J-P. SERRE

Fonctions automorphes

Séminaire Henri Cartan, tome 6 (1953-1954), exp. nº 20, p. 1-23
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1953-1954__6__A20_0>

FONCTIONS AUTOMORPHES

(Exposés de J-P. Serre, 24-5-54 et 14-6-54)

§I. Faisceaux de fonctions automorphes.

1. Le faisceau $\mathcal{A}(J)$.

Dans tout ce qui suit, X désigne une variété analytique complexe de dimension complexe s, et G un groupe d'automorphismes de X vérifiant les hypothèses (I) et (II) de l'exposé 12. On note Y l'espace quotient X/G, et π la projection canonique: $X \rightarrow Y$. D'après l'hypothèse (I), Y est séparé; d'ailleurs, on a vu dans l'exposé 12 que Y est un espace analytique normal.

Pour tout $x \in X$ on désigne par G(x) le sous-groupe de G formé des $g \in G$ tels que $g \cdot x = x$; d'après l'hypothèse (II), G(x) est un groupe fini. Plus précisément, l'hypothèse (II) permet de ramener toute question locale sur X et G à une question portant sur un groupe G(x).

Soit $g \rightarrow J_g$ un facteur d'automorphie, au sens de l'Exposé 1. Nous allons attacher à ce facteur un faisceau $\mathcal{A}(J)$ porté par l'espace Y:

Pour tout ouvert $U \subset Y$, soit $\mathcal{A}(J)_U$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\pi^{-1}(U)$ qui sont J-automorphes, c'est-à-dire qui vérifient l'identité:

$$(*) \qquad f(g \cdot z) = J_g(z) \cdot f(z) \qquad \text{pour tout} \quad z \in \pi^{-1}(U) .$$

Si V est un ouvert contenu dans U, on a un homomorphisme évident (la restriction): $\mathcal{A}(J)_U \rightarrow \mathcal{A}(J)_V$; si $W \subset V \subset U$, on a la condition de transitivité habituelle. Donc, la collection des $\mathcal{A}(J)_U$ définit un faisceau, qui est le faisceau $\mathcal{A}(J)$. Un élément de $\mathcal{A}(J)_y$, $y \in Y$, peut être identifié à une fonction holomorphe sur un voisinage saturé de $\pi^{-1}(y)$ qui vérifie la condition (*). Il est clair que $\mathcal{A}(J)_U$ coïncide avec $H^0(U, \mathcal{A}(J))$.

Lorsque $J_g = 1$ quel que soit $g \in G$, le faisceau $\mathcal{A}(J)$ n'est pas autre chose que le faisceau $\mathcal{O}$ des germes de fonctions holomorphes sur Y (rappelons que, par définition, une fonction holomorphe sur $U \subset Y$ est une fonction holomorphe sur $\pi^{-1}(U)$ qui est invariante par G).

Le produit d'une fonction J-automorphe par une fonction invariante par G étant encore une fonction J-automorphe, on voit que chaque $\mathfrak{A}(J)_y$ est muni d'une structure de $\mathcal{O}_y$-module, ce qui définit sur $\mathfrak{A}(J)$ une structure de <u>faisceau analytique</u> sur Y.

2. <u>Faisceaux analytiques cohérents sur les espaces analytiques</u>.

Nous venons de définir un faisceau analytique sur l'espace analytique Y. Or, la théorie des faisceaux cohérents peut s'étendre à l'espace Y:

Plus généralement, donnons-nous un espace topologique Y, muni d'un sous-faisceau $\mathcal{O}$ du faisceau des fonctions continues et faisons l'hypothèse que tout $y \in Y$ possède un voisinage ouvert isomorphe à un sous-ensemble analytique E d'un ouvert U d'un espace $\mathbf{C}^k$; nous dirons alors que Y est un <u>espace analytique</u>. Cette définition est plus large que celle de l'Exposé 6, §5, qui revient à exiger que, pour tout $y \in Y$, $\mathcal{O}_y$ soit intégralement clos; un espace analytique vérifiant cette dernière condition est dit <u>normal</u>; par exemple, l'espace $Y = X/G$ du No. 1 est normal.

