de définir les groupes d'homologie cubique à coefficients dans G : $H_n(Y, G)$. De la même façon, on a des groupes de cohomologie.

On démontre que les groupes ainsi obtenus sont canoniquement isomorphes aux groupes d'homologie et de cohomologie construits avec les simplexes singuliers.

Groupes d'Eilenberg

Soit y un point de l'espace Y. Soit $C_{n,m}(Y, y, G)$ (en abrégé $C_{n,m}$) le sous-groupe de $C_n(Y, G)$ formé des combinaisons de cubes singuliers de dimension n dont toutes les faces de dimension $m-1$ sont appliquées en y. On a : $d(C_{n,m}) \subset C_{n-1,m}$ ce qui permet de définir les groupes d'homologie $H_{n,m}$ (groupes d'Eilenberg) et une suite d'homomorphismes canoniques :

$$H_n = H_{n,o} \leftarrow H_{n,1} \leftarrow H_{n,2} \leftarrow \dots \leftarrow H_{n,n} \leftarrow H_{n,n+1} = o$$

(définitions analogues en cohomologie).

5.- Premiers rapports entre homotopie et homologie.

Théorème 4.- Il existe un isomorphisme canonique de $H_{n,n}(Y, y, Z)$ sur $\pi_n(Y, y)$. (si $n = 1$, on doit modifier l'énoncé en remplaçant π_1 par π_1 rendu abélien).

Démonstration : Tout élément de $\pi_n(Y , y)$ est une classe de cubes singuliers de $C_{n,n}$. Ces cubes sont d'ailleurs des cycles, leur bord étant "dégénéré" donc nul, et deux cubes de la même classe d'homotopie sont homologues car leur différence est le bord du cube de déformation. On en déduit une application de $\pi_n(Y , y)$ dans $H_{n,n}(Y , y , Z)$ qui est un homomorphisme (construire un cube convenable). Cet homomorphisme sera désigné par u.

D'autre part, on a un homomorphisme de $C_{n,n}(Y , y , Z)$ dans $\pi_n(Y,y)$, éventuellement rendu abélien, défini en faisant correspondre à tout cube singulier sa classe dans π_n et en prolongeant par linéarité. Admettant que cet homomorphisme est nul sur les bords, on en déduit un homomorphisme de $H_{n,n}$ dans π_n que l'on désignera par v. On a évidemment $u.v = 1$ et $v.u = 1$ ce qui démontre le théorème (dans le cas de $n = 1$, il faut modifier les équations $uv = 1$ et $vu = 1$ de façon convenable).

Le point que nous avons admis en cours de démonstration peut s'énoncer :

Lemme : Etant donné un cube singulier à $n+1$ dimensions de $C_{n+1,n}$, la somme des éléments du groupe π_n définis par ses faces orientées est nulle.

La démonstration de ce lemme est laissée à l'imagination du lecteur.

Théorème 5.- Si $\pi_{n-1}(Y , y) = o$, l'homomorphisme canonique de $H_{m,n}(Y , y , G)$ dans $H_{m,n-1}(Y , y , G)$ est un isomorphisme sur.

On va définir dans $C_{m,n-1}$ un opérateur d'homotopie qui sera en même temps un projecteur sur $C_{m,n}$. Cela démontrera le théorème, comme on sait. Pour cela, et comme dans l'exposé IX , An 1 , il suffit de définir une déformation continue et héréditaire des cubes de $C_{m,n-1}$ sur deux de $C_{m,n}$. Définissons donc une telle déformation, par récurrence sur m. Pour $m \leq n-1$, nous prenons la déformation identique ; pour $m = n$, nous choisissons une déformation, ce qui est possible, car cela exprime justement la nullité de π_{n-1} ; pour $m \geq n+1$, la déformation est déjà connue sur le bord, et il suffit de la prolonger à l'intérieur du cube, ce qui est possible d'après le théorème 4 de 1-06.

Corollaire 1 : Si Y est connexe par arc (c'est-à-dire si $\pi_o(Y) = o$), $H_1(Y , Z)$ est isomorphe au groupe de Poincaré de Y rendu abélien.

En effet, le théorème précédent montre que $H_1(Y)$ est isomorphe à $H_{1,1}(Y , y)$ lequel d'après le théorème 4 est isomorphe à $\pi_1(Y)$ rendu abélien.

Un raisonnement tout analogue donne :

Corollaire 2 : Le premier groupe d'homotopie non nul d'un espace est isomorphe (une fois rendu abélien) au groupe d'homologie à coefficients entiers correspondant.

6.- Application aux groupes d'homotopie des sphères.

Nous allons donner quelques résultats fondamentaux sur les groupes $\pi_i(S^n)$.

Cas n = 1 : les théorèmes précédents ne nous donnent qu'un résultat sur $\pi_i(S^1)$: $\pi_1(S^1) = Z$ (car il en est de même du 1er groupe d'homologie et l'on sait que $\pi_1(S^1)$ est abélien, puisque S^1 est une variété de groupe topologique).

On verra dans un exposé ultérieur que $\pi_i(S^1) = o$ pour $i \geqslant 2$.

Cas $n \geqslant 2$: On a tout d'abord le résultat suivant :
$\pi_1(S^n) = o$. Ce résultat peut se démontrer de bien des façons :

La sphère étant un espace homogène auquel les résultats de Hu s'appliquent, son groupe de Poincaré est abélien, et le Corollaire 1 donné plus haut entraîne le résultat en question.

Moyennant quelques résultats sur les revêtements, on montre qu'un espace réunion de deux espaces simplement connexes d'intersection connexe est simplement connexe. Or c'est bien le cas de la sphère (hémisphères).

Ce résultat étant obtenu, le Corollaire 2 donne les groupes suivants :

$$\pi_i(S^n) = o \quad \text{si} \quad i < n \qquad ---- \qquad \pi_n(S^n) = Z \ .$$

La nullité de $\pi_i(S^n)$ pour $i < n$, peut aussi se démontrer si l'on sait que toute application de S^i dans S^n est homotope à une application laissant échapper un point, ce que l'on peut voir, soit par approximation simpliciale, soit par approximation différentiable.

Remarquons enfin que la sphère étant n-simple, le résultat $\pi_n(S^n) = Z$, entraîne la classification homotopique des applications d'une sphère dans elle-même, résultat dû à Hopf, et sur lequel on reviendra dans le prochain exposé.

BIBLIOGRAPHIE

S. EILENBERG : Extension and classification of continuous mappings. (Lectures in Topology - Michigan, 1941).
Singular homology theory (Annals of Math., tome 45, 1944, p. 407-447.

W. HUREWICZ : Beiträge zur Topologie der Deformationen, I, II (Proc. Amst. tome 38, 1935, p. 112-119 et p. 521-528).

S. LEFSCHETZ : Introduction to Topology - Princeton mathematical Series, n° 11 , 1949.