H. Cartan

Théorie de la cohomologie des espaces

Séminaire Henri Cartan, tome 3 (1950-1951), exp. nº 17, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1950-1951__3__A17_0>

Séminaire H. CARTAN,
E.N.S., 1950/51 . Topologie algébrique.

THÉORIE DE LA COHOMOLOGIE DES ESPACES

(Exposé de H. CARTAN, le 30.4.1951)

1.- Φ-<u>résolutions d'un faisceau ; faisceaux</u> Φ-<u>injectifs</u>.

<u>Définition</u> : on appelle Φ-<u>résolution</u> d'un faisceau F une suite exacte de faisceaux et d'homomorphismes

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow A_o \longrightarrow A_1 \longrightarrow \dots \ A_n \longrightarrow \dots$$

telle que $H^q_\Phi(\mathcal{X}, A_n) = 0$ pour $q \geq 1$ et $n \geq 0$.

Par exemple, une résolution fine de K (Exposé 16) est une Φ-résolution de K , et ceci quelle que soit la famille Φ . Cela résulte de la proposition 1 de l'Exposé 16.

Etant donné une Φ-résolution de F , on lui associe le faisceau gradué avec cobord A , somme directe des A_n . Le module des sections $\Gamma_\Phi(A) = \sum_n \Gamma_\Phi(A_n)$ est un module gradué avec cobord ; on peut considérer ses modules de cohomologie $H^n(\Gamma_\Phi(A))$.

<u>Théorème 1</u>.- <u>Si un complexe</u> A <u>de faisceaux est une</u> Φ-<u>résolution d'un faisceau</u> F , <u>on a un isomorphisme canonique</u> $H^n(\mathcal{X}, F) \approx H^n(\Gamma_\Phi(A))$, <u>pour tout</u> $n \geq 0$.

(Ceci généralise le calcul de $H^n(\mathcal{X}, F)$ par $H^n(\Gamma_\Phi(C \circ F))$, C étant un faisceau fondamental (Exposé 16, paragraphe 3)).

<u>Démonstration</u> : par récurrence sur n . Pour $n = 0$, on observe que la suite $0 \longrightarrow \Gamma_\Phi(F) \longrightarrow \Gamma_\Phi(A_o) \longrightarrow \Gamma_\Phi(A_1)$ est exacte, d'où $H^o_\Phi(\mathcal{X}, F) = \Gamma_\Phi(F) \approx H^o(\Gamma_\Phi(A))$. Soit maintenant $n > 0$; soit, pour $i \geq 1$, Z_i le noyau de $A_i \longrightarrow A_{i+1}$; les suites exactes $0 \longrightarrow F \longrightarrow A_o \longrightarrow Z_1 \longrightarrow 0$, ... , $0 \longrightarrow Z_i \longrightarrow A_i \longrightarrow Z_{i+1} \longrightarrow 0$, ... , donnent des isomorphismes $H^n_\Phi(\mathcal{X}, F) \approx H^{n-1}_\Phi(\mathcal{X}, Z_1) \approx \dots \approx H^1_\Phi(\mathcal{X}, Z_{n-1}) \approx H^o_\Phi(\mathcal{X}, Z_n)/\mathrm{Im}\, H^o_\Phi(\mathcal{X}, A_{n-1})$. Ce dernier, par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_\Phi(A_{n-1}) \arrow[r] \arrow[dr, "f_{n-1}"'] & \Gamma_\Phi(Z_n) \arrow[d, "\text{biunivoque}"] & \\
& \Gamma_\Phi(A_n) \arrow[d] \arrow[dr, "f_n"] & \\
& \Gamma_\Phi(Z_{n+1}) \arrow[r, "\text{biunivoque}"] & \Gamma_\Phi(A_{n+1})
\end{tikzcd}$$

est canoniquement isomorphe au quotient du noyau de f_n par l'image de f_{n-1}, c'est-à-dire à $H^n(\Gamma_\Phi(A))$.

<u>Définition</u> : un faisceau G est dit Φ-<u>injectif</u> si, pour tout homomorphisme de faisceaux $F \to F'$ qui applique F <u>sur</u> F', l'homomorphisme correspondant

$$\Gamma_\Phi(G \circ F) \longrightarrow \Gamma_\Phi(G \circ F')$$

applique le premier module <u>sur</u> le second. En particulier, si G est Φ-injectif et <u>sans torsion</u>, alors $\Gamma_\Phi(G \circ F)$, considéré comme foncteur du faisceau F, est un <u>foncteur exact</u> (i.e.: transforme les suites exactes de faisceaux en suites exactes de modules).