Soit alors $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathcal{O}$-modules sur Y; on dira que $\mathcal{F}$ est <u>cohérent</u> s'il est localement isomorphe au conoyau d'un homomorphisme analytique $\varphi: \mathcal{O}^p \to \mathcal{O}^p$. Si Y est plongé, comme sous-ensemble analytique (avec la structure induite), dans une variété analytique complexe U, soit $\mathcal{F}'$ le faisceau sur U qui coïncide avec $\mathcal{F}$ sur Y, et est nul en dehors de Y; le faisceau $\mathcal{F}'$ est un faisceau analytique sur U, et l'on a:

<u>Lemme 1</u>. <u>Pour que $\mathcal{F}$ soit cohérent sur Y, il faut et il suffit que $\mathcal{F}'$ soit cohérent sur U</u>.

On remarque d'abord que le faisceau $\mathcal{O}'$ est cohérent, puisque c'est le quotient du faisceau $\mathcal{O}(U)$ par le faisceau d'idéaux défini par Y (faisceau qui est cohérent d'après un théorème de Cartan—cf. Sém. 51-52, Exposé 16). Le lemme se déduit immédiatement de là.

Le Lemme 1 donne un critère commode pour qu'un faisceau $\mathfrak{F}$ sur Y soit cohérent. On en déduit notamment que le noyau, le conoyau et l'image d'un homomorphisme analytique: $\mathfrak{F} \to \mathfrak{G}$ sont des faisceaux cohérents si $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{G}$ le sont. Bref toutes les propriétés usuelles des faisceaux cohérents sont valables.

3. Cohérence du faisceau $\mathcal{A}(J)$.

Revenons au faisceau $\mathcal{A}(J)$ du No. 1. Nous nous proposons de démontrer le résultat suivant:

Théorème 1. Le faisceau analytique $\mathcal{A}(J)$ est cohérent.

La question est évidemment locale; il faut démontrer que $\mathcal{A}(J)$ est cohérent au voisinage de tout point donné $y_0 \in Y$. Soit $x_0 \in X$ avec $\pi(x_0) = y_0$, et soit $V(x_0)$ un voisinage ouvert de x_0, stable par $G(x_0)$, et vérifiant l'hypothèse (II) de l'Exposé 12, §1 (autrement dit, les relations $g \in G$, $x \in V(x_0)$, $g \cdot x \in V(x_0)$ entraînent $g \in G(x_0)$).

Ces relations entraînent que $V(x_0)/G(x_0)$ est isomorphe à $\pi(V(x_0)) \subset Y$; d'autre part, il est clair que la restriction de $\mathcal{A}(J)$ à $\pi(V(x_0))$ est isomorphe au faisceau analogue à $\mathcal{A}(J)$ défini à partir de $V(x_0)$ et de $G(x_0)$, à la place de X et de G. On est donc ramené à étudier ce dernier faisceau. Utilisant ensuite le Lemme 1 de l'Exposé 12, on voit que l'on est finalement ramené à démontrer le Théorème 1 dans le cas particulier suivant:

X est un espace numérique complexe $\mathbf{C}^s$, et G est un groupe linéaire fini.

Notons que, si G opère sans points fixes sur X, ce qui précède montre que $\mathcal{A}(J)$ est localement isomorphe à $\mathcal{O}$, donc a fortiori cohérent.

4. Cohérence du faisceau $\mathcal{A}(J)$: générateurs.

Nous supposons donc que $X = \mathbf{C}^s$, et que G est un groupe linéaire fini d'ordre n.

Soit S l'algèbre des polynômes $\mathbf{C}[z_1,\ldots, z_s]$, et S^G la sous-algèbre de S formée des polynômes invariants par G. Soit $J_g(z)$ le facteur d'automorphie donné (qui n'est défini que dans un voisinage ouvert V de l'origine dans $\mathbf{C}^n$; nous pouvons évidemment supposer V stable par G). Le faisceau $\mathcal{A}(J)$ est défini sur $\pi(V) = U \subset X/G$, et nous devons montrer qu'il est cohérent sur U.

