K. Stein

Un théorème sur le prolongement des ensembles analytiques

Séminaire Henri Cartan, tome 6 (1953-1954), exp. n° 14, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1953-1954__6__A14_0>

UN THÉORÈME SUR LE PROLONGEMENT DES ENSEMBLES ANALYTIQUES

Deuxième exposé de K. Stein, 22-3-1954

§4. Montrons comment le lemme fondamental (§1 du précédent exposé) entraîne le Corollaire 1 du théorème. Nous nous plaçons donc au voisinage d'un point $x \in X$ où la dimension r de F est $< k$; quitte à remplacer X par un voisinage de x, on peut supposer que F est de dimension $\leq r < k$ dans tout X. Quant à E, c'est un ensemble analytique dans $X - F$, de dimension k en chacun de ses points. Il s'agit de montrer que l'adhérence $\overline{E}$ de E dans X est un ensemble analytique dans X.

La démonstration se fait par récurrence sur r; l'assertion est triviale pour $r = -1$ (ce qui signifie que F est vide). Supposons-la démontrée pour les $r < r_0$ (avec $0 \leq r_0 < k$), et montrons-la pour r_0. Soit F un sous-ensemble analytique de X, de dimension $\leq r_0$ en chacun de ses points; et soit F' l'ensemble des points $p \in F$ au voisinage desquels F est un sous-variété de dimension r_0; on sait que F' est un ouvert de F, et que $F - F'$ est un ensemble analytique de dimension $< r_0$ en chacun de ses points. Il suffit de montrer que les points de F' sont ordinaires par rapport à E, car ensuite on appliquera l'hypothèse de récurrence à $F - F'$.

Soit $p \in F'$. Il existe un voisinage ouvert U de p dans X, et une carte locale de U dans laquelle p vient à l'origine et $F' \cap U$ est représenté par un sous-espace vectoriel de dimension $r_0 < k$. D'autre part, $E \cap U$ est un sous-ensemble analytique dans $U - F' \cap U$, de dimension k en chacun de ses points. Par $F' \cap U$ on peut faire passer une sous-variété connexe de dimension k, soit V (contenue dans U) telle que $V - F' \cap U$ coupe E suivant un sous-ensemble analytique de dimension $< k$. Soit E_1 l'intersection de E avec $U - V$; c'est un sous-ensemble analytique de $U - V$, de dimension k en chacun de ses points, et dont l'adhérence $\overline{E}_1$ dans U est égale à $\overline{E} \cap U$. Les points de $V - F' \cap U$ sont évidemment ordinaires par rapport à E_1; d'après le lemme fondamental, tous les points de V sont ordinaires. Donc les points de $F' \cap U$ sont ordinaires par rapport à E, ce qu'on voulait démontrer.

Ainsi le Corollaire 1 est démontré.

§5. Nous allons maintenant démontrer le théorème lui-même. Soit F' l'ensemble des points réguliers de dimension k de F (i.e., l'ensemble des points au voisinage desquels F est une sous-variété de dimension k). Soit F_0' l'ensemble des points de F' qui sont ordinaires par rapport à E. D'après le lemme fondamental, F_0' est un sous-ensemble ouvert et fermé de F'; donc F_0' se compose d'un certain nombre de composantes connexes de F'. Soit F_1' la réunion des autres composantes connexes de F'. L'adhérence de F_1' est un sous-ensemble analytique G de F (à savoir la réunion des composantes irréductibles de F dont l'ensemble des points réguliers est une composante connexe de F_1'). Il est clair qu'aucun point de G n'est ordinaire par rapport à E. Le théorème sera démontré si nous prouvons que les points de $F - G$ sont tous ordinaires; en effet, ceci prouvera que l'ensemble des points singuliers essentiels est G; or G est bien de dimension k en chacun de ses points, puisque c'est une réunion de composantes irréductibles de F dont la dimension est k.

