J-P. Serre

Applications de la théorie générale à divers problèmes globaux

Séminaire Henri Cartan, tome 4 (1951-1952), exp. n° 20, p. 1-26
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1951-1952__4__A20_0>

APPLICATIONS DE LA THÉORIE GÉNÉRALE A DIVERS PROBLÈMES GLOBAUX

(Exposé de J-P. Serre, le 16-6-52).

Note. Le texte qui suit a été rédigé en Novembre 1952 et diffère assez sensiblement de l'exposé oral.

I. Propriétés caracteristiques des variétés de Stein.

1. Premières applications des théorèmes A et B de l'exposé 19.

Soient X une variété de Stein, $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X. D'après le théorème A de l'exposé 19 le module des sections de $\mathcal{F}$ au dessus de X, noté $H^0(X, \mathcal{F})$, engendre le module local $\mathcal{F}_x$ pour tout point $x \in X$. On peut appliquer ceci à divers types de faisceaux cohérents, notamment les faisceaux de relations (cela a été fait dans 19) et les faisceaux définis par des sous-variétés. Dans ce dernier cas, on obtient ainsi:

Soit V une sous-variété de X (pouvant présenter des singularités); pour tout $x \in V$ il existe des fonctions f_i, holomorphes sur X (en nombre fini) nulles sur V, et telles que tout germe de fonction en x, f_x, nul sur le germe de variété V_x, puisse s'écrire $f = \Sigma\, g_i \cdot f_i$, les g_i étant des germes de fonctions holomorphes en x; pour tout $x \notin V$ il existe une fonction f holomorphe sur X, nulle sur V, et non nulle en x.

En particulier, V est défini par des équations globales.

D'autre part, d'après le théorème B de l'exposé 19, on a $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ pour tout $i > 0$, $\mathcal{F}$ désignant toujours un faisceau cohérent sur X. Si l'on a une suite exacte de faisceaux:

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{G}/\mathcal{F} \to 0 ,$$

où $\mathcal{F}$ est analytique cohérent, la suite exacte de cohomologie associée donne:

$$H^0(X, \mathcal{G}) \to H^0(X, \mathcal{G}/\mathcal{F}) \to 0 \quad \text{puisque} \quad H^1(X, \mathcal{F}) = 0.$$

En d'autres termes, *toute section du faisceau quotient* $\mathcal{G}/\mathcal{F}$ *est image d'une section du faisceau* $\mathcal{G}$.

Exemple 1. Soit V une sous-variété sans singularités de X; prenons pour $\mathcal{F}$ le faisceau des germes de fonctions nulles sur V, pour $\mathcal{G}$ le faisceau de tous les germes de fonctions. Le faisceau $\mathcal{G}/\mathcal{F}$ est nul en tout point $x \notin V$, et sur V coïncide avec le faisceau des germes de fonctions sur V. Une section de $\mathcal{G}/\mathcal{F}$ n'est donc pas autre chose qu'*une fonction holomorphe sur* V, et dire que c'est l'image d'une section de $\mathcal{G}$ revient à dire que *cette fonction est la trace sur* V *d'une fonction holomorphe sur tout* X.

En particulier, si l'on a un ensemble *discret* (x_ι) de points de X, il existe toujours une fonction holomorphe sur X prenant en ces points des valeurs données (prendre pour V la réunion des x_ι).

Exemple 2. Prenons pour $\mathcal{F}$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes, pour $\mathcal{G}$ le faisceau des germes de fonctions méromorphes. Que signifie une section de $\mathcal{G}/\mathcal{F}$? C'est la donnée, pour tout $x \in X$, d'un germe g_x de fonction méromorphe en x, défini dans un ouvert U_x contenant x, avec la condition de compatibilité suivante: $g_x - g_y$ est holomorphe dans $U_x \cap U_y$. On peut encore dire que c'est un choix de *parties principales*, au sens de Mittag-Leffler. Dire que c'est l'image d'une section de $\mathcal{G}$ signifie qu'il existe une fonction g, méromorphe dans tout X, et telle que le germe $g - g_x$ soit holomorphe au point x, quel que soit $x \in X$. En d'autres termes, *il existe toujours une fonction méromorphe ayant des parties principales données*, le "*problème additif de Cousin*" est toujours résoluble dans une variété de Stein.

(Ce résultat a été démontré pour la 1ère fois par Oka [2], dans le cas où X est un domaine d'holomorphie.)

2. *Caractérisation des variétés de Stein*.

Les théorèmes A et B caractérisent complètement les variétés de Stein. En fait, nous allons voir qu'une petite partie du théorème B suffit déjà:

Soit X une variété analytique complexe et supposons que $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$ chaque fois que $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent d'idéaux. Alors X vérifie les conditions (α), (β) et (γ) de l'exposé 9.

(Comme (α) entraîne trivialement (α'), X vérifie les conditions (α'), (β) et (γ) et est donc une variété de Stein; ainsi, pour une variété vérifiant (β) et (γ), les conditions (α) et (α') sont équivalentes, ce qui répond partiellement à une question posée dans 9.)

Vérification de (α). Soit K un compact de X; nous devons montrer que sa H-enveloppe $\overline{K}$ est compacte. Sinon, il existerait dans $\overline{K}$ un sous-ensemble discret infini V. Le faisceau $\mathcal{F}$ des germes de fonctions nulles sur V est un faisceau cohérent d'idéaux, et $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$; raisonnement du n° 1, ex. 1 montre alors qu'il existe une fonction holomorphe sur X, qui prend aux points de V des valeurs arbitraires. En particulier on peut choisir une telle fonction de façon qu'elle ne soit pas bornée sur V. Mais ceci est absurde, d'après la définition de $\overline{K}$.

Vérification de (β). Soient x et y deux points distincts de X. Le raisonnement précédent montre qu'il existe une fonction holomorphe sur X prenant en x et y des valeurs données, donc en particulier des valeurs différentes.

Vérification de (γ). Soit $x \in X$, et soit $\mathcal{F}^p$ le faisceau qui, en tout point $y \neq x$, est égal au faisceau de tous les germes de fonctions holomorphes, et au point x est égal à l'idéal des fonctions nulles en x ainsi que leurs $p-1$ premières dérivées partielles. $\mathcal{F}^p$ est un faisceau cohérent d'idéaux (au voisinage de x il est engendré par les produits de p coordonnées locales), sous-faisceau du faisceau $\mathcal{O}$ de tous les germes de fonctions holomorphes. Il s'ensuit, par le même raisonnement que plus haut, qu'il existe une fonction holomorphe sur X ayant en x un développement taylorien donné jusqu'à l'ordre $p-1$. En particulier, prenant $p = 2$, on voit qu'il existe n fonctions holomorphes $f_1, \ldots, f_n$ sur X, respectivement tangentes à des coordonnées locales données $z_1, \ldots, z_n$. Les $f_1, \ldots, f_n$ forment un système de coordonnées locales sur X, ce qui démontre (γ).

3. Exemples de variétés de Stein.

On a déjà dit que l'espace C^n, et plus généralement tout domaine d'holomorphie de type fini, sont des variétés de Stein.

Toute sous-variété sans singularités d'une variété de Stein est une variété de Stein. On peut le voir en vérifiant les conditions (α), (β) et (γ), ce qui est immédiat, ou encore en utilisant la caractérisation cohomologique du n° 2: si V est la sous-variété, X la variété, et $\mathcal{F}$ désigne un faisceau cohérent sur V, on peut étendre $\mathcal{F}$ à X par le procédé exposé dans le Sém. 50-51; 17 - 2 (on pose $\mathcal{G}_x = 0$ si $x \notin V$); on obtient encore un faisceau cohérent sur X, soit $\mathcal{G}$, d'où $H^1(X, \mathcal{G}) = 0$, et comme $H^1(X, \mathcal{G}) \approx H^1(V, \mathcal{F})$ (résultat purement topologique, cf. ibid. prop. 3), on a $H^1(V, \mathcal{F}) = 0$.