Si P est un élément de S, nous désignerons par $L(P)$ la fonction:

$$L(P)(z) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} J_g(z)^{-1} \cdot P(g \cdot z) \quad .$$

La fonction $L(P)$ est définie et holomorphe dans V. Si $Q \in S^G$, on a évidemment $L(P \cdot Q) = L(P) \cdot Q$.

On sait que S est un module de type fini sur S^G (cf. Exposé 12, Prop. 1 bis); soit $P_1,\ldots, P_k$ un système de générateurs de ce module.

<u>Proposition 1</u>. <u>Les fonctions</u> $L(P_i)$ <u>engendrent le</u> $\mathcal{O}_y$<u>-module</u> $\mathcal{A}(J)_y$ <u>pour tout</u> $y \in U$.

(Cela a un sens, car il est clair que les $L(P)$ sont des fonctions J-automorphes sur $V = \pi^{-1}(U)$.)

La Proposition 1 va résulter de la suivante, où le facteur d'automorphie J n'intervient plus:

<u>Proposition 2</u>. <u>Soit</u> $y \in Y = X/G$, <u>et soit</u> f <u>une fonction holomorphe au voisinage de</u> $\pi^{-1}(y)$. <u>On peut écrire</u> f <u>sous la forme</u>:

$$f = \sum_{\alpha} h_\alpha \cdot P_\alpha, \quad \underline{\text{avec}} \quad P_\alpha \in S, \ \underline{\text{et}} \quad h_\alpha \in \mathcal{O}_y \quad .$$

Montrons que la Proposition 2 entraîne la Proposition 1. Soit $y \in U$, et soit $f \in \mathcal{A}(J)_y$; appliquant la Proposition 2 à f, on peut écrire $f = \Sigma_\alpha h_\alpha \cdot P_\alpha$, comme ci-dessus. Mais chaque P_α peut lui-même s'exprimer comme combinaison linéaire des $P_1,\ldots, P_k$, à coefficients dans S^G. D'où:

$$f = \sum_{i=1}^{i=k} h_i \cdot P_i, \quad \text{avec} \quad h_i \in \mathcal{O}_y \quad .$$

Appliquons alors à f l'opération L (qui s'étend évidemment à toute fonction holomorphe définie sur un ouvert de V stable par G). On a alors $L(f) = f$ (puisque f est J-automorphe), et $L(h_i \cdot P_i) = h_i \cdot L(P_i)$, puisque h_i est invariante par G. D'où:

$$f = \sum_{i=1}^{i=k} h_i \cdot L(P_i), \qquad \text{cqfd.}$$

5. <u>Cohérence du faisceau</u> $\mathfrak{A}(J)$: <u>démonstration de la Proposition 2</u>.

Si $x \in X$, soit $\mathcal{O}_x$ l'anneau des germes de fonctions holomorphes en x; si $y \in Y = X/G$, soit B_y l'anneau des germes de fonctions holomorphes au voisinage de $\pi^{-1}(y)$; l'anneau B_y est un $\mathcal{O}_y$-module, puisque $\mathcal{O}_y$ est le sous-anneau de B_y formé des éléments invariants par G. On a:

$$B_y = \sum_{x \in \pi^{-1}(y)} \mathcal{O}_x \quad ,$$

cette décomposition en somme directe étant compatible avec la structure de $\mathcal{O}_y$-module de B_y.

Si $x \in \pi^{-1}(y)$, $\mathcal{O}_y$ est isomorphe au sous-anneau de $\mathcal{O}_x$ formé des éléments invariants par $G(x)$. Il s'ensuit (cf. Exposé 12, Th. 2) que $\mathcal{O}_x$ est un $\mathcal{O}_y$-module de type fini, donc que B_y est également <u>un $\mathcal{O}_y$-module de type fini</u>.

Soit C_y le sous-$\mathcal{O}_y$-module de B_y engendré par les polynômes. La Proposition 2 équivaut à dire que $C_y = B_y$.

Puisque $\mathcal{O}_y$ est un anneau local noethérien, d'idéal maximal I_y (I_y étant l'ensemble des éléments de $\mathcal{O}_y$ nuls en y), on peut munir B_y de la I_y-topologie; rappelons (cf. Exposé 7, §1) que les sous-modules $(I_y)^m \cdot B_y$, $m = 0,1,\ldots$, forment une base des voisinages de 0 dans cette topologie. Evidemment, la I_y-topologie de B_y/C_y est la topologie quotient de la I_y-topologie de B_y; puisque B_y/C_y est un module de type fini, le théorème de Krull (Exposé 7, Prop. 2) montre que B_y/C_y est séparé, donc que C_y <u>est fermé dans</u> B_y. Tout revient donc à prouver que C_y est <u>dense</u> dans B_y.

