Jean Cerf

Fonctions abéliennes

Séminaire Henri Cartan, tome 4 (1951-1952), exp. n° 5, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1951-1952__4__A5_0>

FONCTIONS ABÉLIENNES

(d'après un exposé de Jean Cerf, 7-1-1952)

On se donne, dans un espace $\mathbf{C}$-vectoriel E, de dimension réelle $2n$, un sous-groupe discret Γ de rang $2n$. On note T le tore E/Γ, muni de sa structure analytique-complexe. Les fonctions méromorphes sur E et invariantes par Γ s'identifient aux fonctions méromorphes sur T; ce sont les <u>fonctions abéliennes</u>. Elles forment évidemment un corps, que nous noterons $A(E, \Gamma)$. Toute fonction abélienne est quotient de deux fonctions thêta holomorphes (cf. exposé 2).

1. Tore non dégénéré associé à un tore dégénéré.

Rappelons la définition du sous-espace $\mathbf{C}$-vectoriel V attaché à la donnée de E et de Γ (voir 4, n° 5): soit $\Phi(E, \Gamma)$ l'ensemble des $\varphi(x, y)$, $\mathbf{R}$-bilinéaires alternées sur E, à valeurs entières sur $\Gamma \times \Gamma$, et satisfaisant aux conditions (1) et (2) de l'exposé 3:

(I) $\varphi(Jx, Jy) = \varphi(x, y)$, (II) $\varphi(x, Jx) \geq 0$

(J désigne le $\mathbf{R}$-endomorphisme de E qui définit la structure complexe). L'ensemble des $x \in E$ tels que $\varphi(x, Jx) = 0$ pour toute $\varphi \in \Phi(E, \Gamma)$ est un sous-espace $\mathbf{C}$-vectoriel, que nous noterons $V(E, \Gamma)$ ou simplement V. V est l'ensemble des solutions d'un système <u>fini</u> d'équations $\varphi_i(x, Jx) = 0$ (où $\varphi_i \in \Phi(E, \Gamma)$); comme $\sum_i \varphi_i \in \Phi(E, \Gamma)$, V est aussi le sous-espace attaché à une φ_0 particulière de $\Phi(E, \Gamma)$. D'après la prop. 3 et le lemme (exposé 3), le sous-groupe $V + \Gamma$ est fermé, et l'image de Γ dans E/V est discrète.

<u>Théorème 1</u>. <u>Pour toute fonction abélienne</u> $f \in A(E, \Gamma)$, <u>la valeur de</u> $f(x)$ <u>ne dépend que de la classe de</u> x <u>modulo</u> $V(E, \Gamma)$. En d'autres termes: <u>le corps</u> $A(E, \Gamma)$ <u>s'identifie au corps des fonctions abéliennes</u> $A(E/V, \Gamma')$, Γ' <u>désignant l'image</u> (discrète) <u>de</u> Γ <u>dans l'espace vectoriel quotient</u> E/V.

En effet, f est quotient de deux fonctions thêta holomorphes, que l'on peut supposer normalisées de manière à leur appliquer la prop. 4 de l'exposé 3. Alors ces fonctions thêta ce dépendent que la classe de x modulo V.

Définition: le tore défini par E et Γ est dit non dégénéré si le sous-espace $V(E, \Gamma)$ est réduit à $\{0\}$. Dans le cas général, le tore défini par E/V et le groupe Γ' (image de Γ) est non dégénéré; on l'appelle le tore non dégénéré associé au tore donné. Le théorème 1 montre que le corps des fonctions abéliennes sur un tore T est isomorphe au corps des fonctions abéliennes sur le tore non dégénéré associé à T.

2. 2. Exemples de tores dégénérés.

On a déjà défini (exp. 4, 5) le sous-espace V' formé des $x \in E$ tels que $\varphi(x, y) = 0$ pour tout $y \in E$ et toute φ, à valeurs entières sur $\Gamma \times \Gamma$, et satisfaisant à (I). Il est évident que $V' \subset V$. Nous allons donner 2 exemples (pour $n = 2$): dans le premier, $V' = E$, donc a fortiori $V = E$; dans le deuxième, $V' = \{0\}$, et cependant $V = E$. Dans les deux cas, toute fonction abélienne est constante, et tout diviseur (sur le tore) est nul. Néanmoins, dans le deuxième exemple, il existe des classes de cohomologie entières, de type (1, 1), non nulles (autrement dit, la prop. 7 de 4 sera en défaut dans ce cas).

Dans chacun des 2 cas, on rapporte E à une base (complexe) de deux vecteurs; Γ est engendré par 4 vecteurs, dont les coordonnées (complexes) sont respectivement

$$(1, 0), \qquad (0, 1), \qquad (ia, ib), \qquad (ic, id),$$

où a, b, c, d sont réels. On cherche les formes hermitiennes

$$\Phi(x, y) = ux_1\overline{y_1} + vx_1\overline{y_2} + \bar{v}x_2\overline{y_1} + wx_2\overline{y_2}$$

dont la partie imaginaire soit à valeurs entières sur les couples de générateurs de Γ (on a noté x_1 et x_2 les coordonnées complexes de x, et y_1 et y_2 celles de y). Les coefficients u et w sont réels, $v = v' + iv''$.