C.Q.F.D.

Inversement, si l'on a une variété de Stein X, et une fonction f holomorphe sur X, la sous-variété ouverte W de X formée des $x \in X$ tels que $f(x) \neq 0$ est une variété de Stein. On peut le voir en vérifiant directement (α), (β) et (γ) (pour (α) noter que $1/f$ est holomorphe dans W) ou bien en plongeant W comme sous-variété (fermée) de $X \times C^*$ par l'application $x \to (x, f(x))$ et utilisant le fait évident que $X \times C^*$ est une variété de Stein.

Les deux résultats précédents montrent que toute sous-variété de C^n regulièrement plongée est une variété de Stein. En particulier, toute variété algébrique affine est une variété de Stein. Egalement tout groupe algébrique de matrices.

On verra plus loin d'autres procédés de formation de variétés de Stein.

II. Formes différentielles holomorphes.

(Dans cette partie X désigne une variété de Stein.)

4. Le théorème de de Rham analytique complexe.

Pour tout $p \geq 0$, nous désignerons par Ω^p le faisceau des germes de formes différentielles holomorphes de degré p sur X. Si l'on choisit en un point $x \in X$ des coordonnées locales (z_i), tout élément de Ω^p_x s'écrit d'une façon et d'une seule:

$$\omega_x = \Sigma_{i_1 < i_2 < \cdots < i_p} f_{i_1 i_2 \cdots i_p}(z_i) \cdot dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} ,$$

où les f sont des germes de fonctions holomorphes en x. Il s'ensuit que localement Ω^p est isomorphe à la somme directe de $\binom{n}{p}$ faisceaux tous isomorphes au faisceau des fonctions holomorphes, et Ω^p est donc un faisceau analytique cohérent.

La différentielle extérieure étant une notion locale définit un homomorphisme de faisceaux $d: \Omega^p \to \Omega^{p+1}$. Le noyau Z^p de cet homomorphisme est le faisceau des germes de formes holomorphes fermées (ce n'est pas un faisceau analytique car le produit d'une forme fermée et d'une fonction n'est pas fermé en général). L'image de d est le faisceau des germes de formes qui sont des cobords. Ce faisceau n'est autre que Z^{p+1} car on sait qu'une forme fermée est localement un cobord. On a donc une suite exacte de faisceaux:

$$0 \to Z^p \to \Omega^p \xrightarrow{d} Z^{p+1} \to 0 .$$

D'où la suite exacte de cohomologie:

$$H^i(X, \Omega^p) \to H^i(X, Z^{p+1}) \to H^{i+1}(X, Z^p) \to H^{i+1}(X, \Omega^p) .$$

Si $i > 0$, les deux termes extrêmes sont nuls, Ω^p étant analytique cohérent, et l'on a donc $H^i(X, Z^{p+1}) \approx H^{i+1}(X, Z^p)$, ce qui montre (en remplacant p par $p-1$) que $H^i(X, Z^p)$ ne dépend que de $i+p$. Mais si $p = 0$, Z^0 est le faisceau des germes de fonctions holomorphes dont la différentielle est nulle, autrement dit c'est le faisceau constant, isomorphe au corps des complexes $\mathbf{C}$. On a donc:

$$H^p(X, Z^0) \approx H^p(X, \mathbf{C}).$$

D'autre part, on a d'après ce qui précède $H^1(X, Z^{p-1}) = H^p(X, Z^0)$. Combinant ceci avec la suite exacte de cohomologie relative à la suite exacte de faisceaux $0 \to Z^{p-1} \to \Omega^{p-1} \xrightarrow{d} Z^p \to 0$, on trouve la suite exacte:

$$H^0(X, \Omega^{p-1}) \xrightarrow{d} H^0(X, Z^p) \to H^p(X, \mathbf{C}) \to 0 .$$

Or une section de Ω^{p-1} (resp. de Z^p) n'est pas autre chose qu'une forme différentielle holomorphe definie sur tout X et de degré $p-1$ (resp. de degré p et fermée). En outre l'application d est l'opération de différentiation extérieure. Il s'ensuit que $H^p(X, C)$ est isomorphe au quotient de l'espace des formes différentielle holomorphe fermées de degré p par le sous-espace formé des cobords des formes de degré $p-1$. C'est le "théorème de de Rham," mais démontré pour des formes holomorphes: le complexe des formes différentielles holomorphes sur X, muni du cobord de la differentiation extérieure, a même cohomologie que X.

(Le cas particulier $p = 1$ était connu, cf. [1], n° 5.)

5. Relation avec le théorème de de Rham classique.

Soient Ω_0^p le faisceau des germes de formes différentielles de degré p (indéfiniment différentiables), Z_0^p le sous-faisceau des formes fermées. Le faisceau Ω_0^p est fin (partitions de l'unité) et on a donc $H^i(X, \Omega_0^p) = 0$ pour $i > 0$, ce qui permet de transcrire les raisonnements précédents en remplacant partout Ω^p par Ω_0^p et Z^p par Z_0^p. On obtient ainsi une démonstration du théorème de de Rham classique (différentiable) qui d'ailleurs est celle de A. Weil (traduite dans le langage des faisceaux). En outre l'injection de Ω^p dans Ω_0^p est évidemment un "homomorphisme" de la première démonstration dans la seconde. On tire de là:

a) Toute forme différentielle fermée sur X est cohomologue à une forme holomorphe.

b) Si une forme différentielle holomorphe est le cobord d'une forme différentiable, c'est le cobord d'une forme holomorphe.

En particulier, il existe toujours une forme holomorphe et fermée de périodes (complexes) données.

6. Conséquences topologiques.

Soit n la dimension complexe de X (sa dimension topologique est donc $2n$). Puisque toute forme différentielle holomorphe de degré $p > n$ est nulle, il résulte du théorème de de Rham analytique complexe que l'on a

$H^p(X, \mathbf{C}) = 0$. Compte tenu des relations entre holomologie et cohomologie, ceci est équivalent à:

<u>Les groupes d'homologie</u> $H_p(X, Z)$ <u>sont des groupes de torsion pour tout</u> $p > n$.

Si $H_p(X, Z)$ est un groupe de type fini, cela équivaut à dire que <u>les nombres de Betti</u> B_p <u>de</u> X <u>sont nuls dès que</u> $p > n$.

On obtient ainsi une condition nécessaire purement topologique pour qu'une variété soit une variété de Stein (et a fortiori un domaine d'holomorphie).