Soit donc $p \in F - G$. Si la dimension de F en p est $< k$, p est un point ordinaire d'après le Corollaire 1 (déjà démontré). Sinon, p est adhérent à une composante connexe de F'; puisque p n'est pas dans G, p n'est pas adhérent à F_1', donc p est adhérent à F_0'. Au voisinage de p, l'ensemble des points de F non ordinaires est contenu dans $\overline{F_0'} - F_0'$, qui est un ensemble analytique de dimension $< k$ en chacun de ses points. D'après le Corollaire 1, tous ces points sont, en fait, ordinaires. Donc p est ordinaire, et la démonstration est achevée.

APPLICATIONS

§6. On appelle <u>cône</u> de sommet $x^{(0)}$ dans C^n un ensemble qui contient, avec un point $x^{(1)} \neq x^{(0)}$, tous les points de la droite complexe joignant $x^{(0)}$ et $x^{(1)}$, c'est-à-dire tous les points

$$x = x^{(0)} + t(x^{(1)} - x^{(0)}), \text{ où } t \text{ est un nombre complexe arbitraire.}$$

Le Corollaire 1 a pour conséquence:

<u>Proposition 5</u>. <u>Tout cône K dans C^n qui est analytique en dehors de son sommet est aussi analytique en son sommet</u>.

Il suffit de considérer le cas où K n'est pas réduit à son sommet $x^{(0)}$, donc est l'adhérence de $K - \{x^{(0)}\}$. En tout point $x \in K$ autre que le sommet, K est de dimension ≥ 1 puisque x n'est pas isolé dans K; donc, dans $C^n - x^{(0)}$, $K - \{x^0\}$ admet une décomposition

$$K - \{x^{(0)}\} = M^1 \cup \cdots \cup M^n ,$$

où chaque M^r $(1 \leq r \leq n)$ est un ensemble analytique purement r-dimensionnel (éventuellement vide) dans $C^n - x^{(0)}$; si M^r n'est pas vide, son adhérence $\overline{M}^r = M^r \cup \{x^{(0)}\}$ est un sous-ensemble analytique au point $x^{(0)}$ (d'après le Corollaire 1, appliqué ici dans le cas où F est réduit au point $x^{(0)}$). Donc K est la réunion des cônes $\overline{M}^r$, donc chacun est analytique en son sommet.

C.Q.F.D.

<u>Proposition 6</u> (théorème de CHOW). <u>Tout sous-ensemble analytique E de l'espace projectif complexe P_n est un sous-ensemble algébrique</u>.

<u>Démonstration</u>: P_n est l'espace des sous-espaces vectoriels de dimension 1 de C^{n+1}. Considérant P_n comme quotient de $C^{n+1} - \{0\}$, on associe à tout sous-ensemble E de P_n son image réciproque dans $C^{n+1} - \{0\}$, soit E'. Si E est un ensemble analytique, E' est un ensemble analytique dans $C^{n+1} - \{0\}$, de dimension ≥ 1 si E n'est pas vide. D'après la Proposition 5, le cône $E' \cup \{0\}$ est analytique aussi en son sommet 0. Il reste donc à démontrer que <u>tout cône analytique est un cône algébrique</u>.

Soit K un cône analytique (en son sommet). Au voisinage de 0, K est défini par un système fini d'équations $f_j(x_0, \ldots, x_n) = 0$, où les f_j sont holomorphes au voisinage de l'origine. Soit

$$f_j = \sum_{i \geq 0} P_j^{\,i}$$

le développement de f_j en série de polynômes homogènes ($P_j^{\,i}$ étant homogène de degré i). On va montrer que tous les $P_j^{\,i}$ sont nuls sur le cône K. En effet, si $x = (x_0, \ldots, x_n) \in K$, on a, pour tout nombre complexe t tel que $|t| < 1$:

$$f_j(tx) = \sum_{i \geq 0} t^i P_j^{\,i}(x) = 0,$$

ce qui implique que tous les coefficients $P_j^{\,i}(x)$ sont nuls. Ainsi, au voisinage de 0, le cône K est défini par l'annulation de tous les polynômes $P_j^{\,i}$; mais puisque l'anneau des séries convergentes est noethérien, il suffit d'annuler un nombre <u>fini</u> parmi ces polynômes, pour définir K. Le cône K est donc bien algébrique.

<u>Corollaire. Le théorème de Chow vaut aussi dans un produit</u> $P_{n_1} \times \cdots \times P_{n_r}$ <u>d'espaces projectifs complexes</u>.