Or la topologie de B_y est la topologie produit de celle des $\mathcal{O}_x$, $x \in \pi^{-1}(y)$. Et la I_y-topologie de $\mathcal{O}_x$ coïncide avec la topologie naturelle de l'algèbre locale $\mathcal{O}_x$, d'après la Proposition 7 de l'Exposé 7. Donc, pour prouver que C_y est dense dans B_y, il suffit de prouver ceci:

Si l'on se donne un entier N, et, pour tout $x \in \pi^{-1}(y)$, un polynôme Q_x, il existe un polynôme Q tel que, pour chaque $x \in \pi^{-1}(y)$, $Q - Q_x$ soit d'ordre $\geq N$ en x.

Comme ce dernier énoncé est un cas particulier de celui démontré dans l'Appendice de l'Exposé 12, la démonstration de la Proposition 2 est achevée.

6. Cohérence du faisceau $\mathcal{A}(J)$: relations.

Les notations étant toujours celles des Nos. 4 et 5, soit U' un ouvert $\subset U$, et $V' = \pi^{-1}(U') \subset V$. Soient $f_1, \ldots, f_n$ un nombre fini de fonctions J-automorphes sur V'; par une relation entre les f_i nous entendrons un système $h_1, \ldots, h_n$ d'éléments de $\mathcal{O}_y$, $y \in U'$, tel que l'on ait:

$$h_1 \cdot f_1 + \cdots + h_n \cdot f_n = 0.$$

Les relations au point y forment évidemment un module sur $\mathcal{O}_y$.

Proposition 3. Les relations entre $f_1, \ldots, f_n$ sont engendrées localement par un nombre fini d'entre elles.

La question étant locale, nous pouvons supposer U' connexe, puisque X/G est localement connexe.

Si les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ sont toutes identiquement nulles, la Proposition 3 est évidente. Supposons donc que f_1, par exemple, ne soit pas identiquement nulle. Considérons la fonction H définie par la formule suivante:

$$H(z) = \prod_{h \in G, h \neq e} f_1(h \cdot z) .$$

La fonction H est holomorphe dans V', non identiquement nulle, et le produit $f_1 \cdot H$ est invariant par G. Il s'ensuit que H est J^{-1}-

automorphe, donc que les produits $f_2 \cdot H, \ldots, f_n \cdot H$ sont aussi invariants par G. Posons alors: $g_1 = f_1 \cdot H, \ldots, g_n = f_n \cdot H$. Toute relation entre les f_i:

$$h_1 \cdot f_1 + \cdots + h_n \cdot f_n = 0,$$

conduit à une relation entre les g_i:

$$h_1 \cdot g_1 + \cdots + h_n \cdot g_n = 0,$$

et réciproquement, puisque H n'est pas identiquement nulle et que U' est connexe. Or, on sait que le faisceau des relations entre un nombre fini de fonctions données est cohérent (Th. d'Oka, Sém. 51-52, Exposé 15, qui s'étend immédiatement au cas de l'espace analytique Y). D'où la Proposition 3.

Les Propositions 1 et 3 entraînent évidemment que le faisceau $\mathcal{A}(J)$ est cohérent, ce qui achève la démonstration du Théorème 1.

7. Complément: équivalence locale des facteurs d'automorphie.

Si l'on veut étudier de plus près la structure locale des faisceaux $\mathcal{A}(J)$, on est amené à mettre le facteur d'automorphie J sous une forme aussi simple que possible.

La question étant locale, nous pouvons supposer, comme plus haut, que le groupe G est fini, et laisse fixe le point x au voisinage duquel on étudie le faisceau $\mathcal{A}(J)$.