Il est facile de vérifier directement le résultat précédent pour divers types simples de variétés de Stein: pour les polycylindres c'est évident d'après la formule de Künneth; pour un groupe semi-simple algébrique de matrices X, cela résulte de la décomposition classique de X comme produit direct d'un sous-groupe compact K de dimension (réelle) n et de $\mathbf{R}^n$. Supposons maintenant que X soit une variété algébrique affine, soit V la variété algébrique projective contenant X, et soit W la section de V par l'hyperplan à l'infini. On a donc $X = V - W$; d'après la dualité de Poincaré appliquée à X, la relation "$H^p(X, \mathbf{C}) = 0$ pour $p > n$" équivaut à "$H^p_*(X, \mathbf{C}) = 0$ pour $p < n$," où H^p_* désigne la cohomologie <u>à supports compacts</u> de X; d'après la suite exacte de cohomologie qui relie V, W et $V - W = X$, cette dernière relation équivaut à son tour à:

$$\begin{cases} H^p(V, \mathbf{C}) \approx H^p(W, \mathbf{C}) & \underline{\text{pour}} \quad p < n-1 \ ; \\ H^{n-1}(V, \mathbf{C}) \to H^{n-1}(W, \mathbf{C}) & \underline{\text{est biunivoque}}, \end{cases}$$

ce qui est un résultat classique de Lefschetz (d'ailleurs démontré avec $\mathbf{Z}$ au lieu de $\mathbf{C}$).

III. <u>Espaces fibrés à groupe structural abélien</u>.

7. <u>Digression topologique</u>.

Soit X un espace topologique, paracompact, et soit G un groupe topologique <u>abélien</u>. En tout point $x \in X$ les germes d'applications continues de X dans G forment un groupe abélien, et la collection de ces divers groupes, quand x parcourt X, forment un faisceau $\mathcal{C}_G$ dit faisceau des applications continues de X dans G.

Le groupe $H^0(X, \mathcal{C}_G)$ est identique au groupe des applications continues de X tout entier dans G.

Puisque X est paracompact, on peut calculer $H^1(X, \mathcal{C}_G)$ au moyen des recouvrements (U_i) localement finis (cf. Sém. 50-51, 17, p. 11): si $\mathfrak{U}$ est un tel recouvrement, un 1-cocycle relativement a $\mathfrak{U}$ est la donnée, pour tout (i, j), d'une section de $\mathcal{C}_G$ au dessus de $U_i \cap U_j$, i.e., d'une application continue $f_{ij}\colon U_i \cap U_j \to G$ telle que:

a) f_{ij} est l'application nulle (son image est l'élément neutre de G);

b) $f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} = 0$.

Un cocycle f_{ij} est dit un cobord s'il y a des $f_i\colon U_i \to G$ tels que $f_{ij} = f_i - f_j$ dans $U_i \cap U_j$.

Le quotient des cocycles par les cobords définit le groupe $H^1(X, \mathfrak{U}, \mathcal{C}_G)$ qui dépend du recouvrement $\mathfrak{U}$. Le groupe $H^1(X, \mathcal{C}_G)$ est la limite inductive des $H^1(X, \mathfrak{U}, \mathcal{C}_G)$ lorsque les $\mathfrak{U}$ deviennent de plus en plus fins.

(Définitions analogues pour les $H^p(X, \mathcal{C}_G)$, $p > 1$.)

Ce qui précède est valable pour tout faisceau $\mathcal{F}$, les f_{ij} étant alors interprétés comme des sections de $\mathcal{F}$ au-dessus de $U_i \cap U_j$. Dans le cas particulier $\mathcal{F} = \mathcal{C}_G$, la description précédente montre que $H^1(X, \mathcal{C}_G)$ est en correspondance biunivoque avec les classes d'espaces fibrés principaux loc. triviaux de base X et de groupe structural G. En effet les propriétés des f_{ij} sont exactement celles qui sont nécessaires pour définir un espace fibré par des cartes locales et les cobords correspondent aux espaces triviaux (cf. Sém. 49-50, Exp. 6, 7, 8).

Ce qui précède s'étend immédiatement aux espaces fibrés analytiques: soient X une variété analytique complexe, G un groupe de Lie complexe abélien, $\mathcal{A}_G$ le faisceau des germes d'applications analytiques de X dans G. Les éléments de $H^1(X, \mathcal{A}_G)$ correspondent biunivoquement aux classes d'espaces fibrés principaux analytiques de base X et de groupe structural G.

L'injection $\mathcal{A}_G \to \mathcal{C}_G$ définit un homomorphisme $H^1(X, \mathcal{A}_G) \to H^1(X, \mathcal{C}_G)$ dont l'interprétation en termes d'espaces fibrés est évidente (un espace fibré analytique est un espace fibré topologique particulier). Dire que cet homomorphisme est <u>biunivoque</u> revient à dire qu'un espace fibré analytique qui est trivial topologiquement est trivial analytiquement.

Dire qu'il est <u>sur</u> revient à dire que tout espace fibré topologique peut être muni d'une structure analytique compatible avec sa structure fibrée.

<u>Notes</u>. 1. Soit E fibré principal de base X, fibre G, et soit $u \in H^0(F, \mathcal{C}_G)$, F désignant une fibre arbitraire, une application de F dans G qui commute aux translations de G. On peut montrer que l'image de u par <u>transgression</u> dans $H^1(X, \mathcal{C}_G)$ coincide avec l'élément attaché à la classe de E.

2. La correspondance précédente entre espaces fibrés et groupes de cohomologie à valeurs dans certains faisceaux explique le fait que dans [1] il ne soit question que d'espaces fibrés et jamais de faisceaux.

8. <u>Classification des espaces fibrés analytiques de base une variété de Stein</u> X <u>et de groupe structural un groupe de Lie complexe abélien</u> G.

Nous supposerons que G est <u>connexe</u>; le revêtement universel H de G est donc isomorphe à C^m ($m = \dim. G$) et si Π désigne le groupe fondamental de G on a une suite exacte:

$$0 \to \Pi \to H \to G \to 0 .$$

Sur l'espace X on peut définir les trois faisceaux $\mathcal{A}_\Pi$, $\mathcal{A}_H$ et $\mathcal{A}_G$; comme Π est un groupe <u>discret</u>, le premier faisceau est simplement le faisceau <u>constant</u> égal à Π en tout point. Conformément à l'usage, nous le noterons Π au lieu de $\mathcal{A}_\Pi$.

La suite de faisceaux $0 \to \Pi \to \mathcal{A}_H \to \mathcal{A}_G \to 0$ est une <u>suite exacte</u>. En effet, d'une part si un germe d'application dans H donne 0 dans G il est à valeurs dans Π, et d'autre part tout germe d'application dans G est image d'un germe d'application dans H, puisqu'au dessus de tout point de G, H est localement un produit direct.

D'où la suite exacte de cohomologie:

$$H^1(X, \mathcal{A}_H) \to H^1(X, \mathcal{A}_G) \to H^2(X, \Pi) \to H^2(X, \mathcal{A}_H)$$

Mais H est isomorphe à $\mathbf{C}^m$ et le faisceau $\mathcal{A}_H$ est donc analytique cohérent. Si X est une variété de Stein on a $H^1(X, \mathcal{A}_H) = H^2(X, \mathcal{A}_H) = 0$ d'où:

$$H^1(X, \mathcal{A}_G) \approx H^2(X, \Pi) .$$

Ainsi les classes d'espaces fibrés analytiques de groupe structural le groupe G correspondent biunivoquement aux éléments du second groupe de cohomologie de X à valeurs dans le groupe fondamental de G.

Exemples. Si $G = \mathbf{C}$, $\pi_1(G) = 0$ ce qui montre que tout espace de groupe $\mathbf{C}$ est trivial (cf. [1]); si $G = \mathbf{C}^*$, $\pi_1(G) = \mathbf{Z}$ et le groupe des classes d'espaces fibrés est $H^2(X, \mathbf{Z})$; si G est un tore elliptique, on a $H^2(X, \mathbf{Z} + \mathbf{Z})$; etc.