En effet, un tel produit Y peut être plongé comme ensemble analytique sans singularité dans un espace projectif P_N de dimension

$$N = (n_1 + 1) \cdots (n_r + 1) - 1 \ .$$

Pour le voir, désignons par $(y_0^{\,i}, \ldots, y_{n_i}^{\,i})$ un système de coordonnées homogènes pour le i-ième facteur P_{n_i}. Soit d'autre part $(z_{s_1, \ldots, s_r})$, $0 \leq s_i \leq n_i$, un système de coordonnées homogènes dans P_N. L'application Φ qui envoie

$$(y_0^{\,1}, \ldots, y_{n_1}^{\,1}; \ldots; y_0^{\,r}, \ldots, y_{n_r}^{\,r}) \text{ en } z_{s_1, \ldots, s_r} = y_{s_1}^{\,1} \cdots y_{s_r}^{\,r}$$

est un plongement de $Y = P_{n_1} \times \cdots \times P_{n_r}$ dans P_N, dont l'image est une sous-variété sans singularité. Alors si E est un sous-ensemble analytique de

Y, $\Phi(E)$ est un sous-ensemble analytique de P_N, donc est défini par des équations algébriques $Q_j(z_{s_1,\ldots,s_r}) = 0$. Par suite E est défini par les équations algébriques $Q_j(y^1_{s_1} \cdots y^r_{s_r}) = 0$.

§7. Soient X et X' deux variétés analytiques complexes, et $f: X \to X'$ une application analytique de X dans X'. Si $x \in X$ et $f(x) = x' \in X'$, l'ensemble $E(x) = f^{-1}(x')$ est un ensemble analytique dans X; il contient x; soit $d(x)$ sa dimension au point x. L'ensemble $E(x)$ s'appelle la *fibre* de f au point x.

Proposition 7. *La dimension* $d(x)$ *de la fibre de* x *est une fonction semi-continue supérieurement de* $x \in X$.

Démonstration: nous devons montrer que tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert U tel que, pour tout $y \in U$, on ait $d(y) \leq d(x)$. Supposons que ce soit faux: il existe alors une suite de points $x_n \in U$ qui convergent vers x, telle que $d(x_n) > d(x)$ pour tout n. Soient $E'(x_n)$ une composante irréductible de la fibre $E(x_n)$ dans U, telle que $x_n \in E'(x_n)$, $\dim E'(x_n) = d(x_n)$. On peut supposer que $E(x)$ et les $E'(x_n)$ sont deux à deux disjoints et que les $E'(x_n)$ ont tous la même dimension $d' > d(x)$. Alors la réunion M des $E'(x_n)$ est un ensembel analytique dans $U - E(x)$, purement dimensionnel et de dimension d'. D'après le Corollaire 1, l'adhérence $\overline{M}$ de M dans U est analytique au voisinage de x, puisque $d' > d(x)$. En particulier, M peut être prolongé analytiquement au point x. Or ceci est absurde, car tout voisinage de x rencontre presque tous les $E'(x_n)$.

§8. Soit X une variété analytique complexe de dimension n, et soit F un sous-ensemble analytique dans X, irréductible et de codimension 1. Soit f une fonction holomorphe dans $X - F$. Supposons que tous les points de F soient des points singuliers essentiels de f, c'est-à-dire que f ne soit prolongeable en aucun point de F comme fonction *méromor-*

phe. (D'après E. E. LEVI on sait que si un point de F est un point singulier essentiel de f, tout point de F est singulier essentiel.) Considérons l'ensemble $E(t)$ défini par l'équation

$$f(x) - t = 0 \quad (x \in X),$$

où t désigne un nombre complexe quelconque. L'ensemble $E(t)$ est analytique et purement $(n-1)$-dimensionnel dans $X - F$. D'après le Corollaire 2, ou bien tous les points de F sont ordinaires par rapport à $E(t)$, ou bien ils sont tous points singuliers essentiels de l'ensemble $E(t)$.

