J-P. Serre

Espaces avec groupes d'opérateurs. Compléments

Séminaire Henri Cartan, tome 3 (1950-1951), exp. n° 13, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1950-1951__3__A13_0>

Séminaire H. CARTAN
E.N.S., 1950/51 . Topologie algébrique

ESPACES AVEC GROUPES D'OPÉRATEURS. COMPLÉMENTS.

(Exposé de J-P. SERRE, le 12.3.1951).

Première partie : Revêtements finis.

1.- Rappel.

Soit G un groupe fini d'ordre q opérant sans points fixes sur un espace X ; soit $B = X/G$; on a vu dans l'exposé précédent que :

(1) $$H_i(B,k) = H_i(X,k)_G \quad , \quad H^i(B,k) = H^i(X,k)^G \qquad i = 0, 1, \ldots ,$$

lorsque k est un corps de caractéristique nulle ou première à p.

Exemple : Supposons que X soit un groupe de Lie connexe, et que G soit un sous-groupe de X, opérant par translations. Dans ce cas, les transformations définies par les éléments de G sont homotopes à l'identité, et opèrent trivialement sur les groupes d'homologie et de cohomologie de X. On a alors :

(1') $$H_i(B,k) = H_i(X,k) \quad , \quad H^i(B,k) = H^i(X,k) \quad .$$

Dans le cas particulier où G est invariant, et X compact, on retrouve ainsi le fait que deux groupes de Lie compacts localement isomorphes ont même cohomologie réelle.

2.- Formule des traces.

Dans ce paragraphe, nous supposerons que k est de caractéristique nulle.

Si nous désignons par b_i , x_i les nombres de Betti de B et X respectivement, on tire de la formule (1) la formule suivante :

(2) $$b_i \leq x_i \quad .$$

On va préciser ceci par un procédé dû à Eckmann :

Notons $V_{i,g}$ l'automorphisme de $H^i(X,k)$ défini par $g \in G$. Je dis que :

(3) $$b_i = 1/q \sum_{g \in G} \mathrm{Tr}(V_{i,g})$$

Etant donné la formule (1), il suffit évidemment de prouver le lemme suivant, bien connu dans la théorie des représentations linéaires de groupes compacts :

Lemme : Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k

de caractéristique nulle, $g \longrightarrow V_g$ une représentation linéaire dans E d'un groupe G fini d'ordre q, E^G le sous-espace de E formé des éléments x tels que $V_g x = x$ pour tout $g \in G$. On a alors :

$$\dim(E^G) = 1/q \sum_{g \in G} \mathrm{Tr}(V_g) \quad .$$

Démonstration : Soit $P = 1/q \sum_{g \in G} V_g$; $PV_g = V_g P = P$ pour tout $g \in G$ comme on le voit tout de suite. D'où $P^2 = P$: P est un projecteur. Si $Px = x$, $V_g x = V_g Px = Px = x$, et $x \in E^G$. Réciproquement, si $x \in E^G$, on a : $Px = 1/q(x + x + \ldots + x) = x$. Autrement dit, la variété du projecteur P est égale à E^G. Or la dimension de la variété d'un projecteur est égale à sa trace (parce que le corps est de caractéristique nulle). On a donc :

$$\dim(E^G) = \mathrm{Tr}(P) = 1/q \sum_{g \in G} \mathrm{Tr}(V_g) \quad , \quad \text{c.q.f.d.}$$

3.- Formule de Lefschetz.

Supposons que X soit un polyèdre fini ; si $g \neq e$, $g \in G$, la transformation de X définie par g est sans point fixe (par hypothèse), donc son nombre de Lefschetz $L(g) = \sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(V_{i,g})$ est nul. On obtient ainsi :

$$(4) \qquad \sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(V_{i,g}) = 0 \qquad \text{pour tout } g \in G \ , \ g \neq e \ .$$

Application :

Considérons l'expression $S = \sum_{i,g} (-1)^i \mathrm{Tr}(V_{i,g})$.

En effectuant la sommation d'abord par rapport à g, et utilisant la formule (3), on trouve :

$$S = q \left(\sum_i (-1)^i b_i \right) = q.\chi(B)$$

(χ désignant la caractéristique d'Euler-Poincaré).