9. Comparaison avec le cas topologique.

Les raisonnements précédents valent en remplaçant partout $\mathcal{A}_G$ par $\mathcal{C}_G$ et $\mathcal{A}_H$ par $\mathcal{C}_H$. Le faisceau $\mathcal{C}_H$ est un faisceau fin, ce qui assure de la nullité de $H^1(X, \mathcal{C}_H)$ et de $H^2(X, \mathcal{C}_H)$. On obtient ainsi la classification topologique des espaces fibrés de groupe G, et on voit en outre que le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} H^1(X, \mathcal{A}_G) & \to & H^2(X, \Pi) \\ \downarrow & & \updownarrow \\ H^1(X, \mathcal{C}_G) & \to & H^2(X, \Pi) \end{array}$$

est commutatif.

Il s'ensuit que $H^1(X, \mathcal{A}_G) \approx H^1(X, \mathcal{C}_G)$, ce qui permet d'appliquer les résultats de la fin du n° 7.

IV. Deuxième problème de Cousin. Diviseurs.

10. Deuxième problème de Cousin.

C'est le suivant: étant donné un diviseur D, existe-t-il une fonction méromorphe f dont le diviseur est égal à D ?

Nous allons le reformuler en termes de faisceaux: soient $\mathcal{G}$ le faisceau des germes de fonctions méromorphes sur X (la loi de composition etant la multiplication), $\mathcal{F}$ le sous-faisceau de $\mathcal{G}$ formé des germes de fonctions holomorphes non nulles, $\mathcal{D}$ le faisceau quotient $\mathcal{G}/\mathcal{F}$. On a donc une suite exacte:

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{D} \to 0 .$$

(Il est clair que le faisceau $\mathcal{D}$ est le faisceau des germes de diviseurs sur X. Une section de $\mathcal{D}$ est donc un diviseur sur X.)

Ecrivons la suite exacte de cohomologie:

$$H^0(X, \mathcal{G}) \to H^0(X, \mathcal{D}) \to H^1(X, \mathcal{F}) .$$

Ainsi, pour qu'un diviseur $D \in H^0(X, \mathcal{D})$ soit le diviseur d'une fonction méromorphe g (i.e., appartienne a l'image de $H^0(X, \mathcal{G})$), il faut et il suffit que son image dans $H^1(X, \mathcal{F})$ soit nulle. Or le faisceau $\mathcal{F}$ n'est pas autre chose que le faisceau des germes d'applications analytiques de X dans C^*, c'est-a-dire A_{C^*}, et on a vu au n° 8 que $H^1(X, \mathcal{F}) \approx H^2(X, Z)$.

Le groupe des diviseurs modulo l'équivalence linéaire est donc un sous-groupe de $H^2(X, Z)$. On retrouve la condition topologique qui est nécessaire et suffisante pour le second problème de Cousin (cf. [1], [2] et [3]).

Explicitons la correspondance entre diviseurs et éléments de $H^2(X, Z)$. Un diviseur D peut toujours être défini au moyen d'un recouvrement localement fini U_i de X et, dans chaque U_i, d'une fonction méromorphe g_i telle que $f_{ij} = g_i/g_j$ soit holomorphe et $\neq 0$ dans $U_i \cap U_j$. Si l'on pose alors h_{ij} = une déter. de $1/2\pi i \cdot \log f_{ij}$, on constate que $c_{ijk} = h_{ij} + h_{jk} + h_{ki}$ est un entier qui définit une classe de cohomologie entière de degré 2 sur le nerf de (U_i), donc qui définit un élément de $H^2(X, Z)$. C'est l'élément cherché.

11. Diviseurs correspondant à une classe de cohomologie donnée.

On peut se demander quelles sont les classes de cohomologie qui correspondent à des diviseurs. La réponse est la suivante:

Quel que soit $c \in H^2(X, Z)$ il existe un diviseur positif D dont la classe de cohomologie est c.

(Ce résultat avait été demontré par Stein dans deux cas particuliers: a) lorsque X est un polycylindre [3]; b) X étant quelconque, lorsque la classe c est un élément infiniment divisible de $H^2(X, Z)$ [4].)

Démonstration. Puisque $H^1(X, \mathcal{O}_{C^*}) \approx H^2(X, Z)$ il existe un espace fibré analytique E, de base X, de groupe C^* qui correspond à c. Cet espace peut être défini par un recouvrement (U_i) et, pour tout couple (i, j), par des fonctions holomorphes non nulles f_{ij} sur $U_i \cap U_j$ vérifiant la condition de transitivité $f_{ik} = f_{ij} \cdot f_{jk}$. Dire que E correspond à c revient à dire que le cocycle (c_{ijk}) défini comme au n° précédent à partir de f_{ij} appartient à la classe de cohomologie c donnée. Pour démontrer l'existence du diviseur positif D, il nous faut maintenant trouver des fonctions holomorphes non ident. nulles g_i sur U_i telles que:

$$f_{ij} = g_i/g_j \ .$$

(On exige que les g_i soient holomorphes parce que l'on veut un diviseur positif.)

Nous allons interpréter la condition précédente en termes d'espaces fibrés. Fiasons opérer le groupe C^* sur C par les homothéties $x \to \lambda \cdot x$, et soit E' l'espace fibré associe a E (au sens du Sém. 49-50, 6 - 8) de fibre C. Chaque fibre de E' est munie de façon canonique d'une structure d'espace vectoriel de dimension 1 sur C; les éléments 0 des diverses fibres forment la section 0 de E'; le complémentaire de cette section est isomorphe à E (on peut dire, de façon plus imagée que E' s'obtient en ajoutant un 0 à chaque fibre de E).

Au-dessus de chaque U_i on peut identifier E' à $U_i \times C$, les formules de changement de cartes étant données par $(x, \alpha) \to (x, f_{ij}(x) \cdot \alpha)$. On tire immédiatement de là qu'une section holomorphe g de E' définit sur chaque U_i une fonction holomorphe g_i telle que $g_i = f_{ij} \cdot g_j$, et que réciproquement des g_i vérifiant la condition précédente déterminent une section g de E'. Si l'on prend $g_i = 0$ pour tout i on obtient la section 0. Nous sommes donc ramenés à prouver l'existence d'une section holomorphe de E' différente de la section 0.

Pour tout $x \in X$ on peut parler de section locale holomorphe de E' au-dessus d'un voisinage de x, d'où la notion de germe de section locale en x. L'ensemble de tous ces germes forme un faisceau $\mathcal{H}$, dit faisceau des sections au-dessus de X. Une section de ce faisceau n'est pas autre chose qu'une section de l'espace fibré E'.

Localement, l'espace E' est un produit direct, et $\mathcal{H}$ est le faisceau des fonctions holomorphes sur X. $\mathcal{H}$ est donc localement isomorphe à un faisceau analytique cohérent, c'est un faisceau analytique-cohérent. D'après le théorème A de l'exposé 19 les éléments de $H^0(X, \mathcal{H})$ engendrent $\mathcal{H}_x$ pour tout $x \in X$; d'où l'existence d'au moins un élément non nul dans $H^0(X, \mathcal{H})$, c'est-à-dire d'une section de E' différente de la section 0.

C.Q.F.D.

Note. La démonstration précédente est inspirée d'une démonstration analogue d'A. Weil [5]; dans le cas de Weil (espaces fibrés algébriques) il fallait ajouter à l'espace E non seulement la section 0, mais aussi la section ∞, de façon à avoir une variété complète.

12. Conséquences.

a) Il existe toujours un diviseur positif linéairement équivalent à un diviseur D donné. En effet, si c désigne la classe de cohomologie associée à D, il existe un diviseur positif D' de classe c, et D et D' sont linéairement équivalents (i.e., $D - D'$ = div. d'une fonction) d'après le n° 10.