<u>Si G est Φ-injectif et sans torsion, on a $H^q(\mathcal{X}, G \circ F) = 0$ pour tout $q \geq 1$ et tout faisceau F</u>. En effet, plongeons F dans un <u>fin</u> F' ; on a une suite exacte de faisceaux

$$0 \to G \circ F \to G \circ F' \to G \circ F'' \to 0$$

d'où $H^1_\Phi(\mathcal{X}, G \circ F) = \Gamma_\Phi(G \circ F'')/\mathrm{Im}\ \Gamma_\Phi(G \circ F')$, qui est nul puisque G est Φ-injectif. On montre ensuite que $H^q_\Phi(\mathcal{X}, G \circ F)$ est nul pour tout F, par récurrence sur $q \geq 1$; car si $q \geq 2$, c'est isomorphe à $H^{q-1}_\Phi(\mathcal{X}, G \circ F'')$, qui est nul par l'hypothèse de récurrence appliquée à F''.

<u>Corollaire du théorème 1</u> : soit une suite exacte de faisceaux

$$0 \to K \to C_0 \to C_1 \to \dots \to C_n \to \dots$$

telle que les C_n soient Φ-<u>injectifs et sans torsion</u> (pour $n \geq 0$). Alors $H^n_\Phi(\mathcal{X}, F) \approx H^n(\Gamma_\Phi(C \circ F))$.

En effet, les $C_n \circ F$ constituent une Φ-résolution du faisceau F. (Ce résultat généralise celui obtenu (Exposé 16) dans le cas où les C_n sont <u>fins</u>).

Le faisceau $C = \sum_{n \geq 0} C_n$ (faisceau gradué avec cobord) s'appellera un <u>faisceau Φ-fondamental</u> s'il satisfait à l'hypothèse de l'énoncé précédent.

2.- <u>Sous-espaces ouverts, sous-espaces fermés</u>.

Soit $\mathcal{Y}$ un sous-espace ouvert (resp. fermé) de l'espace $\mathcal{X}$. Pour toute famille Φ sur $\mathcal{X}$, considérons la sous-famille $\Phi_\mathcal{Y}$ des ensembles de Φ qui sont contenus dans $\mathcal{Y}$ (lorsque $\mathcal{Y}$ est fermé, les ensembles de $\Phi_\mathcal{Y}$ ne sont autres que les intersections de $\mathcal{Y}$ avec les ensembles de Φ). On vérifie sans peine que, dans chacun des 2 cas ($\mathcal{Y}$ ouvert, $\mathcal{Y}$ fermé), $\Phi_\mathcal{Y}$ satisfait aux axiomes des familles Φ . La famille $\Phi_{\mathcal{Y}}$ s'appellera la famille induite par Φ sur le sous-espace $\mathcal{Y}$.

Etant donné un faisceau F sur l'espace $\mathcal{X}$, on a défini (Exp.14, 4) le faisceau induit par F sur le sous-espace $\mathcal{Y}$; ce faisceau F' est tel que, pour tout point $y \in \mathcal{Y}$, $F'_y = F_y$, la topologie de F' étant la topologie induite par celle de F . (On suppose l'ensemble F' plongé canoniquement dans l'ensemble F) .

Nous allons aussi envisager un point de vue en quelque sorte inverse :

Proposition 1.- Etant donné arbitrairement un faisceau G sur le sous-espace ouvert (resp. fermé) $\mathcal{Y}$, il existe sur l'espace ambiant $\mathcal{X}$ un faisceau $\overline{G}$ et un seul qui induise G sur $\mathcal{Y}$ et induise le faisceau nul sur le complémentaire $\complement\mathcal{Y}$.

Tout d'abord, l'ensemble $\overline{G}$ se compose nécessairement de la réunion des modules $\overline{G}_x$ définis par $\overline{G}_x = G_x$ pour $x \in \mathcal{Y}$, $\overline{G}_x = \{0\}$ pour $x \notin \mathcal{Y}$. Pour définir la topologie de $\overline{G}$, on doit attacher à chaque point $x \in \mathcal{X}$ et à chaque élément $\alpha \in \overline{G}_x$ une section de $\overline{G}$ au-dessus d'un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de x , section qui contienne l'élément α . Or si $x \notin \mathcal{Y}$, cette section doit être nulle au-dessus d'un voisinage assez petit de x ; et si $x \in \mathcal{Y}$, elle doit couper G suivant une section de G au-dessus de $\mathcal{V} \cap \mathcal{Y}$, et elle doit évidemment être nulle au-dessus de $\mathcal{V} \cap \complement\mathcal{Y}$; en outre, l'ensemble des points où elle est nulle doit être ouvert.