En effectuant la sommation d'abord par rapport à i, et en utilisant la formule (4), on trouve :

$$S = \sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(V_{i,e}) = \sum_i (-1)^i x_i = \chi(X) \quad .$$ D'où :

$$(5) \qquad \chi(X) = q.\chi(B) \quad .$$

4.- Revêtements finis généraux.

Désignons maintenant par (X, B) un couple d'espaces tel que X soit un revêtement fini d'ordre q de B. On sait que X peut être considéré comme le quotient du revêtement universel $\bar{B}$ de B par un sous-groupe g du groupe fondamental π de B. Si g est un sous-groupe invariant, le groupe $G = \pi/g$ opère sans point fixe sur X, on a $B = X/G$, et l'on est dans les conditions d'application des résultats précédents.

Mais, dans le cas général où g n'est pas invariant (revêtements non galoisiens), que subsiste-t-il de ces résultats ?

La formule (1) n'a plus de sens ; par contre, la formule (2) en a un et reste valable. Pour le voir, soit s un simplexe singulier de B ; c'est l'image d'exactement q simplexes singuliers de X, soient $s_1, \dots, s_q$. Considérons l'homomorphisme défini par :

$$k(s) = 1/q(s_1 + \dots + s_q) \quad .$$

Cet homomorphisme applique les chaînes de B dans celles de X, commute avec le bord, et, si p désigne la projection de X sur B, on a :

$$p \circ k = 1 \quad .$$

Passant de là à l'homologie, on voit que k identifie $H_i(B, k)$ à un sous-espace de $H_i(X, k)$, d'où l'inégalité (2) : $b_i \leq x_i$.

D'autre part, la formule (5), relative aux caractéristiques d'Euler-Poincaré de X et de B, reste valable également. C'est en effet un cas particulier de la Proposition 4 de l'exposé 10, relative aux espaces fibrés. C'est facile à voir directement, en décomposant simplicialement B, donc X, et en remarquant que X a q fois plus de sommets, d'arêtes, etc, que B.

5.- Application aux groupes libres.

Soit π un groupe libre à N générateurs, g un sous-groupe de π. On va montrer ceci :

a) g est lui-même un groupe libre.

b) Si g est d'indice fini q dans π, alors g a n générateurs indépendants, avec : $n-1 = q(N-1)$.

(Ces résultats sont dus à Schreier).

Soit T^N le tore à N dimensions, et B le sous-espace de T^N dont toutes les composantes, sauf une au plus, sont nulles. B est un complexe fini, connexe, de dimension 1, et dont le groupe fondamental est isomorphe à π. Soit $\bar{B}$ son revêtement universel et posons $X = \bar{B}/g$.

L'espace X est aussi un complexe à 1 dimension, et son groupe fondamental est donc un groupe libre (cela résulte de la construction du groupe fondamental d'un complexe par générateurs et relations). Comme d'autre part, ce groupe fondamental est g , il en résulte que g est un groupe libre, ce qui établit a).

D'autre part, si g est d'indice fini q dans π , X est un revêtement d'ordre fini q de B . Or les nombres de Betti de X et de B sont les suivants :

$$b_0 = x_0 = 1 \quad ; \quad x_0 = n \quad , \quad b_1 = N \quad ,$$

puisque le 1er groupe d'homologie est isomorphe au groupe fondamental rendu abélien. On a donc $\chi(B) = 1 - N$, $\chi(X) = 1 - n$, d'où en appliquant (5) :

$$(1-N)q = 1 - n \quad , \quad \text{c.q.f.d.}$$

Exemples :

Si $N = 1$, on voit que $n = 1$: tout sous-groupe d'indice fini de Z est isomorphe à Z .

Par contre, si $N > 1$, on voit que $n > N$: un groupe libre contient des sous-groupes d'indice fini, libres, et ayant davantage de générateurs.

6.- Relations entre la cohomologie d'un groupe fini et celle de ses sous-groupes de Sylow.