Soit alors f une fonction méromorphe, et soit $(f) = D^+ - D^-$ la decomposition du diviseur de f en sa partie positive et sa partie négative; d'après ce qui précède $-D^-$ est équivalent à un diviseur positif D', autrement dit, il y a une fonction g telle que $(g) = D' + D^-$. La fonction g est holomorphe puisque $(g) \geq 0$. De même $(f \cdot g) = D^+ + D' \geq 0$ montre que $f \cdot g = h$ est holomorphe Ainsi toute fonction méromorphe f

s'écrit sous la forme $f = h/g$ où h et g sont holomorphes (mais non premières entre elles en général).

On pourrait retrouver les résultats précédents d'une autre façon, plus élémentaire, en utilisant le n° 1.

b) Soient V une sous-variété regulièrement plongée de X, L un diviseur de V. Cherchons à quelle condition L est la trace sur V d'un diviseur de X.

Si $d \in H^2(V, \mathbf{Z})$ est la classe de cohomologie associée à L, on voit facilement qu'il est nécéssaire pour cela que d soit contenu dans l'image de l'homomorphisme $H^2(X, \mathbf{Z}) \to H^2(V, \mathbf{Z})$. Cette condition est <u>suffisante</u>. En effet, soit $c \in H^2(X, \mathbf{Z})$ un élément induisant d; soit E l'espace fibré de base X, fibre $\mathbf{C}^*$, associé à c et E' l'espace de fibre $\mathbf{C}$ défini par E; la restriction E'_V de E' à V est isomorphe à l'espace fibré défini par le diviseur L. Si l'on suppose $L \geq 0$ (ce qui est licite), il existe donc une section holomorphe s_V de E'_V dont le diviseur est L. Or le raisonnement fait au n° 1 pour prouver que toute fonction holomorphe sur V est la trace d'une fonction holomorphe sur X s'applique sans changement ici et montre que s_V est la restriction à V d'une section holomorphe s de E' au-dessus de X. Il s'ensuit que L est la trace sur V du diviseur de s.

C.Q.F.D.

13. <u>Généralisations</u>.

Le faisceau des <u>germes de sections</u> d'un espace fibré peut se définir dans des cas plus généraux que celui du n° 11: si l'on a un espace fibré E de groupe structural le groupe $GL(n, \mathbf{C})$ des matrices complexes inversibles (ou un sous-groupe de ce groupe) on peut lui associer un espace fibré E' dont les fibres sont des espaces vectoriels complexes de dimension n. Le faisceau des germes de sections de E' est encore un faisceau analytique cohérent, auquel on peut donc appliquer les théorèmes A et B. En particulier, il possède toujours une section non triviale.

Ce genre d'espace fibré a été considéré antérieurement par Weil (Journal de Liouville, 1937), dans le cas où la base X est la surface de Riemann d'une courbe algébrique.

Exemples. On part de la structure tangente (complexe) à la variété de Stein X; on en tire l'existence de champs de tenseurs holomorphes non triviaux d'espèce arbitraire (formes différentielles de degré donné, multivecteurs, etc.).

Signalons également un procédé de définition de faisceaux, qui englobe le procédé précédent, par recollage. On se donne sur chaque ensemble U_i d'un recouvrement ouvert $\mathfrak{U}$ de X un faisceau analytique $\mathcal{F}_i$, et pour tout couple (i, j) un isomorphisme R_{ij} de la restriction de $\mathcal{F}_j$ à $U_i \cap U_j$ sur la restriction de $\mathcal{F}_i$, satisfaisant à:

$$R_{ii} = \text{identité}, \quad R_{ij} \circ R_{jk} \circ R_{ki} = \text{identité sur } U_i \cap U_j \cap U_k .$$

On définit alors sans ambiguïté un faisceau $\mathcal{F}$ et des isomorphismes Q_i de $\mathcal{F}_i$ sur la restriction de $\mathcal{F}$ à U_i tels que $R_{ij} = Q_i^{\circ} Q_j$. Si les $\mathcal{F}_i$ sont cohérents, il en est de même de $\mathcal{F}$. Une section f de $\mathcal{F}$ correspond biunivoquement à un système de sections f_i des $\mathcal{F}_i$ vérifiant la "relation de cohérence" $f_i = R_{ij} \cdot f_j$. Un 1-cocycle à valeurs dans $\mathcal{F}$ correspond à un système de sections f_{ij} de $\mathcal{F}_i$ au dessus de $U_i \cap U_j$ vérifiant $f_{ij} + R_{ij}(f_{jk}) + R_{ik}(f_{ki}) = 0$. Etc. Toutes les notions relatives à $\mathcal{F}$ se traduisent en notions relatives aux $\mathcal{F}_i$.

V. Fonctions additivement automorphes. Revêtements.

14. Fonctions additivement automorphes sur une variété de Stein.

Soient X une variété de Stein, Y le revêtement universel de X, G le groupe fondamental de X. Le groupe G est un groupe d'automorphismes de Y sans point fixe et $Y/G = X$. Nous noterons $x \to \sigma \cdot x$ les transformations de G ($\sigma \in G$, $x \in Y$). Si f est une fonction holomorphe sur Y on définit la fonction $\sigma \cdot f$ par: $\sigma \cdot f(x) = f(\sigma^{-1} \cdot x)$. Le groupe G opère donc sur l'anneau $\mathcal{O}_Y$ des fonctions holomorphes sur Y, et on peut parler des groupes de cohomologie de G à valeurs dans $\mathcal{O}_Y$ (au sens de la cohomologie des groupes discrets—cf. Sém. 50-51, exp. I,..., XIII). Ces groupes sont notés $H^i(G, \mathcal{O}_Y)$; le groupe $H^0(G, \mathcal{O}_Y)$ est formé des éléments de $\mathcal{O}_Y$ fixes par G, c'est donc $\mathcal{O}_X$.

Ces notations étant posées, le résultat que nous avons en vue est le suivant:

$$H^1(G, O_Y) = 0 .$$

Nous le démontrerons au n° suivant (voir aussi n° 17). Auparavant, explicitons-en quelques conséquences:

Si l'on se donne un 1-cocycle sur G à valeurs dans O_Y, c'est-à-dire pour tout $\sigma \in G$ une fonction $h_\sigma \in O_Y$ vérifiant $h_{\sigma\tau} = h_\sigma + \sigma\cdot h_\tau$, il existe $k \in O_Y$ tel que $h_\sigma = \sigma\cdot k - k$.

Cas particuliers.

1. O_X étant identifié au sous-espace de O_Y formé des f telles que $\sigma\cdot f = f$ pour tout $\sigma \in G$, on se donne un homomorphisme $\sigma \to h_\sigma$ de G dans O_X; la condition $h_{\sigma\tau} = h_\sigma + \sigma\cdot h_\tau$ est vérifiee puisque $\sigma\cdot h_\tau = h_\tau$. La fonction k est alors appelée fonction additivement automorphe ayant pour périodes les h_σ. C'est le cas traité par Stein dans [4], §4.
2. Supposons que le groupe G soit cyclique infini et soit T un générateur de G; un cocycle h_σ est entièrement déterminé par sa valeur h pour $\sigma = T$ et on peut prendre cette valeur arbitrairement. Ainsi pour tout $h \in O_Y$ il existe $k \in O_Y$ telle que $k(T\cdot x) - k(x) = h(x)$. Si l'on prend $X = \mathbf{C}^*$, $Y = \mathbf{C}$, $T\cdot x = x + 1$, on retrouve un théorème classique sur les fonctions entières. Idem pour X = couronne circulaire, Y = bande $|\mathrm{Im}\, z| < M$.