On va montrer qu'il y a au plus une valeur de t telle que les points de F soient ordinaires par rapport à $E(t)$. S'il y en avait deux, t_1 et t_2, on obtiendrait une contradiction comme suit: l'adhérence de $E(t_1) \cup E(t_2)$ dans X, c'est-à-dire $\overline{E}(t_1) \cup \overline{E}(t_2)$, est analytique en tout point de X, et ne contient pas F. Il existe donc un point $p \in F$ et un voisinage ouvert U de p qui ne rencontre pas $E(t_1) \cup E(t_2)$. Ceci signifie que f ne prend aucune des valeurs t_1 et t_2 dans U. Mais alors on montre à l'aide de la fonction modulaire, exactement comme dans la démonstration classique du théorème de Picard, que f est prolongeable comme fonction holomorphe au point p, ce qui contredit l'hypothèse.

En particulier, on a le résultat suivant:

Pour tout nombre t sauf peut-être un, l'adhérence de $E(t)$ dans X contient F. En d'autres termes: sauf peut-être pour une valeur exceptionnelle t_0, qui ne dépend pas du point $p \in F$, tout valeur $t \neq t_0$ est prise par f dans tout voisinage de p, et ceci quel que soit $p \in F$.

C'est une généralisation du théorème de Picard, due à THULLEN (Math. Ann. 11, (1935)).

§9. Dans la démonstration du lemme fondamental, on a utilisé la généralisation du théorème de Rado énoncée aux Propositions 1 et 1 bis. Réciproquement, le Corollaire 1 entraîne les Propositions 1 et 1 bis. Nous ne donnons pas la démonstration, qui est très facile à condition de faire usage du lemme suivant, qui est intéressant en soi:

Lemme. Soit $f: X \to Y$ *une application continue d'un espace analytique normal* X *dans un espace analytique* Y. *Pour que* f *soit une application analytique, il faut et il suffit que le graphe* M *de* f *soit un sous-ensemble analytique de* $X \times Y$; *s'il en est ainsi,* M *est irréductible en chacun de ses points.*

Démonstration: si f est analytique, le graphe M est défini comme l'image réciproque de la diagonale de $Y \times Y$ par l'application analytique

$$(x, y) \to (f(x), y) \quad \text{de} \quad X \times Y \quad \text{dans} \quad Y \times Y.$$

Donc M est un sous-ensemble analytique de $X \times Y$. Réciproquement, supposons que M soit un sous-ensemble analytique de $X \times Y$; l'application de projection $X \times Y \to X$ induit une application analytique $g: M \to X$, qui est évidemment un homéomorphisme. Appliquons le Corollaire 3 du Théorème 4 de l'Exposé 8 au germe d'application défini par g en chaque point de M: on voit que g est un *isomorphisme* d'espaces analytiques, et que M est irréductible en chacun de ses points. Donc l'homéomorphisme réciproque de g, qui est

$$x \to (x, f(x)) ,$$

est analytique, et ceci prouve que f est analytique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. BEHNKE-K. STEIN, Modification komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete, Math. Ann. 124 (1951), p. 1-16.

[2] H. CARTAN, Problèmes globaux dans la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, Proc. Intern. Congr. of Math. vol. 1 (1950), p. 152-164.

[3] H. CARTAN, Sur une extension d'un théorème de Rado, Math. Ann. 125 (1952), p. 49-50.

[4] W. L. CHOW, On compact analytic varieties, Amer. Journ. Math. 71 (1949), p. 893-914.

[5] H. KNESER, Analytische Mannigfaltigkeiten im komplexen projektiven Raum, Math. Nachr. 4 (1950-51), p. 382-391.

[6] T. RADO, Ueber eine nicht fortsetzbare Riemannsche Mannigfaltigkeit, Math. Zeitschr, 20 (1924), p. 1-6.

[7] R. REMMERT-K. STEIN, Ueber die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen, Math. Ann. 126 (1953), p. 263-306.

[8] W. ROTHSTEIN, Zur Theorie der Singularitäten analytischer Funktionen und Flächen, Math. Ann., 126 (1953), p. 221-238.

[9] P. THULLEN, Ueber die wesentlichen Singularitäten analytischer Funktionen und Flächen im Raume von n komplexen Veränderlichen, Math. Ann., 111 (1935), p. 137-157.