Si $\mathcal{Y}$ est ouvert, on aura donc un système fondamental d'ouverts de la topologie de $\overline{G}$, en prenant d'une part les sections de G au-dessus des ouverts de $\mathcal{Y}$, d'autre part les sections nulles au-dessus des ouverts de $\mathcal{X}$. On vérifie que ceci définit bien sur $\overline{G}$ une topologie de faisceau.

Si $\mathcal{Y}$ est fermé, on aura un système fondamental d'ouverts de la topologie de $\overline{G}$ en prenant arbitrairement un ouvert $\mathcal{V}$ de $\mathcal{X}$, plaçant au-dessus de $\mathcal{V} \cap \mathcal{Y}$ une section de G , et plaçant au-dessus de $\mathcal{V} \cap \complement\mathcal{Y}$ la section nulle. Ici encore, on obtient bien sur $\overline{G}$ une topologie de faisceau.

La proposition 1 est ainsi établie. Si, à chaque section γ de G (définie par une application continue $y \longrightarrow \gamma(y) \in G_y$ de $\mathcal{Y}$ dans G) , on associe l'application de $\mathcal{X}$ dans $\overline{G}$ définie par $x \longrightarrow \gamma(x)$ pour $x \in \mathcal{Y}$, et $x \longrightarrow 0 \in \overline{G}_x$ si $x \notin \mathcal{Y}$, on obtient une section de $\overline{G}$ au-dessus de $\mathcal{X}$, tout au moins dans chacun des 2 cas suivants : 1° $\mathcal{Y}$ est fermé ; 2° $\mathcal{Y}$ est ouvert, et le support de γ (sous-ensemble fermé de $\mathcal{Y}$) est fermé dans $\mathcal{X}$.

Cette condition sera toujours remplie si $y \in \Gamma_{\Phi_{\mathcal{Y}}}(G)$; $\Phi_{\mathcal{Y}}$ étant la famille induite sur $\mathcal{Y}$ par une famille Φ de l'espace ambiant $\mathcal{X}$. D'où :

Proposition 2.- $\mathcal{Y}$ étant toujours un sous-espace ouvert (resp. fermé) de $\mathcal{X}$, le prolongement de section défini ci-dessus définit, pour toute famille Φ sur $\mathcal{X}$, un isomorphisme canonique entre les modules de sections $\Gamma_{\Phi_{\mathcal{Y}}}(G)$ et $\Gamma_{\Phi}(\overline{G})$; ceci, pour tout faisceau G sur le sous-espace $\mathcal{Y}$.

Proposition 3.- Soit une famille Φ sur l'espace $\mathcal{X}$, et soit Φ' la famille induite par Φ sur un sous-espace ouvert (resp. fermé) $\mathcal{Y}$. Si un faisceau F , sur l'espace $\mathcal{X}$, est Φ-injectif, le faisceau F' qu'il induit sur $\mathcal{Y}$ est Φ'-injectif.

En effet, soit, sur $\mathcal{Y}$, un homomorphisme de faisceaux $G_1 \longrightarrow G_2$ qui soit un homomorphisme sur. Alors $\overline{G_1} \longrightarrow \overline{G_2}$ est, sur l'espace $\mathcal{X}$, un homomorphisme sur, et par suite l'homomorphisme $\Gamma_{\Phi}(F \circ \overline{G_1}) \longrightarrow \Gamma_{\Phi}(F \circ \overline{G_2})$ est sur, puisque F est supposé Φ-injectif. Or cet homomorphisme s'identifie à : $\Gamma_{\Phi'}(F' \circ G_1) \longrightarrow \Gamma_{\Phi'}(F' \circ G_2)$, et puisque ce dernier est sur, il est prouvé que F' est Φ'-injectif.

Corollaire : un faisceau Φ-fondamental sur $\mathcal{X}$ (16, numéro 3) induit sur $\mathcal{Y}$ un faisceau Φ'-fondamental.

Ce corollaire, la proposition 2, et le calcul de la cohomologie à l'aide d'un faisceau Φ-fondamental (corollaire du théorème 1) entraînent l'important résultat :

Proposition 4.- Pour tout faisceau G sur le sous-espace ouvert (resp. fermé) $\mathcal{Y}$, et pour toute famille Φ sur l'espace $\mathcal{X}$, les modules de cohomologie

$$H^n_{\Phi_{\mathcal{Y}}}(\mathcal{Y}, G) \quad \text{et} \quad H^n_{\Phi}(\mathcal{Y}, \overline{G})$$

sont canoniquement isomorphes.