Note. On peut généraliser le théorème $H^1(G, O_Y) = 0$ à tout revêtement galoisien Y d'une variété de Stein X: en effet, on voit tout de suite que $H^1(G, O_Y)$ est un sous-groupe du groupe analogue relatif au revêtement universel.

15. Démonstration de $H^1(G, O_Y) = 0$ lorsque X est une variété de Stein.

Soit $\sigma \to h_\sigma$ une application de G dans O_Y telle que $h_{\sigma\tau} = h_\sigma + \sigma\cdot h_\tau$. Posons $f_\sigma = h_{\sigma^{-1}}$. On a $f_{\sigma\tau} = f_\tau + \tau^{-1}\cdot f_\sigma$, c'est-à-dire:

$$f_{\sigma\tau}(x) = f_\tau(x) + f_\sigma(\tau\cdot x), \qquad \sigma, \tau \in G, \quad x \in Y.$$

Faisons opérer G sur le produit direct $Y \times \mathbf{C}$ par la formule:

$$\sigma\cdot(x, \lambda) = (\sigma\cdot x, \lambda + f_\sigma(x)) .$$

La relation écrite plus haut montre que $(\sigma\tau)\cdot(x, \lambda) = \sigma\cdot(\tau\cdot(x, \lambda))$ et G est un groupe d'opérateurs, évidemment dans point fixe, de $Y \times \mathbf{C}$. De même on peut faire opérer $\mathbf{C}$ sur $Y \times \mathbf{C}$ par $\mu(x, \lambda) = (x, \lambda + \mu)$ et les opérations de G et de $\mathbf{C}$ commutent. Il s'ensuit que si l'on appelle E la variété quotient $(Y \times \mathbf{C})/G$, E est un espace fibré principal de groupe $\mathbf{C}$ et de base X. On a le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} Y \times \mathbf{C} & \xrightarrow{t} & E \\ q\downarrow & & p\downarrow \\ Y & \rightarrow & X \end{array},$$

évidemment commutatif.

Puisque X est une variété de Stein, l'espace fibré E est trivial, et il existe une section (holomorphe) $s\colon X \to E$; on a $p\circ s = 1$. Puisque Y est simplement connexe, l'application $s\circ r\colon Y \to E$ peut se relever en une application $u\colon Y \to Y \times \mathbf{C}$ et l'on a $t\circ u = s\circ r$. Si $x \in Y$, on a $u(x) = (\theta(x), k(x))$, avec $\theta(x) \in Y$, $k(x) \in \mathbf{C}$. Ecrivons les conditions que vérifie u.

On a $r\circ q\circ u = p\circ t\circ u = p\circ s\circ r = r$; or $q\circ u(x) = \theta(x)$, d'où $r(\theta(x)) = r(x)$, ce qui signifie qu'il existe $\sigma_x \in G$ tel que $\theta(x) = \sigma_x\cdot x$. Comme σ_x dépend continûment de x et que Y est connexe, σ_x est indépendant de x, soit σ_0. Changeant alors u en $\sigma_0^{-1}\cdot u$ (ce qui ne modifie pas les propriétés écrites plus haut), on voit qu'on peut supposer que $\sigma_0 = 1$, et on a donc $u(x) = (x, k(x))$.

Appliquant maintenant l'égalité $t\circ u = s\circ r$ à x et $\sigma\cdot x$, on trouve $t\circ u(\sigma\cdot x) = t\circ u(x)$, ce qui montre l'existence d'un $\tau \in G$ tel que $u(\sigma\cdot x) = \tau\cdot u(x)$, ce qui s'écrit: $(\sigma\cdot x, k(\sigma\cdot x)) = (\tau\cdot x, k(x) + f_\tau(x))$ d'où $\tau = \sigma$, et $k(\sigma\cdot x) = k(x) + f_\sigma(x)$, c'est-à-dire: $f_\sigma = \sigma^{-1}\cdot k - k$, et en passant à $h_\sigma = f_{\sigma^{-1}}$:

$$h_\sigma = \sigma\cdot k - k,$$

C.Q.F.D.

16. Revêtements des variétés de Stein.

Soit $Y \to X$ un revêtement galoisien, le groupe de Galois étant cyclique infini. Si X est une variété de Stein, Y est une variété de Stein.

Soit T un générateur de groupe de revêtement; d'après ce qui précède il y a sur Y une fonction holomorphe f telle que $f(T\cdot x) = f(x) + 1$; f prend donc des valeurs différentes en des points différents de Y se projetant au même point de X, ce qui montre que la condition (β) est remplie. La condition (γ) est remplie trivialement. Pour prouver (α) il suffit d'associer à toute suite discrète de points de Y une fonction holomorphe non bornée sur cette suite. Si la suite image dans X est discrète, cela résulte immédiatement du fait que X est de Stein. Si elle n'est pas discrète on voit aisément que la fonction f construite plus haut n'est pas bornée. Donc Y est une variété de Stein.

Signalons également le résultat suivant:

Soit $Y \to X$ un revêtement fini (galoisien ou pas). Alors "X est une variété de Stein" $\Longleftrightarrow$ "Y est une variété de Stein."

a) Supposons X de Stein, et soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur Y; soit $\mathcal{G}$ le faisceau sur X défini par la condition que $\mathcal{G}_x$, $x \in X$, soit isomorphe à la somme directe des $\mathcal{F}_y$, pour $y \in Y$ se projetant sur x; $\mathcal{G}$ est un faisceau cohérent d'où $H^1(X, \mathcal{G}) = 0$, et comme on a $H^1(Y, \mathcal{F}) = H^1(X, \mathcal{G})$ d'après un résultat élémentaire (et purement topologique) de la theorie des revêtements, on en conclut que Y est de Stein.

b) Si Y est de Stein, associons à toute fonction holomorphe $f \in O_Y$ la fonction $f^\natural \in O_X$ dont la valeur en $x \in X$ est la moyenne des valeurs de f aux points de Y se projetant en x. On vérifie immédiatement que les fonctions $f^\natural$ sont assez nombreuses pour qu'on puisse vérifier (α), (β) et (γ).

17. Généralisation de la théorie des fonctions additivement automorphes.

Soit de nouveau $r\colon Y \to X$ un revêtement galoisien d'une variété de Stein X, le groupe du revêtement étant G. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau analytique sur X, ou peut définir le faisceau $\mathcal{F}' = r^{-1}(\mathcal{F})$ sur Y: en tout point $y \in Y$, $\mathcal{F}'_y \approx \mathcal{F}_{r(y)}$. On posera $F_X = H^0(X, \mathcal{F})$ et $F_Y = H^0(Y, \mathcal{F}')$. Le faisceau $\mathcal{F}'$ est stable par les opérations σ de G, ce qui fait que G opère sur les $H^i(Y, \mathcal{F}')$ et en particulier sur F_Y. Ceci posé, on peut généraliser le théorème du n° 14:

<u>Si</u> $\mathcal{F}$ <u>est un</u> faisceau cohérent sur X, $H^1(G, F_Y) = 0$.

(Dans le n° 14, $\mathcal{F}$ était le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur X, et $\mathcal{F}'$ était donc le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur Y, d'où $F_X = O_X$ et $F_Y = O_Y$.)

