

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

JEAN FRENKEL

Faisceau d'une sous-variété analytique

Séminaire Henri Cartan, tome 4 (1951-1952), exp. n° 16, p. 1-4

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1951-1952__4__A16_0

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1951-1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FAISCEAU D'UNE SOUS-VARIÉTÉ ANALYTIQUE
(Exposé de Jean Frenkel, 5-5-52).

Contrairement à l'exposé précédent (15), on supposera dans celui-ci, d'une manière essentielle, qu'il s'agit de fonctions analytiques sur le corps complexe, et de variétés analytiques-complexes.

1. Le faisceau d'une sous-variété analytique.

Soit E une variété analytique-complexe (au sens de 1), et soit V une sous-variété analytique de E (au sens de 12, n° 4). Pour chaque point $x \in E$, soit V_x le germe de sous-variété défini par V au point x (germe éventuellement vide). Soit \mathfrak{F}_x l'idéal du germe V_x : c'est, dans l'anneau des fonctions holomorphes au point x , l'idéal formé des germes de fonctions qui s'annulent sur le germe V_x . La collection des idéaux \mathfrak{F}_x satisfait visiblement à la condition (C) de l'exposé 15 (p. 3), et définit donc un sous-faisceau analytique du faisceau $\mathcal{O}(E)$. On l'appelle le faisceau de la sous-variété analytique V ; on le notera $\mathfrak{F}(V)$.

Le but de cet exposé est de démontrer le

Théorème. Le faisceau $\mathfrak{F}(V)$ d'une sous-variété analytique est un faisceau cohérent. (Pour la définition d'un faisceau cohérent voir 15, n° 4.)

On doit montrer que, pour tout point $a \in E$, il existe un ouvert U contenant a et un système fini d'éléments $u_i \in \mathcal{O}_U$ tel que, pour tout point $b \in U$, les u_i engendrent l'idéal $\mathfrak{F}_b(V)$. Or V_a est réunion d'une famille finie de germes irréductibles. Il existe donc un voisinage ouvert A de a et des sous-variétés analytiques W^k dans A , telles que:

1) $V \cap A = \bigcup_k W^k$;

2) pour tout k , le germe $(W^k)_a$ est irréductible.

La condition (1) entraîne que, dans l'ouvert A ,

$$\mathfrak{F}(V \cap A) = \bigcap_k \mathfrak{F}(W^k) .$$

Or on sait que l'intersection d'un nombre fini de faisceaux cohérents est un faisceau cohérent (exposé 15, coroll. 1, p. 9). Pour prouver que $\mathcal{F}(V \cap A)$ est cohérent, il suffira donc de montrer que chacun des faisceaux $\mathcal{F}(W^k)$ est cohérent.

En définitive, on est ramené à démontrer le théorème dans le cas où le germe V_a défini par V au point a est irréductible, c'est-à-dire dans le cas où l'idéal $\mathcal{F}_a(V)$ est premier. Nous ferons désormais cette hypothèse, et nous montrerons que, s'il en est ainsi, le faisceau $\mathcal{F}(V)$ est cohérent au point a .

2. Démonstration du théorème.

Soit S un système fini de générateurs de l'idéal premier $\mathcal{F}_a(V)$. Dans un voisinage de a , V est l'ensemble des zéros communs aux fonctions de S . Pour tout point b voisin de a , soit S_b l'idéal de \mathcal{O}_b engendré par S ; on a $S_a = \mathcal{F}_a(V)$ et $S_b \subset \mathcal{F}_b(V)$. Il s'agit de montrer que $S_b = \mathcal{F}_b(V)$ si b est assez voisin de a ; cela prouvera entièrement le théorème.

Tout d'abord, si $b \notin V$, il existe une fonction de S non nulle en b , donc $S_b = \mathcal{F}_b(V) = \mathcal{O}_b$. Il suffira donc de montrer ceci: pour tout point $b \in V$ assez voisin de a , toute $f \in \mathcal{O}_b$ qui s'annule sur V_b appartient à S_b . Tel va être l'objet des développements qui suivent.

On utilisera la théorie exposée dans 14. Le théorème 3 de 14 dit qu'on peut choisir: au voisinage de a des coordonnées locales x_1, \dots, x_n (nulles au point a); un polynôme $P(x_{p+1}; x_1, \dots, x_p)$ en x_{p+1} distingué et irréductible à l'origine; des polynômes $Q_i(x_{p+1}; x_1, \dots, x_p)$ en x_{p+1} de degrés strictement inférieurs au degré de P (pour $p+2 \leq i \leq n$) et que V , dans un voisinage de a , est l'adhérence de l'ensemble des solutions du système d'équations

$$P = 0, \quad P'x_i - Q_i = 0 \quad (p+2 \leq i \leq n)$$

pour lesquelles $P' \neq 0$. En outre, on sait que les x_i ($p+2 \leq i \leq n$) sont racines de polynômes unitaires $R_i(x_i; x_1, \dots, x_p)$. Les fonctions

$$P, \quad P'x_i - Q_i, \quad R_i$$

appartiennent évidemment à l'idéal $\mathfrak{p} = F_a(V)$, et par suite appartiennent à S_b en tout point b assez voisin de a .