Il est naturel de se demander quelles relations existent entre $H^i(\pi , k)$ et $H^i(g , k)$ lorsque :

a) π est un groupe fini.

b) g est un p-groupe de sylow de π (autrement dit, l'ordre de g est une puissance de p (p premier), et $[\pi : g]$ est premier à p) .

c) k est un corps de caractéristique p (sur lequel π opère trivialement).

Soit alors $\bar{B}$ un complexe, d'homotopie triviale jusqu'à une certaine dimension, et sur lequel π opère sans points fixes (on peut voir qu'il y en a, pour des dimensions arbitrairement grandes, en plongeant π dans un groupe orthogonal que l'on fait opérer sur une variété de Stiefel - Cf. Séminaire 1949/1950, Exp. 10) . Posons $X = \bar{B}/g$, et $B = \bar{B}/\pi$. L'espace X est un revêtement de l'espace B , d'ordre premier à p .

Supposons d'abord g invariant dans π .

Alors, en posant $G = \pi/g$, on voit que X est galoisien sur B , de groupe G . On applique les formules (1) et l'on trouve :

$$H^i(B , k) = H^i(X , k)^G \quad .$$

Mais, d'après le théorème d'Hurewicz, plusieurs fois démontré dans les exposés antérieurs, on a :

$H^i(B , k) = H^i(\pi , k)$ et $H^i(X , k) = H^i(g , k)$, pour les i assez petits. On a donc en définitive :

$H^i(\pi , k)$ s'identifie au sous-groupe de $H^i(g , k)$ formé des éléments invariants par les transformations de $G = \pi/g$.

(On peut définir algébriquement les transformations en question, grâce à l'homomorphisme canonique : $G \longrightarrow \mathrm{Aut}(g)/\mathrm{Int}(g)$, défini par la suite exacte $1 \longrightarrow g \longrightarrow \pi \longrightarrow G \longrightarrow 1$).

Que se passe-t-il lorsque g n'est pas supposé invariant ?

En appliquant les résultats du numéro 4, on voit tout d'abord que $H^i(\pi,k)$ se plonge isomorphiquement dans $H^i(g , k)$.

Soit alors N le normalisateur de g dans π . On peut faire opérer N/g sur $H^i(g , k)$ comme précédemment, et on voit aisément que $H^i(\pi, k)$ est contenu dans le sous-espace de $H^i(g , k)$ formé des points fixes pour ces transformations.

On pourrait se demander si $H^i(\pi , k)$ est exactement égal à l'ensemble de ces points fixes (Voir plus loin pourquoi). Malheureusement, il n'en est rien : pour $i = 1$, Wielandt a montré qu'il fallait imposer au p-groupe de Sylow considéré certaines conditions : par exemple, être abélien, ou bien être d'ordre $\leqslant p^p$. Pour $i > 1$, on ne sait rien.

Analogie avec les groupes de Lie compacts.

Si l'on traduit la question précédente à l'aide du dictionnaire bien connu qui fait passer de la théorie des groupes finis à celle des groupes de Lie, on obtient ceci :

Soit π un groupe de Lie compact connexe, g un de ses tores maximaux, N le normalisateur de g dans π . Soit $H^i(E_\pi)$ le i-ème groupe de cohomologie à coefficients réels de la base d'un espace classifiant pour π (c'est ce qui correspond à $H^i(\pi , k)$ lorsque π est un groupe fini), et définissons de même $H^i(E_g)$. Dans ces conditions peut-on affirmer que $H^i(E_\pi)$ s'identifie au sous-espace de $H^i(E_g)$ formé des éléments laissés fixes par les transformations du groupe $\Phi = N/g$?

Ici, la réponse est affirmative (Voir, par exemple, Séminaire 1949/1950 , Exp. 20 ainsi que J. Leray, Conférence au Colloque de Bruxelles, et A. Borel, Thèse).

Note - La méthode utilisée au début de ce numéro conduit plus généralement à une étude des rapports existant entre les cohomologies d'un groupe, d'un sous-groupe invariant, et du quotient. Voir J-P. SERRE, C. R. Acad. Sci. Paris, 231, 1950, p. 281-283 .