3.- La suite exacte de cohomologie relative à un sous-espace ouvert et à son complémentaire fermé.

Soit $\mathcal{X}'$ un sous-espace ouvert de $\mathcal{X}$, et $\mathcal{X}''$ son complémentaire fermé. Pour tout faisceau F sur $\mathcal{X}$, soient F' et F'' les faisceaux induits sur $\mathcal{X}'$ et $\mathcal{X}''$ respectivement. Pour toute famille Φ sur $\mathcal{X}$, soient Φ' et Φ'' les familles induites sur $\mathcal{X}'$ et $\mathcal{X}''$. Le faisceau $\overline{F'}$ (prolongeant F' au-dessus de $\mathcal{X}$) s'identifie à un sous-faisceau de F (Exp. 14, numéro 3) ; le faisceau $\overline{F''}$ s'identifie au quotient de F par $\overline{F'}$. La suite exacte

$0 \longrightarrow \overline{F'} \longrightarrow F \longrightarrow \overline{F''} \longrightarrow 0$ donne naissance à une suite exacte de cohomologie

(1) $\ldots H^q_\Phi(\mathfrak{X}, \overline{F'}) \longrightarrow H^q_\Phi(\mathfrak{X}, F) \longrightarrow H^q_\Phi(\mathfrak{X}, \overline{F''}) \longrightarrow H^{q+1}_\Phi(\mathfrak{X}, \overline{F'}) \longrightarrow \ldots$

ce qui, compte tenu des isomorphismes de la proposition 3, donne une suite exacte :

(2) $\ldots H^q_{\Phi'}(\mathfrak{X}', F') \longrightarrow H^q_\Phi(\mathfrak{X}, F) \longrightarrow H^q_{\Phi''}(\mathfrak{X}'', F'') \longrightarrow H^{q+1}_{\Phi'}(\mathfrak{X}', F') \longrightarrow \ldots$

Dans le cas où Φ est la famille des <u>compacts</u> de $\mathfrak{X}$ supposé localement compact, Φ' est la famille des compacts de $\mathfrak{X}'$ et Φ'' la famille des compacts de $\mathfrak{X}''$; on retrouve la classique suite exacte de la cohomologie à supports compacts (le cas le plus simple étant celui où le faisceau F est constant ; les faisceaux F' et F'' sont alors constants).

Dans le cas général, on peut donner l'interprétation suivante des homomorphismes de cette suite exacte : soit C un faisceau Φ-fondamental de l'espace $\mathfrak{X}$; le faisceau induit C' (resp. C'') est Φ'-fondamental (resp. Φ''-fondamental) en vertu du corollaire de la proposition 3. On sait alors que la suite (1) est la suite exacte de cohomologie relative à la suite exacte de modules gradués à cobord :

$$0 \longrightarrow \Gamma_\Phi(C \circ \overline{F'}) \longrightarrow \Gamma_\Phi(C \circ F) \longrightarrow \Gamma_\Phi(C \circ \overline{F''}) \longrightarrow 0 .$$

Or cette suite s'identifie à

$$0 \longrightarrow \Gamma_{\Phi'}(C' \circ F') \longrightarrow \Gamma_\Phi(C \circ F) \longrightarrow \Gamma_{\Phi''}(C'' \circ F'') \longrightarrow 0 ,$$

et les modules de cohomologie des modules de cette suite sont précisément $H_{\Phi'}(\mathfrak{X}', F')$, $H_\Phi(\mathfrak{X}, F)$, $H_{\Phi''}(\mathfrak{X}'', F'')$. En résumé : si l'on utilise le module $\Gamma_\Phi(C \circ F)$ pour calculer la Φ-cohomologie de $\mathfrak{X}$ à coefficients dans F, le sous-module de $\Gamma_\Phi(C \circ F)$ formé des éléments dont le support est contenu dans l'ouvert $\mathfrak{X}'$ permet de calculer la Φ'-cohomologie de $\mathfrak{X}'$ à coefficients dans F', et le module-quotient permet de calculer la Φ''-cohomologie de $\mathfrak{X}''$ à coefficients dans F'' . Alors module, sous-module et module-quotient donnent naissance à la suite exacte de cohomologie (2).

4.- <u>Sur la notion de faisceau Φ-injectif</u>.