Dans le cas général il n'est plus possible d'utiliser un espace fibré auxiliaire, et on doit raisonner directement en termes de cohomologie des groupes: appliquant au revêtement Y la suite spectrale des revêtements (cf. Sém. 50-51, 11 et 12) avec pour coefficients $\mathcal{F}'$ on obtient une suite spectrale (E^r) telle que:

a) $E^2_{n,p} \approx H^p(G, H^{n-p}(Y, \mathcal{F}'))$;

b) Les $E^\infty_{n,p}$, $p = 0,1,\ldots, n$, forment les quotients d'une suite de composition de $H^n(X, \mathcal{F})$.

(Le cas d'un revêtement avec faisceau de coefficients n'est pas traité explicitement dans les exposés cités plus haut; il n'y a cependant aucune difficulté à le faire.)

On a en particulier $E^2_{1,1} \approx H^1(G, H^0(Y, \mathcal{F}')) = H^1(G, F_Y)$. Or, pour des raisons de degré, tous les éléments de $E^2_{1,1}$ sont des d_r-cycles et aucun (sauf 0) n'est un d_r-bord, quel que soit $r \geq 2$. Il s'ensuit que $E^2_{1,1} \approx E^\infty_{1,1}$. Mais puisque X est une variété de Stein et que $\mathcal{F}$ est cohérent, on a $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$, d'où $E^\infty_{1,1} = 0$ d'après b).

C.Q.F.D.

La suite spectrale précédente conduit à un autre résultat:

<u>Si</u> X <u>et</u> Y <u>sont</u> des variétés de Stein on a $H^i(G, F_Y) = 0$ <u>pour tout</u> $i > 0$ ($\mathcal{F}$ étant toujours supposé cohérent).

Supposons d'abord seulement que Y est une variéte de Stein. Comme le faisceau $\mathcal{F}'$ est analytique cohérent, on a donc $H^q(Y, \mathcal{F}') = 0$ pour

$q > 0$, ce qui montre que les termes $E^2_{n,p}$ sont nuls pour $p \neq n$. Pour des raisons de degré, toutes les différentielles de la suite spectrale sont nulles et on obtient:

$$H^n(X, \mathcal{F}) \approx E^\infty_{n,n} \approx E^2_{n,n} \approx H^n(G, F_Y) \quad .$$

Si maintenant l'on suppose que X est aussi une variété de Stein on a $H^n(X, \mathcal{F}) = 0$ pour $n > 0$, d'où $H^n(G, F_Y) = 0$ pour $n > 0$.

C.Q.F.D.

Notes.

1. D'après le n° 16 on est dans les conditions précédentes si X est une variété de Stein et si G est abélien de type fini.
2. Le fait que $H^1(G, F_Y) = 0$, appliqué en prenant pour $\mathcal{F}$ le faisceau des formes différentielles holomorphes sur X, conduit à l'existence de formes différentielles holomorphes additivement automorphes sur Y.
3. Pour tout ce qui concerne les fonctions multiplicativement automorphes nous renvoyons au mémoire de Stein [4].

VI. Variétés analytiques réelles compactes plongées dans un espace euclidien.

18. Validité des théorèmes A et B.

Soit X une variété analytique réelle de dimension n; comme dans le cas complexe, on peut définir les faisceaux analytiques (réels) sur X, les faisceaux cohérents, etc., et il est naturel de se demander si les hypothèses (α), (β) et (γ) suffisent encore à démontrer les théorèmes A et B.

Nous n'aborderons pas cette question dans le cas général, et nous supposerons que X est une variété compacte. La condition (α) est alors remplie d'elle-même, et les conditions (β) et (γ) signifient simplement que X peut être plongée analytiquement et sans singularités dans un espace numérique $\mathbf{R}^m$. On peut alors considérer X comme l'intersection de $\mathbf{R}^m$ et d'une sous-variété analytique complexe V d'un voisinage ouvert U de $\mathbf{R}^m$ dans $\mathbf{C}^m$. Si K est un cube de $\mathbf{R}^m$ contenant X dans son intérieur, on a donc $X = V \cap K$. La variété ouverte U vérifie les conditions (β) et (γ)

puisqu'elle est plongée dans $\mathbf{C}^m$, et le cube K coïncide avec son enveloppe dans $\mathbf{C}^m$ (on le vérifie directement). Il résulte alors de la prop. 4 de l'exposé 19 que le compact X vérifie les théorèmes A et B pour les faisceaux analytiques complexes cohérents $\mathcal{F}$ relativement à la structure analytique complexe de V.

Nous allons passer de là aux faisceaux analytiques réels de X lui-même. Pour cela, remarquons d'abord que, si x est un point de X et si on désigne par $\mathcal{R}_x$ l'anneau des fonctions holomorphes réelles sur X au point x, et par $\mathcal{O}_x$ l'anneau des fonctions holomorphes complexes sur V au point x, on a:

$$\mathcal{O}_x = \mathcal{R}_x \otimes \mathbf{C}$$ (le produit tensoriel étant pris sur $\mathbf{R}$).

Il s'ensuit que si $\mathcal{F}$ est un faisceau analytique réel sur X, $\mathcal{F} \otimes \mathbf{C}$ est un faisceau analytique complexe sur X, pour la structure induite par V. En outre si $\mathcal{F}$ est cohérent, $\mathcal{F} \otimes \mathbf{C}$ est cohérent.

Nous pouvons maintenant démontrer les théorèmes A et B dans le domaine réel: soit $\mathcal{F}$ un faisceau analytique réel cohérent sur X. On a:

Théorème A. $H^0(X, \mathcal{F})$ engendre (au sens de la structure de $\mathcal{R}_x$-module) $\mathcal{F}_x$ pour tout $x \in X$.

Le faisceau $\mathcal{F} \otimes \mathbf{C}$ étant analytique complexe cohérent, on peut lui appliquer le théorème A d'après ce qui a été dit plus haut. Il s'ensuit que tout $f \in \mathcal{F}_x$ peut s'écrire $f = \Sigma\, g_i \cdot f_i$, $g_i \in \mathcal{O}_x$, $f_i \in H^0(X, \mathcal{F} \otimes \mathbf{C})$. Comme $H^0(X, \mathcal{F} \otimes \mathbf{C}) \approx H^0(X, \mathcal{F}) \otimes \mathbf{C}$, on peut séparer parties réelles et imaginaires, et on a: $f = \Sigma\, \mathrm{Re}(g_i) \cdot \mathrm{Re}(f_i) - \Sigma\, \mathrm{Im}(g_i) \cdot \mathrm{Im}(f_i)$.

C.Q.F.D.

Théorème B. $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ pour $i > 0$.

On a $H^i(X, \mathcal{F} \otimes \mathbf{C}) = 0$; mais $H^i(X, \mathcal{F} \otimes \mathbf{C}) \approx H^i(X, \mathcal{F}) \otimes \mathbf{C}$, d'où le fait que $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$.

19. Applications.

(Dans ce n° X désigne toujours une variété analytique réelle compacte plongeable dans un $\mathbf{R}^m$.)

Tous les résultats antérieurs de cet exposé se laissent transposer sans aucune difficulté au cas réel. Nous nous bornerons à les énoncer rapidement:

a) Si V est une sous-variété sans singularités de X, V est défini par des equations globales.

b) Si V est une sous-variété sans singularités de X, toute fonction analytique réelle sur V est la trace d'une fonction analytique réelle sur X.

c) Les formes différentielles analytiques réelles sur X permettent de calculer la cohomologie réelle de X.