Deuxième partie : Les groupes opérant sans points fixes sur les sphères.

7.- Rappel.

Soit G un groupe fini d'ordre q opérant sans points fixes sur S_n . Nous supposerons que n est impair, car si non, G est nécessairement isomorphe à $Z/(2)$; il en résulte (formule de Lefschetz) que toutes les transformations de G conservent l'orientation de S_n . On peut alors appliquer les résultats de l'exposé précédent, et on trouve ainsi :

$$H^n(G , Z) = 0 \tag{6}$$

$$H^{n+1}(G , Z) = Z/(q) \tag{7}$$

$$H^{i+n+1}(G , Z) = H^i(G , Z) \quad \text{pour tout } i \geq 1 . \tag{8}$$

Nous allons utiliser ces formules pour déterminer, au moins en partie, quels sont les groupes G susceptibles d'opérer sans points fixes sur une sphère S_n donnée.

8.- Cas des groupes abéliens.

On va montrer ceci :

Tout groupe abélien opérant sans points fixes sur S_n est cyclique.

Tout groupe abélien qui n'est pas cyclique contient un sous-groupe de la forme $Z/(p) + Z/(p)$, p premier. Il suffit donc de montrer qu'un tel groupe, G , ne peut opérer sans points fixes sur S_n , et pour cela, d'après la formule (7), il suffira de voir que $H^{n+1}(G , Z)$ n'est pas égal à $Z/(p^2)$ (n impair) .

Or ceci est clair, car $Z/(p)$ étant facteur direct de G , il s'ensuit que $H^{n+1}(Z/(p),Z) = Z/(p)$ est facteur direct de $H^{n+1}(G , Z)$, propriété qui n'est visiblement pas remplie par $Z/(p^2)$. c.q.f.d.

On observera que, réciproquement, tout groupe cyclique peut opérer sans point fixe sur S_n (n impair) .

9.- Cas des p-groupes.

(Rappelons que l'on appelle p-groupe un groupe fini dont l'ordre est une puissance de p)

Soit G un p-groupe opérant sans point fixe sur S_n , n impair, et soit g un sous-groupe d'ordre p^2 de G ; on sait que g est abélien (car tout groupe d'ordre p^2 est abélien), et opère sans point fixe sur S_n . D'après ce qui précède, il est donc cyclique, et G est un p-groupe dont tous les sous-groupes d'ordre p^2 sont cycliques. Il en résulte (Zassenhaus, Gruppentheorie, Kap. IV, paragraphe 3, numéro 6) :

a) si $p \neq 2$: G est cyclique ,

b) si $p = 2$: G est cyclique, ou bien est un "groupe de quaternions généralisé" .

(Un groupe de quaternions généralisé d'ordre 2^{r+2} , $r = 1 , 2 , \dots$, est défini par deux générateurs A et B , soumis aux relations :

$$A^{(2^{r+1})} = 1 \quad , \quad B^2 = A^{(2^r)} \quad , \quad BAB^{-1} = A^{-1} \quad) .$$

Réciproquement, si G est un groupe de quaternions, on peut le plonger dans le groupe S_3 des quaternions de norme 1 , en posant $A = e^{i\alpha}$, $B = j$, avec $\alpha = \pi/2^r$. Par exemple, si $r = 1$, on trouve le groupe à 8 éléments (± 1 , $\pm i$, $\pm j$, $\pm k$) . Comme S_3 opère sans points fixes sur S_3 , S_7 , ... (identifiées aux sphères unité d'espaces vectoriels quaternioniens), il en est de même de G . On voit ainsi que G opère sans point fixe sur S_{4n-1} . Reste à montrer qu'il ne peut pas faire de même sur S_{4n+1} , et pour cela, nous allons calculer ses groupes de cohomologie à coefficients entiers.

Vu que G opère sur S_3 sans points fixes, on sait déjà qu'il suffit de calculer $H^i(G , Z)$ pour $0 \leq i \leq 4$. En outre on sait que $H^3(G , Z) = 0$, et $H^4(G , Z) = Z/(2^{r+2})$. Par ailleurs, on a $H^0(G , Z) = Z$ et $H^1(G , Z) = \mathrm{Hom}(G , Z) = 0$. Reste seulement à calculer $H^2(G , Z)$.