Deux facteurs d'automorphie J_g et J'_g seront dits équivalents en x s'il existe une fonction h(z), holomorphe et $\neq 0$ au voisinage de x, telle que:

$$J_g'(z) = J_g(z) \cdot h(g \cdot z) \cdot h(z)^{-1} \quad \text{pour } z \text{ voisin de } x.$$

Dans ce cas, si f est J-automorphe, f·h est J'-automorphe, et la correspondance $f \to f \cdot h$ définit un isomorphisme du faisceau $\mathcal{A}(J)$ sur le faisceau $\mathcal{A}(J')$, au voisinage de x.

[Dans le langage de la cohomologie des groupes, l'équivalence peut s'interpréter ainsi: soit $\mathcal{O}_x^*$ le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $\mathcal{O}_x$, groupe sur lequel opère G; un facteur d'automorphie J n'est pas autre chose qu'un 1-cocycle de G à valeurs dans le G-module $\mathcal{O}_x{}^*$, et deux facteurs J et J' sont équivalents s'ils sont cohomologues. Autrement dit, le groupe des classes de facteurs d'automorphie locaux n'est pas autre chose que $H^1(G, \mathcal{O}_x^*)$.]

D'autre part, rappelons qu'on appelle <u>caractère</u> d'un groupe G un homomorphisme ε: $G \to \mathbf{C}^*$ (si l'ordre de G est n, $\varepsilon(g)$ est nécessairement une racine n-ème de l'unité quel que soit $g \in G$). Tout caractère est un facteur d'automorphie particulier.

<u>Théorème 2</u>. <u>Tout facteur d'automorphie J est localement équivalent à un caractère, et à un seul</u>.

Si $J_g(z)$ est un facteur d'automorphie au voisinage de x, l'application $g \to J_g(x)$ est un caractère de G; deux facteurs d'automorphie équivalents définissent le même caractère, et tout caractère peut être obtenu ainsi. Il nous suffit donc de prouver que, si J_g définit le caractère trivial (identique à 1), J_g est équivalent à 1 au voisinage de x. Or, par hypothèse, $J_g(z)$ est une fonction holomorphe de z qui prend la valeur 1 au point $z = x$; soit $j_g(z) = \log \cdot J_g(z)$, le log étant choisi de telle sorte que $j_g(x) = 0$; on a $j_{gg'}(z) = j_g(g'z) + j_{g'}(z)$, comme on le voit aussitôt. Posons:

$$k(z) = \sum_{h \in G} j_h(z) \quad . \quad \text{On a:}$$

$$k(g\cdot z) = \sum_{h \in G} j_h(g\cdot z) = \sum_{h \in G} (j_{hg}(z) - j_g(z)) = k(z) - n\cdot j_g(z) \quad .$$

Si l'on pose alors:

$$h(z) = e^{-k(z)/n} \; ,$$

on aura $J_g(z) = h(g\cdot z)\cdot h(z)^{-1}$, ce qui montre que J_g est équivalent à 1, cqfd.

[En langage cohomologique: Soit I_x l'idéal maximal de $\mathcal{O}_x$; l'application exponentielle montre que $\mathcal{O}_x{}^*$ est isomorphe, en tant que G-module, au produit direct de $\mathbf{C}^*$ sur lequel G opère trivialement, et de I_x; comme I_x est divisible, et que G est fini, on a $H^1(G, I_x) = 0$, d'où $H^1(G, \mathcal{O}_x{}^*) = H^1(G, \mathbf{C}^*) = \mathrm{Hom}(G, \mathbf{C}^*)$, cqfd.]

Remarques.

1) Pour une variable, le faisceau $\mathfrak{A}(J)$ est toujours localement isomorphe à $\mathcal{O}$; mais il est facile de donner des exemples à plusieurs variables où $\mathfrak{A}(J)$ n'est pas localement équivalent à $\mathcal{O}$. C'est naturel, puisqu'un diviseur d'une variété normale n'est pas toujours une intersection complète locale.