(On peut retrouver autrement ce dernier résultat: la forme $dx_1^2 + \cdots + dx_m^2$ de $\mathbf{R}^m$ induit sur X un ds^2 analytique et on applique à X la théorie des formes harmoniques de Hodge.)

d) Si G est un groupe de Lie abélien connexe, les classes d'espaces fibrés analytiques réels de base X et de groupe G correspondent biunivoquement aux éléments de $H^2(X, \pi_1(G))$ ainsi qu'aux classes d'espaces fibrés topologiques.

e) Soit $\mathfrak{G}$ le faisceau (multiplicatif) des germes de fonctions méromorphes réelles, $\mathfrak{F}$ le sous-faisceau des fonctions qui ne sont jamais nulles ni infinies, $\mathfrak{D} = \mathfrak{G}/\mathfrak{F}$ le faisceau quotient. Comme dans le cas complexe, $\mathfrak{D}$ est le faisceau des germes de diviseurs réels, et une section D de ce faisceau est appelée un diviseur réel de X.

Contrairement à ce qui se passe dans le cas complexe l'ensemble des points par où "passe" le diviseur peut être de dimension $< n-1$, si $n = \dim. X$.

$\mathfrak{F}$ est le faisceau des fonctions holomorphes à valeurs dans $\mathbf{R}^*$. La suite exacte: $0 \to \mathbf{R} \to \mathbf{R}^* \to \mathbf{Z}_2 \to 0$, montre que l'on a:

$$H^1(X, \mathfrak{F}) \approx H^1(X, \mathbf{Z}_2) .$$

La suite exacte $0 \to \mathfrak{F} \to \mathfrak{G} \to \mathfrak{D} \to 0$ donne alors la suite exacte:

$$H^0(X, \mathfrak{G}) \to H^0(X, \mathfrak{D}) \to H^1(X, \mathbf{Z}_2) .$$

Ainsi tout diviseur définit une classe de cohomologie de X à valeurs dans Z_2 et pour que ce diviseur soit le diviseur d'une fonction méromorphe réelle, il faut et il suffit que cette classe soit nulle.

f) On montre comme dans le cas complexe qu'il existe toujours un diviseur positif D dont la classe de cohomologie soit une classe donnée à l'avance dans $H^1(X, Z_2)$.

VII. Problèmes.

20. Formation de variétés de Stein.

(a) Un revêtement d'une variété de Stein est-il toujours une variété de Stein?

Plus généralement:

(b) Un espace fibré dont la base et la fibre sont des variétés de Stein est-il une variete de Stein? Sinon, quelles conditions faut-il lui imposer pour qu'il en soit ainsi?

(Le 1er cas à examiner est sans doute celui des espaces fibrés principaux de groupe C^*.)

(c) Rappelons que d'après Oka tout domaine de C^2 qui est localement un domaine d'holomorphie est un domaine d'holomorphie. Généralisation à C^n.

21. Topologie des variétés de Stein.

(d) Si X est une variété de Stein de dimension complexe n, a-t-on $H_i(X, Z) = 0$ pour $i > n$?

(C'est vrai dans le cas des variétés algébriques affines, à cause du théorème de Lefschetz.)

(e) Exemple de variété de Stein X avec $\pi_2(X) \neq 0$?

(f) Quelles sont les propriétés de la structure tangente (complexe) à une variété de Stein? Exemple où cette structure n'est pas triviale?

22. Autres questions.

(g) Etudier la situation suivante: X est une variété de Stein, G un groupe d'automorphismes de X sans point fixe, $Y = X/G$ est une variété kählérienne compacte. Cette situation se présente pour les tores et, sous une forme un peu plus compliquée, dans les fonctions automorphes (cf. C. L. Siegel, Analytic Functions of Several complex variables, §40 et seq.).

Fonctions additivement et multiplicativement automorphes sur X? Que donnent est les méthodes du n° 17?

(h) Principe d'Oka. On a vu que les espaces fibrés analytiques (à groupe structural abélien) correspondaient aux espaces fibrés topologiques, qu'il en était de même pour les formes différentielles, etc. C'est le "principe d'Oka": "sur une variété de Stein on peut faire avec les fonctions holomorphes ce qu'on peut faire avec les fonctions continues." Donner d'autres vérifications de ce principe (je signale par exemple la suivante, facile à démontrer en utilisant le n° 13: si l'on a un espace fibré de base X, de fibre un espace numérique complexe affine (le groupe structural étant le groupe affine), cet espace a une section, ce qui permet de réduire le groupe structural au groupe linéaire. Cf. les variétés réglées).

En particulier est-il vrai dans le cas général que les espaces fibrés de base X et de groupe structural un groupe de Lie complexe (non nécessairement abélien) correspondent biunivoquement aux espaces fibrés topologiques?

Etat des questions ci-dessus en 1965

(Ajouté à l'occasion de la deuxième édition du Séminaire.)

La plupart de ces questions ont été résolues affirmativement. Plus précisément:

(a) Tout revêtement d'une variété de Stein est une variété de Stein (K. Stein, Archiv der Math., 7 (1956)).

(b) Soit E un fibré analytique dont la base et la fibre sont des variétés de Stein. Supposons que E soit associé à un espace principal analytique de groupe structural un groupe de Lie complexe. Alors E est une variété de Stein (Y. Matsushima et A. Morimoto, Bull. Soc. Math. France, 88 (1960). Le cas général (fibre non associé à un principal) reste ouvert. La question est liée à une extension éventuelle des théorèmes A et B à des faisceaux plus généraux que les faisceaux cohérents.

(c) a été résolu affirmativement par K. Oka (Jap. J. Maths., 23 (1953)). (Voir aussi le livre de Gunning et Rossi).

(d) Si X est une variété de Stein de dimension n, on a $H_i(X, \mathbf{Z}) = 0$ pour $i > n$. Cela a été démontré par A. Andreotti et T. Frankel (Annals of Math., 69 (1959)) au moyen de la théorie de Morse; voir aussi A. Andreotti et R. Narasimhan, Annals of Maths., 76 (1962).

(e) et (f): les variétés algébriques affines fournissent des quantités d'exemples non triviaux. Par exemple, soit Y une conique non singulière du plan projectif $\mathbf{P}_2(\mathbf{C})$ et soit $X = \mathbf{P}_2(\mathbf{C}) - Y$. La variété X est une variété de Stein de dimension 2; son fibré tangent est non trivial; on a $\pi_2(X) = \mathbf{Z}$.

(g): question trop imprécise. Y répondre reviendrait à citer toute la théorie des fonctions automorphes.

(h) ("principe d'Oka"). Le fait que les fibrés principaux analytiques de base une variété de Stein soient "les mêmes" que les fibrés topologiques a été démontré par J. Frenkel (Bull. Soc. Math. France, 85 (1957)) dans le cas particulier des groupes résolubles, et par H. Grauert (Math. Annalen, 135 (1958)) dans le cas général. Voir là-dessus l'exposé de H. Cartan au Symposium de Mexico, en 1956.

Bibliographie

[1] H. CARTAN, Problèmes globaux dans la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, Proc. Int. Cong. Math. (1950) I, p. 152-164.

[2] K. OKA, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables [III]; Deuxième problèms de Cousin, Jour. Sci. Hiroshima Univ. (1939), p. 7-19.

[3] K. STEIN, Topologische Bedingungen für die Existenz analytischer Funktionen komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Nullstellenflächen, Math. Ann., 117 (1941) p. 727-757.

[4] K. STEIN, Analytische Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Periodizitätsmoduln und das zweite Cousinsche Problem,

Math. Ann., 123 (1951) p. 201-222.

[5] A. **WEIL**, Fibre spaces in algebraic geometry, Algebraic Geometry Conf. Notes, Univ. of Chicago (1947) p. 55-59.