Or, d'après la formule des coefficients universels, on a :

$$H^2(G , Z) = \mathrm{Hom}(H_2(G , Z) , Z) + \mathrm{Ext}(H_1(G , Z) , Z) \quad .$$

Mais $H_2(G , Z)$ est un groupe de torsion (Exp. 5, numéro 1), et le 1er terme est donc nul. Pour calculer le second, on remarque que $H_1(G , Z)$ est isomorphe à G rendu abélien, c'est-à-dire ici, à $Z/(2) + Z/(2)$.

Groupant ces résultats, on trouve les groupes de cohomologie cherchés :

Z , 0 , $Z/(2) + Z/(2)$, 0 , $Z/(2^{r+2})$, 0 , $Z/(2) + Z/(2)$, 0 , $Z/(2^{r+2})$ ...

Il est alors clair que les seules périodes de cette suite de groupes sont 4 , 8 , 12 , ... , ce qui démontre (d'après (8)) que G ne peut opérer sans points fixes sur S_{4n+1} .

Ceci résout un problème de P. A. Smith (Eilenberg, Annals of Math., 50, 1949, p. 247-260, Problème 37).

10.- Cas général.

Soit G un groupe opérant sans points fixes sur S_{4n+1} . D'après ce qui précède, tous ses groupe de Sylow sont cycliques, et le groupe est lui-même un groupe métacyclique, produit direct croisé de deux groupes cycliques (Voir Zassenhaus, Kap. V, paragraphe 3, Satz 11). Mais malheureusement, on ne peut affirmer que tous les groupes métacycliques puissent opérer sans point fixe sur une sphère. Par exemple, considérons le groupe G non abélien, à 6 éléments (groupe symétrique de degré 3). On peut montrer (en utilisant le fait que c'est un produit croisé et appliquant la théorie de la cohomologie des extensions de groupes) que ses groupes de cohomologie à valeurs $\in Z$ sont les suivants :

Z , 0 , $Z/(2)$, 0 , $Z/(6)$, 0 , $Z/(2)$, 0 , $Z/(6)$, ... etc .

D'après ceci, G ne peut opérer sans points fixes sur S_{4n+1} , mais par contre, pourrait opérer sur S_{4n-1} . En fait, c'est fort improbable, et ce n'est en tout cas pas possible au moyen de rotations.

Bien entendu, si l'on considère S_{4n-1} , et que l'on accepte des sous-groupes de Sylow quaternioniens, le problème de la détermination de tous les groupes G possibles devient encore bien plus compliqué : il existe des groupes G répondant à la question, et qui ne sont pas résolubles, dès S_3 (grâce aux polyèdres réguliers de l'espace à trois dimensions). Même dans le cas des groupes de rotations (qui fait l'objet de la thèse de Vincent, Comm. math. helvetici, 19, 1947, p. 117-171) , on n'a pas de résultats définitifs.

11.- Application : Possibilité pour une sphère d'être un espace fibré principal.

Supposons que S_n soit un espace fibré principal de groupe structural G , groupe de Lie connexe (et compact !). Puisque les transformations de G sont homotopes à l'identité, il s'ensuit que n est impair. En outre, je dis que G est de rang 1 , c'est-à-dire ne contient pas de tores à deux dimensions. En effet, un tel tore contient un sous-groupe isomorphe à $Z/(p) + Z/(p)$, et on sait que ce dernier groupe ne peut opérer sans points fixes sur S_n .

Il suffit donc d'examiner les <u>trois</u> groupes de rang 1 : T , SO(3) , et $SU(2) = Sp(1) = S_3$:

$\left\{\right.$ T peut opérer sur S_{2n-1} identifié à la sphère unité de C^n ,

S_3 peut opérer sur S_{4n-1} identifiée à la sphère unité de K^n (K : corps des quaternions). Par contre S_3 ne peut opérer sans points fixes sur S_{4n+1} puisqu'il contient un groupe de quaternions.