2) On définit de la même façon que ci-dessus l'équivalence globale de deux facteurs d'automorphie. Le groupe des classes de facteurs d'automorphie est encore isomorphe à $H^1(G, \mathcal{O})$, où $\mathcal{O}$ désigne le groupe multiplicatif des fonctions holomorphes inversibles sur X. Mais ce groupe de cohomologie est beaucoup plus difficile à étudier que dans le cas local; pour donner un exemple, si X est un domaine borné contractile, et si G opère sans points fixes sur X, $Y = X/G$ étant compact, on peut montrer que $H^1(G, \mathcal{O}^*)$ est isomorphe au groupe des classes de diviseurs sur la variété algébrique Y; on peut également donner des résultats précis lorsque X est le disque unité du plan complexe et que $\hat{X}$ est compact (cf. Petersson, ainsi que Godement, Sém. Bourbaki, Mars 1954), ou bien encore dans le cas des fonctions abéliennes.

§II. Cas d'un domaine borné .

8. Notations.

Nous nous plaçons maintenant dans les hypothèses des Exposés 1 et 15: X est un domaine borné de $\mathbf{C}^s$, et G un groupe discret d'automorphismes de X tel que $Y = X/G$ soit compact. On sait que les conditions (I) et (II) sont alors vérifiées.

On prend pour facteur d'automorphie J_g le jacobien de $x \to g\cdot x$. Les puissances (positives ou négatives) de J sont encore des facteurs d'automorphie, et l'on note $\mathfrak{A}_n$ le faisceau $\mathfrak{A}(J^{-n})$. Une section du faisceau $\mathfrak{A}_n$ est donc une forme automorphe de poids n, au sens usuel.

On désignera par q le plus petit entier ≥ 1 tel que $(J_g(x))^q = 1$ pour tous les couples (g, x) tels que $g\cdot x = x$. On a vu dans l'Exposé 15 que, si m est un multiple assez grand de l'entier q, toute base $F_0, \ldots, F_r$ de l'espace vectoriel des séries de Poincaré de poids m définit un plongement biunivoque de Y comme sous-variété normale de l'espace projectif $P_r(\mathbf{C})$; on désignera par φ_m ce plongement. Si $x \in X$, et si $\pi(x) = y \in Y$, $\varphi_m(y)$ est donc le point de $P_r(\mathbf{C})$ de coordonnées homogènes $(F_0(x), \ldots, F_r(x))$. Dans les Nos. suivants, m désignera toujours un entier ayant les propriétés précédentes.

9. Les faisceaux $\mathfrak{A}_n$.

Considérons Y comme plongé dans $P_r(\mathbf{C})$ au moyen de l'application φ_m; si $\mathfrak{F}$ est un faisceau cohérent sur Y, soit $\mathfrak{F}'$ le faisceau sur $P_r(\mathbf{C})$ qui coïncide avec $\mathfrak{F}$ sur Y et est nul en dehors de Y; d'après le Lemme 1, $\mathfrak{F}'$ est cohérent. Le faisceau $\mathfrak{F}'(n)$, $n \in \mathbf{Z}$, est alors défini par le procédé de l'Exposé 18, No. 6; il est nul en dehors de Y, et sa restriction à Y est un faisceau que nous noterons $\mathfrak{F}(m, n)$ car il dépend non seulement de n, mais aussi de l'entier m choisi. On peut également définir directement $\mathfrak{F}(m; n)$ par le procédé suivant:

Soit V_i l'ensemble des points $x \in X$ tels que $F_i(x) \neq 0$; les V_i sont des ouverts saturés de X qui recouvrent X (cf. Exposé 15); soit $U_i = \pi(V_i)$; les U_i, $0 \leq i \leq r$, forment un recouvrement ouvert de $Y = X/G$. Soit maintenant ${}^i\mathfrak{F}$ la restriction du faisceau $\mathfrak{F}$ à l'ouvert U_i, et soit m^n_{ij}: ${}^i\mathfrak{F} \to {}^j\mathfrak{F}$ l'isomorphisme donné par la multiplication par F^n_i/F^n_j au dessus de $U_i \cap U_j$. Le faisceau obtenu à partir des faisceaux ${}^i\mathfrak{F}$ par recollement au moyen des isomorphismes m^n_{ij} n'est autre que $\mathfrak{F}(m; n)$, comme on le voit tout de suite.

Sous cette forme on voit que $\mathfrak{F}(m; n)$ est un faisceau cohérent sur Y, et il est bien évident que ce faisceau dépend de m.