Soit une famille Φ sur l'espace $\mathfrak{X}$. Pour tout ouvert X dont l'adhérence appartient à Φ, la famille induite Φ_X n'est autre que la famille de tous les fermés de l'espace ambiant qui sont contenus dans X .

<u>Lemme</u> : pour qu'un faisceau F sur $\mathfrak{X}$ soit Φ-injectif, il faut et il suffit que, pour tout ouvert X dont l'adhérence appartient à Φ , et pour

tout homomorphisme d'un faisceau G_1 <u>sur</u> un faisceau G_2, l'homomorphisme

$$\Gamma_{\Phi_X}(F \circ G_1) \longrightarrow \Gamma_{\Phi_X}(F \circ G_2)$$

soit un homomorphisme <u>sur</u>.

La condition est suffisante, car Γ_Φ est évidemment la réunion des Γ_{Φ_X} quand X parcourt l'ensemble des X ouverts tels que $\bar{X} \in \Phi$. La condition est nécessaire, car soient G'_1 et G'_2 les faisceaux induits sur X ; alors $\overline{G'_1} \longrightarrow \overline{G'_2}$ est un homomorphisme <u>sur</u>, donc, si F est Φ-injectif, $\Gamma_\Phi(F \circ \overline{G'_1}) \longrightarrow \Gamma_\Phi(F \circ \overline{G'_2})$ est un homomorphisme <u>sur</u>. Or il s'identifie à $\Gamma_{\Phi_X}(F \circ G_1) \longrightarrow \Gamma_{\Phi_X}(F \circ G_2)$.

Comme conséquence de ce lemme, on obtient aussitôt :

<u>Proposition 5</u>.- Si on a deux familles Φ_1 et Φ_2 sur un même espace $\mathcal{X}$, telles que $\Phi_1 \supset \Phi_2$, tout faisceau Φ_1-injectif est Φ_2-injectif.

5.- <u>La dimension cohomologique</u>.

Un faisceau gradué C est dit de dimension $\leq n$ si $C_q = 0$ pour $q > n$. On se propose de chercher si un espace donné $\mathcal{X}$ possède un faisceau Φ-fondamental <u>de dimension</u> $\leq n$.

<u>Théorème 2</u>.- Un espace $\mathcal{X}$ et une famille Φ étant donnés, ainsi qu'un entier $n \geq 0$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) pour <u>tout</u> faisceau Φ-fondamental C, le sous-faisceau Z_n des cocycles de C de dimension n est Φ-injectif ;

(b) il existe un faisceau Φ-fondamental de dimension $\leq n$;

(c) les modules de cohomologie $H^q_\Phi(\mathcal{X}, F)$ sont nuls pour tout faisceau F et tout entier $q > n$;

(d) les modules de cohomologie $H^{n+1}_\Phi(\mathcal{X}, F)$ sont nuls pour tout faisceau F.

<u>Démonstration</u> : (a) $\Longrightarrow$ (b), car si Z_n est Φ-injectif, la suite exacte

$$C_0 \longrightarrow \dots \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow Z_n \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

est un faisceau Φ-fondamental.

(b) $\Longrightarrow$ (c), puisque la Φ-cohomologie de l'espace peut être calculée à l'aide du faisceau Φ-fondamental de dimension $\leq n$ dont l'existence est postulée par (b).

(c) $\Longrightarrow$ (d) trivialement.

(d) $\Longrightarrow$ (a) , car soit $0 \longrightarrow G' \longrightarrow G \longrightarrow G'' \longrightarrow 0$ une suite exacte de faisceaux ; on veut montrer que, pour tout faisceau Φ-fondamental C , le faisceau Z_n est tel que $\Gamma_\Phi(Z_n \circ G) \longrightarrow \Gamma_\Phi(Z_n \circ G'')$ est un homomorphisme sur. Or, si $n = 0$, c'est l'homomorphisme $\Gamma_\Phi(G) \longrightarrow \Gamma_\Phi(G'')$, puisque $Z_0 = K$; alors la suite exacte $\Gamma_\Phi(G) \longrightarrow \Gamma_\Phi(G'') \longrightarrow H^1_\Phi(\mathfrak{X}, G')$, dont le dernier terme est nul d'après l'hypothèse (d) , prouve l'assertion. Supposons maintenant $n \geq 1$; d'après le lemme de 16, 3, $H^n_\Phi(\mathfrak{X}, G) = H^n(\Gamma_\Phi(C \circ G))$ est le quotient de $\Gamma_\Phi(Z_n \circ G)$ par l'image de $\Gamma_\Phi(C_{n-1} \circ G)$; l'homomorphisme $G \longrightarrow G''$ définit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
\Gamma_\Phi(C_{n-1} \circ G) & \longrightarrow & \Gamma_\Phi(Z_n \circ G) & \longrightarrow & H^n_\Phi(\mathfrak{X}, G) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\Gamma_\Phi(C_{n-1} \circ G'') & \longrightarrow & \Gamma_\Phi(Z_n \circ G'') & \longrightarrow & H^n_\Phi(\mathfrak{X}, G'') & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