SO(3) ne peut opérer sans points fixes sur aucune sphère, car il contient le groupe $Z/(2) + Z/(2)$.

On notera que les deux premiers résultats sont des cas particuliers d'un théorème de A. Borel sur l'impossibilité de fibrer une sphère par des fibres ayant la même cohomologie qu'un produit de sphères (A. Borel, C.R. Acad. Sci. Paris, <u>231</u>, 1950, p. 943-945).

<u>Troisième partie</u> : <u>Les problèmes de points fixes</u>.

12.- <u>Les points fixes</u>.

La théorie développée dans les exposés précédents n'est applicable avec plein succès que dans le cas où aucune transformation (sauf l'identité) du groupe considéré G n'a de points fixes. Lorsque cette condition n'est pas remplie, on a des résultats partiels (mais profonds !) dûs pour la plupart à P. A. Smith (<u>Voir</u> Lefschetz, <u>Algebraic Topology</u>, App. B , ou bien l'exposé de Smith dans les "<u>Lectures in Topology</u>"). Les méthodes employées par Smith sont purement cohomologiques, mais différentes de celles utilisées dans les exposés précédents. A vrai dire, le rapport des deux théories reste assez mystérieux.

Indiquons une application donnée par Smith, des questions de points fixes :

Soit V_C une variété algébrique complexe, définie dans l'espace projectif complexe par un certain nombre d'équations à <u>coefficients réels.</u> Le passage d'un point au point complexe conjugué définit un automorphisme d'ordre 2 de V_C dont les points fixes forment l'ensemble V_R des <u>nappes réelles</u> de V_C . Ceci permet d'obtenir des renseignements sur la topologie de V_R : par exemple, si V_C est une <u>courbe</u> de genre p (donc, au point de vue topologique, un tore à p trous), on peut montrer que le nombre des composantes connexes de V_R est $\leq p+1$. On retrouve ainsi, par voie purement topologique, un théorème de Harnack : <u>le nombre des branches réelles d'une courbe de genre</u> p <u>est au plus égal à</u> p+1 .

13.- Les points fixes d'un groupe opérant sur une sphère.

Smith a démontré que, si $G = Z/(p)$ opérait sur une sphère S_n, l'ensemble L des points fixes était une "sphère homologique mod.p" c'est-à-dire un espace de même homologie mod.p qu'une sphère S_k. En outre, si $p \neq 2$, $n - k$ est pair.

On peut étendre ce résultat, comme Smith l'a montré, à tout p-groupe G opérant sur S_n. En effet, soit $1 \subset g_1 \subset g_2 \subset \ldots \subset G$ une suite de Jordan-Hölder de G. Les quotients successifs g_i/g_{i-1} sont isomorphes à $Z/(p)$, d'après une propriété connue des p-groupes.

Soit alors L_1 l'ensemble des points fixes de g_1. D'après ce qui précède, L_1 est p-sphère homologique. Ceci permet d'appliquer à g_2/g_1, qui opère sur L_1, le même résultat. On obtient $L_2 \subset L_1$, et ainsi de suite.

Corollaire : Soit G un p-groupe opérant sur R^n. Il existe au moins un point de R^n laissé fixe par toutes les transformations de G.

Compactifions R^n par un point à l'infini, et prolongeons par continuité les transformations de G à la sphère S_n ainsi obtenue. Puisque l'ensemble des points de S_n fixes par G est une sphère homologique, il ne peut pas être réduit au seul point à l'infini, et doit contenir au moins un autre point. c.q.f.d.

Problème ouvert - Est-ce que tout groupe fini (ou même compact) opérant sur R^n admet un point fixe par toutes les transformations du groupe ?

La réponse est affirmative si le groupe est un tore (Smith) - Par contre, on ne sait rien dans le cas du groupe $Z/(6)$!)

14.- Les groupes finis opérant sur une variété.

Smith (Annals of Math., 42, 1941, p. 446-458) a montré ceci :

Soit V une variété ; il existe un recouvrement $\mathcal{U}$ de V tel que, si un groupe G d'opérateurs de V a toutes ses orbites petites d'ordre $\mathcal{U}$ alors $gx = x$ pour tous $x \in V$, $g \in G$ (G étant fini).