Soit \mathcal{E} l'"espace des paramètres" de la sous-variété analytique $P(x_{p+1}; x_1, \dots, x_p) = 0$ dans l'espace $(x_1, \dots, x_p, x_{p+1})$. On a vu en 14 (th. 8) qu'on a un isomorphisme \bar{f} de \mathcal{E} sur un voisinage de a dans l'espace des paramètres de V . Cet isomorphisme \bar{f} associe à un point de \mathcal{E} , de coordonnées x_1, \dots, x_p, x_{p+1} , un point de l'espace des paramètres de V qui a mêmes coordonnées x_1, \dots, x_p, x_{p+1} et pour lequel x_{p+2}, \dots, x_n satisfont aux équations $P'x_i - Q_i = 0$.

Soit $b = (b_1, \dots, b_n)$ un point de V , voisin de a . Les diverses composantes irréductibles de V au point b (c'est-à-dire les divers points de l'espace des paramètres de V qui ont pour coordonnées b_1, \dots, b_n) sont les images par \bar{f} , de points de \mathcal{E} qui ont tous pour coordonnées b_1, \dots, b_{p+1} . Ils correspondent à certains facteurs irréductibles du polynôme P au point b_1, \dots, b_{p+1} (il peut en exister d'autres). Soit F leur produit. On a ainsi, au voisinage de b ,

$$P = FG,$$

et le polynôme G ne s'annule identiquement sur aucune composante irréductible de V au point b .

Après ces préliminaires, nous allons pouvoir montrer la proposition annoncée, à savoir: si une $f \in \mathcal{O}_b$ s'annule sur V au voisinage de $b \in V$, on a $f \in S_b$. Prouvons-le d'abord pour la fonction F , qui effectivement s'annule sur V au voisinage de b . On sait déjà que $FG = P$ appartient à S_b . L'idéal S_b est intersection d'une famille finie d'idéaux primaires \mathfrak{f}_m , dont les variétés sont les composantes irréductibles de V au point b ; si l'on avait $F \notin \mathfrak{f}_m$, une puissance de G serait dans \mathfrak{f}_m , donc G s'annulerait identiquement sur une composante irréductible de V au point b , ce qui n'est pas. Ainsi $F \in \mathfrak{f}_m$ pour tout indice m , et par suite $F \in S_b$.

Soit maintenant f un élément quelconque de \mathcal{O}_b . Modulo les polynômes unitaires P et R_i (qui sont dans S_b), f est congrue à un polynôme $T(x_{p+1}, \dots, x_n)$ à coefficients holomorphes en x_1, \dots, x_p . Il existe

un entier k tel que $P'^k T$ soit congru, modulo les $(P'x_i - Q_i)$ qui sont dans S_b , à un polynôme $\Pi(x_{p+1})$ à coefficients holomorphes en x_1, \dots, x_p . Enfin, modulo F (qui est dans S_b), Π est congru à un polynôme H de degré strictement inférieur au degré de F . Ainsi $P'^k f$ est congru, modulo S_b , au polynôme $H(x_{p+1})$ à coefficients holomorphes en x_1, \dots, x_p au point b_1, \dots, b_p .

Supposons alors que f s'annule identiquement sur V au voisinage du point $b \in V$. Je dis que H est identiquement nul. En effet, pour chaque système (x_1, \dots, x_p) voisin de (b_1, \dots, b_p) et qui n'annule pas le discriminant Δ du polynôme P , le polynôme F a ses racines distinctes, et comme H s'annule pour chacune d'elles, ses coefficients sont nuls. Ainsi les coefficients de H sont des fonctions de x_1, \dots, x_p , holomorphes au voisinage de (b_1, \dots, b_p) et nulles pour $\Delta(x_1, \dots, x_p) \neq 0$, donc identiquement nulles. Puisque H est identiquement nul, on a

$$(1) \quad P'^k f \in S_b.$$

Or P'^k n'appartient pas à l'idéal premier S_a . Alors, le corollaire 2 de l'exposé 15 (p. 9) montre que la relation (1) entraîne $f \in S_b$, dès que b est assez voisin de a . Ceci achève la démonstration.

Bibliographie

H. CARTAN, Bull. Soc. Math. de France, 78 (1950), pp. 29-64; Voir théorème 2, pages 42-45.