On peut appliquer ce qui précède au faisceau $\mathfrak{A}_p$, $p \in \mathbf{Z}$. On a:

<u>Théorème 3</u>. <u>Le faisceau</u> $\mathfrak{A}_p(m; n)$ <u>est isomorphe à</u> $\mathfrak{A}_{p+nm}$.

L'isomorphisme est défini ainsi: soit f une section de $\mathfrak{A}_{p+nm}$ sur un ouvert $U \subset Y$, c'est-à-dire une fonction automorphe de poids p+nm sur $\pi^{-1}(U)$; posons $f_i = f/F_i^n$, qui est une fonction automorphe de poids p sur $\pi^{-1}(U \cap U_i)$, c'est-à-dire une section de $\mathfrak{A}_p$ sur $U \cap U_i$; comme $f_j = (F_i/F_j)^n \cdot f_i$ sur $U \cap U_i \cap U_j$, le système des (f_i) est une section de $\mathfrak{A}_p(m; n)$ sur U. On vérifie immédiatement que l'on a bien défini ainsi un isomorphisme θ: $\mathfrak{A}_{p+nm} \to \mathfrak{A}_p(m; n)$.

<u>Corollaire</u>. $H^i(Y, \mathfrak{A}_n) = 0$ <u>pour</u> $i > 0$ <u>et</u> n <u>assez grand</u>.

Cela résulte immédiatement du Théorème B de l'Exposé 18, No. 7, appliqué aux faisceaux $\mathfrak{A}_p$, $1 \leq p \leq m$.

<u>Remarque</u>. Il est très possible que l'on ait, en fait, $H^i(Y, \mathfrak{A}_n) = 0$ pour $i > 0$ dès que $n \geq 2$; c'est en tout cas ce qui se passe dans le cas d'une variable (cf. Exposé 4) et, d'après Kodaira, dans le cas où G opère sans points fixes sur X. Malheureusement, la méthode suivie ici ne semble pas pouvoir donner un résultat aussi précis.

10. <u>Première application du Théorème 3</u>.

Les notations étant toujours celles du No. 8, soit $\mathfrak{A}_{p-m}^{r+1}$ le faisceau somme directe de r+1 faisceaux isomorphes au faisceau $\mathfrak{A}_{p-m}$, p étant un entier quelconque.

Une section de $\mathfrak{A}_{p-m}^{r+1}$ sur un ouvert $U \subset Y$ est donc un système de r+1 fonctions automorphes de poids p-m sur $\pi^{-1}(U)$, soient $f_0, \dots, f_r$. Posons:

$$\rho(f_0, \dots, f_r) = \sum_{i=0}^{i=r} f_i \cdot F_i ;$$

on obtient ainsi une section de $\mathfrak{A}_p$ au-dessus de U (c'est-à-dire une fonction automorphe de poids p sur $\pi^{-1}(U)$).

On a ainsi défini un homomorphisme ρ du faisceau $\mathcal{O}^{r+1}_{p-m}$ dans le faisceau $\mathcal{O}_p$, homomorphisme qui est <u>analytique</u>. Il est de plus surjectif, du fait que les U_i recouvrent Y.

L'homomorphisme ρ définit des homomorphismes, que nous noterons encore ρ, de $\mathcal{O}^{r+1}_{p-m}(m; n)$ sur $\mathcal{O}_p(m; n)$ ($n \in \mathbf{Z}$ quelconque); si l'on désigne par θ l'isomorphisme $\mathcal{O}_{p+nm} \to \mathcal{O}_p(m; n)$ du Théorème 3, on vérifie sans difficulté que $\rho \circ \theta = \theta \circ \rho$.

Or, on a le lemme suivant:

<u>Lemme 2</u>. <u>Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux faisceaux analytiques cohérents sur $P_r(\mathbf{C})$, et soit ρ un homomorphisme analytique de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{G}$. Pour tout n assez grand, l'homomorphisme</u>

$$\rho: \quad H^0(P_r(\mathbf{C}), \mathcal{F}(n)) \to H^0(P_r(\mathbf{C}), \mathcal{G}(n)),$$

<u>défini par ρ, est surjectif</u>.