(L'énoncé de Smith est légèrement plus fort).

La conséquence la plus intéressante de ce théorème est qu'un groupe localement euclidien ne peut avoir de sous-groupes finis arbitrairement petits.

Je ne donnerai pas la démonstration de Smith, trop longue, et je me bornerai à démontrer un résultat analogue, mais bien plus faible :

<u>Soit</u> X <u>un espace compact, rétracte absolu de voisinage, de dimension finie. Il existe un entourage</u> $\mathcal{U}$ <u>de la structure uniforme de</u> X , <u>tel que, si</u> G <u>fini, opère sans points fixes sur</u> X , <u>l'une des orbites de</u> G <u>n'est pas petite d'ordre</u> $\mathcal{U}$.

X étant de dimension finie, plongeons-le dans R^n , et soit O un voisinage de X dans R^n possédant une rétraction r sur X (un tel voisinage existe puisque X est un rétracte absolu de voisinage). On peut trouver un entourage $\mathcal{V}$ sur X , assez petit pour que, si A est une partie de X petit d'ordre $\mathcal{V}$, l'enveloppe convexe $C(A)$ de A dans R^n soit contenue dans O . On peut trouver un entourage $\mathcal{U}$ encore plus petit, de telle sorte que, si A est petit d'ordre $\mathcal{U}$, $r(C(A))$ soit petit d'ordre $\mathcal{V}$. Cela étant, notons que deux points de X voisins d'ordre $\mathcal{V}$ peuvent être joints sur X par un arc, dépendant continûment de ces deux points : il suffit de les joindre par un segment dans O , et de projeter le segment sur X au moyen de la rétraction $r : O \longrightarrow X$.

On peut supposer que $G = Z/(p)$ opère sans point fixe sur X . Raisonnons par l'absurde et supposons que toutes les orbites de G soient petites d'ordre $\mathcal{U}$. Posons $B = X/G$, et écrivons la suite spectrale du revêtement (X , B) , à coefficients dans un corps k de caractéristique p . Le terme E_∞ est le groupe gradué associé à $H^*(B)$, et le terme E_2 est $H^*(G , H^*(X))$. Mais les transformations de G sont homotopes à l'identité, d'après ce qui précède, et G opère trivialement sur $H^*(X)$. Ceci permet d'écrire E_2 sous la forme $H^*(G) \otimes H^*(B)$ (produit tensoriel d'<u>algèbres</u> graduées à élément unité). Admettons pour un instant que l'application canonique : $H^*(B) \longrightarrow H^*(X)$ soit <u>sur</u> ; comme l'image de cette application est formée des éléments de $1 \otimes H^*(X)$ qui sont des d_r-cocycles pour tous les d_r $(r \geq 2)$, il s'ensuit que les d_r sont nulles sur $H^*(X)$. Comme elles le sont sur $H^*(G) \otimes 1$, et que ce sont des <u>antidérivations</u>, elles le sont partout, et $E_\infty = E_2$. Il en résulte une contradiction, car $H^*(B , k)$ est nul pour les dimensions assez grandes, tandis que $H^*(G)$ ne l'est pas.

Reste donc à vérifier que $H^*(B) \longrightarrow H^*(X)$ est <u>sur</u> .

Pour cela, soit $p : X \longrightarrow B$, et définissons $k : B \longrightarrow X$ ainsi : soit $b \in B$, et $x \in X$, avec $p(x) = b$. Considérons les transformés $(X_1 = x , x_2 , \ldots , x_p)$ de x par G , et soit y leur centre de gravité dans R^n . Il est clair que y ne dépend que de b , et est situé dans O . On peut donc poser : $k(b) = r(y)$.

Considérons maintenant $k \circ p : X \longrightarrow X$. Il est clair que cette application transforme un point x en un point voisin d'ordre γ donc est homotope à l'identité. En passant à la cohomologie, on trouve bien que $H^*(B) \longrightarrow H^*(X)$ est <u>sur</u>, c.q.f.d.