où les suites horizontales sont exactes. Le 3e homomorphisme vertical est <u>sur</u>, parce que $H^{n+1}_\Phi(\mathfrak{X}, G')$ est nul par hypothèse ; le 1er homomorphisme vertical est <u>sur</u>, parce que C_{n-1} est Φ-injectif ; de là résulte, par un raisonnement connu, que le second homomorphisme vertical est <u>sur</u>. Ceci achève la démonstration du théorème.

<u>Définition</u> : on dit qu'un espace $\mathfrak{X}$ est de Φ-dimension $\leq n$ si le module de cohomologie $H^q_\Phi(\mathfrak{X}, F)$ est nul pour tout faisceau F et tout entier $q > n$. De là on déduit immédiatement la définition de la Φ-dimension, lorsque celle-ci est finie.

Le théorème 1 donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un espace soit de Φ-dimension $\leq n$; on notera qu'un tel espace possède un faisceau Φ-fondamental de dimension $\leq n$. Si $\Phi_1 \supset \Phi_2$, et si $\mathfrak{X}$ est de Φ_1-dimension $\leq n$, $\mathfrak{X}$ est a fortiori de Φ_2-dimension $\leq n$ (en vertu de la proposition 5 et du théorème 2). Si $\mathfrak{X}$ est de Φ-dimension $\leq n$, et si $\mathfrak{Y}$ est un sous-espace ouvert (resp. fermé) de $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ est de Φ'-dimension $\leq n$ (Φ' désignant la famille induite par Φ sur $\mathfrak{Y}$) ; cela résulte aussitôt du corollaire de la proposition 3, et du théorème 2 .

On verra plus loin que si l'on adopte la définition classique de la dimension d'un espace paracompact (en faisant usage des recouvrements ouverts localement finis), et si une famille Φ est telle que ses ensembles soient de dimension (classique) $\leq n$, alors l'espace $\mathfrak{X}$ est de Φ-dimension $\leq n$.

6.- Produits en cohomologie.

Nous laisserons de côté ce qui concerne les produits quand on considère deux espaces et leur espace-produit, et nous nous consacrerons uniquement au cas où tout se passe sur le même espace $\mathfrak{X}$.

Soient deux familles Φ_1 et Φ_2 sur $\mathfrak{X}$; et soit Φ l'intersection de ces familles : elle satisfait aussi aux axiomes voulus. Soit C_1 un faisceau Φ_1-fondamental, et C_2 un faisceau Φ_2-fondamental. Considérons le faisceau $C_1 \circ C_2$, muni de la graduation totale, et de l'opérateur cobord total, à la manière habituelle du produit tensoriel de 2 modules gradués avec cobord. C'est un faisceau Φ -fondamental.

En effet, d'une part sa cohomologie est triviale, en raison du théorème classique "de Künneth". D'autre part, puisque C_1 est Φ_1-injectif, $C_1 \circ C_2$ l'est aussi (il suffit de remonter à la définition de Φ_1-injectif), et est a fortiori Φ-injectif (proposition 5).

Soient alors F_1 et F_2 deux faisceaux quelconques de coefficients ; $H^p_{\Phi_1}(\mathfrak{X}, F_1)$ s'identifie au p-ième module de cohomologie de $\Gamma_{\Phi_1}(C_1 \circ F_1)$, $H^q_{\Phi_2}(\mathfrak{X}, F_2)$ s'identifie au q-ième module de cohomologie de $\Gamma_{\Phi_2}(C_2 \circ F_2)$, et $H^n_{\Phi}(\mathfrak{X}, F_1 \circ F_2)$ s'identifie au n-ième module de cohomologie de $\Gamma_{\Phi}(C_1 \circ C_2 \circ F_1 \circ F_2)$. Or on a un homomorphisme canonique

$$\Gamma_{\Phi_1}(C_1 \circ F_1) \otimes \Gamma_{\Phi_2}(C_2 \circ F_2) \longrightarrow \Gamma_{\Phi}(C_1 \circ C_2 \circ F_1 \circ F_2) \quad ,$$

qui est compatible avec les graduations et les cobords (en prenant, dans le produit tensoriel $\Gamma_{\Phi_1} \otimes \Gamma_{\Phi_2}$, la graduation totale et le cobord total). En passant à la cohomologie, on obtient donc un homomorphisme

$$\text{(Pr)} \qquad H^p_{\Phi_1}(\mathfrak{X}, F_1) \otimes H^q_{\Phi_2}(\mathfrak{X}, F_2) \longrightarrow H^{p+q}_{\Phi}(\mathfrak{X}, F_1 \circ F_2) \; .$$