On trouve les conditions

$$v'' = m_1, \qquad v''(ad - bc) = m_2, \qquad ua + v'b = n_1,$$
$$uc + v'd = n_2, \qquad v'a + wb = n_3, \qquad v'c + wd = n_4$$

où $m_1, m_2, n_1, n_2, n_3, n_4$ sont des entiers à déterminer. Supposons $ad - bc$ irrationnel; alors v'' doit être nul. Il vient alors

$$(ad - bc)u = dn_1 - bn_2, \qquad (ad - bc)v = -cn_1 + an_2 = dn_3 - bn_4,$$
$$(ad - bc)w = -cn_3 + an_4.$$

Premier cas: on suppose a, b, c, d linéairement indépendants sur le corps $\mathbf{Q}$ des rationnels. Alors il faut $n_i = 0$ $(1 \leq i \leq 4)$, donc u, v, w sont nuls: toute Φ est identiquement nulle, et le sous-espace $V' = E$.

Deuxième cas: on suppose $b = c$, et que a, b, d sont linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$. Alors on a nécessairement $n_2 = n_3 = 0$, $n_1 = n_4$ arbitraire. Toutes les $\Phi(x, y)$ sont des multiples entiers de l'une d'elles, donc le discriminant $uw - v^2$ est égal à $ad - bc$. Donc le sous-espace V' est réduit à 0. Si on choisit en outre a, b, d de manière que $ad - bc < 0$ (et irrationnel), aucune de ces Φ ne satisfera à $\Phi(x, x) \geq 0$ pour tout x, sauf celle qui est identiquement nulle. Donc l'espace $V = E$ dans ce cas.

3. Existence des fonctions abéliennes sur un tore non dégénéré.

Théorème 2. Si le tore $T = E/\Gamma$ est non dégénéré, il existe une fonction abélienne f (fonction méromorphe sur E, invariante par Γ) telle que Γ soit exactement le groupe de toutes les translations laissant f invariante.

On va même prouver un peu plus, en montrant l'existence d'une f abélienne telle que Γ soit le plus grand groupe transformant en lui-même l'ensemble des pôles de f.

Lemme. Soit F une fonction holomorphe dans $\mathbf{C}^n$ (périodique ou non). Il existe des $h \in \mathbf{C}^n$ tels que la fonction $F(x)$ et la fonction $F_h(x) = F(x - h)$ soient "premières entre elles" (i.e., les diviseurs de leurs zéros n'ont en commun aucune composante irréductible).

En effet, le diviseur D des zéros de F se compose d'une famille au plus dénombrable de variétés irréductibles D_i. Prenons un point x_i dans chaque D_i. Si une translation transforme un D_i en un D_j, elle appartient à l'un des ensembles $D - x_i$ (translaté de D par $-x_i$); or la réunion des $D - x_i$ (qui sont des sous-ensembles fermés de C^n, sans point intérieur) ne peut être l'espace C^n tout entier, en vertu de théorème de Baire.

Soit alors F une fonction thêta holomorphe, relative au groupe Γ, et telle que le diviseur de ses zéros n'admette pas d'autre période que les éléments de Γ (une telle F existe, cf. prop. 6 de 4). Si h satisfait aux conditions du lemme, les fonctions $F(x + h)F(x - h)$ et $(F(x))^2$ sont premières entre elles. Donc leur quotient f, qui est invariant par Γ, est tel que Γ soit le plus grand groupe de translations laissant invarient l'ensemble de ses pôles.

C.Q.F.D.

<u>Corollaire</u> du théorème 2: Si a et b sont deux points distincts de E/Γ, il existe une f abélienne telle que $f(a) \neq f(b)$.

4. <u>Structure du corps des fonctions abéliennes sur un tore non dégénéré</u>.

<u>Théorème</u> 3. <u>Le corps</u> $A(E, \Gamma)$ <u>des fonctions abéliennes sur un tore non dégénéré de dimension</u> (réelle) $2n$, <u>est isomorphe à un corps de fonctions algébriques de</u> n <u>variables</u> (sur le corps complexe).

D'une façon précise: $A(E, \Gamma)$ est <u>extension algébrique simple du corps des fractions rationnelles de</u> n <u>variables</u> (à coeff. complexes).

On doit donc montrer: 1° il existe n fonctions abéliennes f_1, ..., f_n algébriquement indépendantes; 2° toute fonction abélienne f est racine d'une équation algébrique à coefficients rationnels en $f_1, \dots, f_n$ et de degré inférieur à un nombre fixe (indépendant de f).

En effet, il suffit alors d'appliquer le théorème classique: sur un corps de caractéristique nulle, toute extension algébrique de degré fini est engendrée par un "élément primitif."

Les deux assertions précédentes vont résulter des deux théorèmes que voici:

Théorème 4. Sur un tore non dégénéré de dimension (réelle) $2n$, il existe n fonctions abéliennes analytiquement indépendantes (c'est-à-dire dont le jacobien n'est pas identiquement nul).