Cet homomorphisme est indépendant du choix particulier des faisceaux fondamentaux C_1 et C_2 , comme le prouve le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
\Gamma_{\Phi_1}(C_1 \circ F_1) & \otimes & \Gamma_{\Phi_2}(C_2 \circ F_2) & \longrightarrow & \Gamma_{\Phi}(C_1 \circ C_2 \circ F_1 \circ F_2) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\Gamma_{\Phi_1}(C_1 \circ C'_1 \circ F_1) & \otimes & \Gamma_{\Phi_2}(C_2 \circ C'_2 \circ F_2) & \longrightarrow & \Gamma_{\Phi}(C_1 \circ C'_1 \circ C_2 \circ C'_2 \circ F_1 \circ F_2) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\Gamma_{\Phi_1}(C'_1 \circ F_1) & \otimes & \Gamma_{\Phi_2}(C'_2 \circ F_2) & \longrightarrow & \Gamma_{\Phi}(C'_1 \circ C'_2 \circ F_1 \circ F_2)
\end{array}$$

L'homomorphisme (Pr) défini ci-dessus est celui qui, par définition, donne la structure "multiplicative" de la cohomologie.

La multiplication est <u>associative</u>, dans un sens évident ; cela provient de l'associativité du produit tensoriel : $(C_1 \circ C_2) \circ C_3 \approx C_1 \circ (C_2 \circ C_3)$. Elle est <u>anticommutative</u>, dans le sens suivant : le diagramme que voici est commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^p_{\Phi_1}(\mathcal{X}, F_1) \otimes H^q_{\Phi_2}(\mathcal{X}, F_2) & \longrightarrow & H^{p+q}_{\Phi}(\mathcal{X}, F_1 \circ F_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^p_{\Phi_2}(\mathcal{X}, F_2) \otimes H^p_{\Phi_1}(\mathcal{X}, F_1) & \longrightarrow & H^{p+q}_{\Phi}(\mathcal{X}, F_2 \circ F_1) \end{array} \quad ,$$

où les homomorphismes horizontaux sont les homomorphismes (Pr) de la multiplication, où le 2e homomorphisme vertical est celui défini par l'isomorphisme canonique $F_1 \circ F_2 \longrightarrow F_2 \circ F_1$ des faisceaux de coefficients, et où le premier homomorphisme vertical est défini par : $u \otimes v \longrightarrow (-1)^{pq} v \otimes u$, pour u de degré p et v de degré q . La démonstration est immédiate, compte tenu du fait que l'application de $C_1 \circ C_2$ sur $C_2 \circ C_1$ définie par $u \otimes v \longrightarrow (-1)^{pq} v \otimes u$ est <u>compatible avec les cobords</u>.

<u>Cas où l'on s'est donné un homomorphisme de</u> $F_1 \circ F_2$ <u>dans un faisceau</u> F . Alors $H^{p+q}_{\Phi}(\mathcal{X}, F_1 \circ F_2)$ s'envoie canoniquement dans $H^{p+q}_{\Phi}(\mathcal{X}, F)$; on obtient donc un homomorphisme multiplicatif :

$$H^p_{\Phi_1}(\mathcal{X}, F_1) \otimes H^q_{\Phi_2}(\mathcal{X}, F_2) \longrightarrow H^{p+q}_{\Phi}(\mathcal{X}, F) \quad .$$

En particulier, si F est un faisceau d'<u>algèbres</u>, on obtient une structure d'<u>algèbre graduée</u> sur $H_{\Phi}(\mathcal{X}, F)$; c'est l'<u>algèbre de cohomologie</u> de l'espace $\mathcal{X}$, à coefficients dans le faisceau d'algèbres F , pour une famille Φ donnée. Si le faisceau d'algèbres F est associatif, l'algèbre de cohomologie est associative ; si le faisceau est commutatif, l'algèbre de cohomologie est <u>anticommutative</u>.

<u>Cas où</u> C <u>est une algèbre différentielle</u>. Soit C un faisceau Φ-fondamental, qui soit un faisceau d'algèbres différentielles graduées (i.e.: la loi de multiplication, dans chaque algèbre, est telle que $\delta(uv) = (\delta u)v + (-1)^p u(\delta v)$, pour u de degré p). C'est par exemple le cas lorsque C est le faisceau d'Alexander-Spanier (la multiplication étant donnée par la formule classique) ; ou encore lorsque C est le faisceau des formes différentielles d'une variété différentiable (la multiplication étant la multiplication extérieure des formes différentielles). Alors l'homomorphisme

$C \circ C \longrightarrow C$ défini par cette structure multiplicative est compatible avec les cobords ; d'après l'Exp.16,n°4, l'homomorphisme $\Gamma_{\Phi}(C \circ C \circ F) \longrightarrow \Gamma_{\Phi}(C \circ F)$ qu'il définit donne naissance, quand on passe à la cohomologie, à l'<u>isomorphisme identique</u> $H^n_{\Phi}(\mathcal{X}, F) \longrightarrow H^n_{\Phi}(\mathcal{X}, F)$. Ainsi, lorsque C est un faisceau d'algèbres différentielles, et que C est à la fois Φ_1-injectif et Φ_2-injectif, l'homomorphisme

$$\Gamma_{\Phi_1}(C \circ F_1) \otimes \Gamma_{\Phi_2}(C \circ F_2) \longrightarrow \Gamma_{\Phi}(C \circ F_1 \circ F_2) \text{ défini par la}$$

structure multiplicative de C, donne naissance à l'homomorphisme (Pr) de la structure multiplicative de la cohomologie. En particulier : si en outre F est un faisceau d'algèbres, $\Gamma_{\Phi}(C \circ F)$ devient une algèbre différentielle, et son algèbre de cohomologie s'identifie (structure multiplicative comprise) à l'algèbre de Φ-cohomologie de l'espace, à coefficients dans F.

7.- <u>Recouvrement de Čech</u>.

Nous voulons signaler, sans aucun détail, comment la considération des <u>recouvrements ouverts localement finis</u> de l'espace $\mathcal{X}$ peut conduire à la Φ-cohomologie de cet espace. Il suffira de définir, à l'aide de ces recouvrements, une "théorie de la cohomologie" qui satisfasse aux axiomes de l'exposé 16.

Pour un tel recouvrement r, soit N_r le complexe simplicial, "nerf" du recouvrement r ; à chaque "simplexe" $s \in N_r$ on associe l'ensemble ouvert $X(s)$, intersection (non vide) des ouverts associés aux "sommets" de ce simplexe. Etant donné un faisceau F, on va considérer les "cochaînes" f, fonctions des simplexes s telles que $f(s) \in \Gamma(F, X(s))$ (module des sections de F au-dessus de l'ouvert $X(s)$). Elles forment un module gradué avec cobord, que nous noterons $C(r, F)$. On définit le "support" d'une cochaîne f comme la réunion des supports des valeurs $f(s)$ pour tous les simplexes s. Etant donnée une famille Φ, on considère le module $C_{\Phi}(r, F)$ des cochaînes dont le support appartient à Φ. Ses modules de cohomologie seront notés $H^q_{\Phi}(r, F)$.

Grâce à la notion de recouvrement subordonné à un autre, on peut considérer la <u>limite inductive</u> des modules $H^q_{\Phi}(r, F)$ quand r parcourt l'ensemble (filtrant) des recouvrements ouverts localement finis. C'est cette limite inductive que l'on prend comme module $H^q_{\Phi}(\mathcal{X}, F)$ de la théorie à définir. Pour achever de définir les données d'une telle théorie, la seule difficulté consiste à définir un homomorphisme $H^q_{\Phi}(\mathcal{X}, F'') \longrightarrow H^{q+1}_{\Phi}(\mathcal{X}, F')$ pour toute suite exacte $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$; nous n'insisterons pas sur ce point, ni sur la vérification des axiomes qui permettrait de prouver que les $H^q_{\Phi}(\mathcal{X}, F)$ définis ici sont bien les modules de Φ-cohomologie de l'espace. Il en résulterait ceci :

Si le"support" du faisceau F (i.e.: plus petit ensemble fermé tel que F induise zéro sur son complémentaire) rencontre chaque ensemble de Φ suivant un espace de dimension (classique) au plus égale à n , alors $H^q_{\Phi}(\mathcal{X}, F) = 0$ pour $q > n$.