(Observer que n fonctions analytiquement indépendantes sont, a fortiori, algébriquement indépendantes.)

Théorème 5. Sur un tore non dégénéré, de dimension $2n$, soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions abéliennes, algébriquement indépendantes. Alors toute fonction abélienne f_0 satisfait à un équation

$$P(f_0, f_1, \ldots, f_n) = 0 ,$$

où P est un polynôme non $\equiv 0$ dont le degré en f_0 est majoré par un nombre indépendant de f_0 (mais qui dépend, évidemment, de $f_1, \ldots, f_n$).

Remarque: les théorèmes 4 et 5 entraînent que, dans le corps des fonctions abéliennes sur un tore non dégénéré, les notions de dépendance analytique et de dépendance algébrique sont équivalentes. Car si $f_1, \ldots,$ f_n sont algébriquement indépendantes, on peut trouver n fonctions analytiquement indépendantes parmi les fonctions algébriques de $f_1, \ldots, f_n$, ce qui exige que $f_1, \ldots, f_n$ soient analytiquement indépendantes.

Démonstration du théorème 4. Il suffit de prouver ceci:

Proposition. Si une $f(x)$, méromorphe dans $\mathbf{C}^n = E$, dépend effectivement des n variables complexes (i.e., si f n'est pas fonction seulement de $n-1$ formes $\mathbf{C}$-linéaires sur E), alors il existe n vecteurs $h_1, \ldots, h_n$ tels que f soit holomorphe en chaque h_i, et que le jacobien des fonctions $f(x + h_i)$ soit $\neq 0$ à l'origine.

La différentielle df associe à chaque point $h \in E$ où f est holomorphe, une forme linéaire sur E, que nous noterons $df(h)$. Il s'agit de prouver l'existence de n vecteurs $h_1, \ldots, h_n$ tels que $df(h_1) \wedge df(h_2) \wedge \cdots \wedge df(h_n) \neq 0$. Dire que ces vecteurs existent, c'est dire que l'espace

C-vectoriel engendré par les formes linéaire $df(h)$ (quand h parcourt l'ensemble des points de E où f est holomorphe) est de dimension (complexe) n. Supposons le contraire: on aurait une identité $\Sigma_i \lambda_i \frac{\partial f}{\partial \lambda_i} \equiv 0$ à coefficients λ_i non tous nuls, valable en tout point h où f est holomorphe, donc finalement en tout point de E sans exception. Or cela signifie que f dépend de moins de n variables.

Démonstration du théorème 5. Soient s et t deux entiers. Considérons les $(s+1)(t+1)^n$ fonctions abéliennes

$$(f_0)^{a_0}(f_1)^{a_1} \cdots (f_n)^{a_n} \quad (1 \leq a_0 \leq s, \quad 1 \leq a_k \leq t \text{ pout chaque } k \geq 1).$$

On va montrer que l'on peut choisir un entier s, dépendant seulement de $f_1, \ldots, f_n$ (non de f_0), de manière que, pour t assez grand, ces $(s+1)(t+1)^n$ fonctions soient linéairement dépendantes. Cela établira le théorème. Or il existe une fonction thêta holomorphe g, non dégénérée, telle que $gf_1 \ldots f_n$ soit holomorphe. (Rappelons qu'une fonction thêta est dite non dégénérée si la loi d'intersection $\varphi(x, y)$ qu'elle définit donne naissance à une $\Phi(x, x) = \varphi(x, Jx) > 0$ pour $x \neq 0$). Soit d'autre part g_0 une fonction thêta holomorphe, telle que $g_0 f_0$ soit holomorphe. Les $(s+1)(t+1)^n$ fonctions

$$(g_0)^s g^t (f_0)^{a_0}(f_1)^{a_1} \cdots (f_n)^{a_n} \tag{1}$$

sont des fonctions thêta holomorphes, dont la loi d'intersection $\varphi(x, y)$ s'obtient comme suit: soit ψ_0 la forme bilinéaire attachée à g_0, et ψ celle attachée à g; alors $\varphi = s\psi_0 + t\psi$. Le pfaffien de φ majore le nombre des fonctions (1) linéairement indépendantes (4, théor. 3); or ce pfaffien est un polynôme de degré n par rapport à l'ensemble des variables s et t, et le coefficient de t^n est le pfaffien γ de ψ. Choisissons l'entier s de manière que $s + 1 > \gamma$; alors $(s+1)(t+1)^n$ sera, pour t assez grand, strictement plus grand que le pfaffien de φ. Ceci achève la démonstration.

Remarque: le théorème 3 exprime que le tore T, comme variété analytique complexe, peut être considéré comme une variété algébrique. On peut préciser cette assertion, et montrer que T peut être plongé biunivoquement dans un espace projectif complexe P (à un nombre suffisant de dimensions) de manière à devenir une sous-variété analytique, sans singularité, de P. Il résulte alors d'un théorème de CHOW, Amer. Journal (1949), p. 893, que T est une sous-variété algébrique de P.