(Si $\mathcal{J}$ désigne le noyau de ρ, le lemme résulte de ce que $H^1(P_r(\mathbf{C}), \mathcal{J}(n)) = 0$ pour n assez grand, d'après le Théorème B.)

En appliquant le Lemme 2 à $\mathcal{F} = \mathcal{O}^{r+1}_{p-m}$ et $\mathcal{G} = \mathcal{O}_p$, et tenant compte de ce que $\rho \circ \theta = \theta \circ \rho$, on voit que

$$\rho: \quad H^0(Y, \mathcal{O}^{r+1}_{p+(n-1)m}) \to H^0(Y, \mathcal{O}_{p+nm})$$

est surjectif, pour n assez grand. En d'autres termes:

<u>Théorème 4</u>. <u>Il existe un entier n_0 tel que toute forme automorphe f de poids $\geq n_0$ puisse s'écrire $f = \sum_{i=0}^{i=r} f_i \cdot F_i$, les f_i étant des formes automorphes</u>.

Autrement dit, toute forme automorphe de poids assez grand appartient à l'idéal engendré par les séries de Poincaré de poids m. D'où (cf. Exposé 1, Prop. 1):

<u>Corollaire 1</u>. <u>Toute forme automorphe de poids assez grand est une série de Poincaré</u>.

Le Théorème 4 entraîne évidemment:

Corollaire 2. <u>L'algèbre graduée M des formes automorphes est un module de type fini sur l'algèbre des polynômes en les</u> F_i.

(On peut prendre pour générateurs de ce module une base de l'espace vectoriel des formes de poids $< n_0$.)

Corollaire 3. <u>L'algèbre M est engendrée par un nombre fini d'éléments</u>.

D'où:

Corollaire 4. <u>Tout idéal de M a un nombre fini de générateurs</u>.

(Dans le cas de 2 variables, ces résultats sont dûs à Hervé, Annales E.N.S., <u>69</u>, 1952, p. 277-302.)

11. Complément.

Les résultats du No. précédent peuvent être étendus à des faisceaux cohérents quelconques.

De façon plus précise, soit $\mathfrak{F}$ un faisceau analytique cohérent sur l'espace projectif complexe $P_r(\mathbf{C})$; le raisonnement du Théorème 4 montre que, si n est assez grand, toute section f de $\mathfrak{F}(n)$ peut s'écrire $f = \Sigma_{i=0}^{i=r} f_i \cdot z_i$, où les f_i sont des sections de $\mathfrak{F}(n-1)$. Il s'ensuit que $\Sigma_{n=n_0}^{\infty} H^0(P_r(\mathbf{C}), \mathfrak{F}(n))$ est un module gradué de type fini sur l'algèbre de polynômes $S = \mathbf{C}[z_0, \ldots, z_r]$. On a ainsi attaché à tout faisceau cohérent $\mathfrak{F}$ un S-module gradué de type fini qui le caractérise (comme il résulte tout de suite des Théorèmes A et B); ceci généralise la correspondance entre faisceaux cohérents d'idéaux et idéaux homogènes de polynômes rencontrée dans l'Exposé 19.

12. Dimension de l'espace des formes automorphes de poids n.

Si $\mathfrak{F}$ est un faisceau analytique cohérent sur Y, nous poserons $h^q(Y, \mathfrak{F}) = \dim \cdot H^q(Y, \mathfrak{F})$, et:

$$\chi(Y, \mathfrak{F}) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i h^i(Y, \mathfrak{F}) ,$$

somme qui est en réalité <u>finie</u>. Si $0 \to \mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \to \mathfrak{C} \to 0$ est une suite exacte de faisceaux cohérents, la suite exacte de cohomologie montre que $\chi(\mathcal{B}) = \chi(\mathcal{A}) + \chi(\mathcal{C})$. On en déduit que, plus généralement, si l'on a une suite exacte de faisceaux cohérents:

$$0 \to \mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}_1 \to \cdots \to \mathcal{C}_h \to 0 ,$$

on a:

$$\chi(Y, \mathcal{C}_0) - \chi(Y, \mathcal{C}_1) + \cdots + (-1)^h \chi(Y, \mathcal{C}_h) = 0$$

Mêmes notations et mêmes résultats si l'on a un faisceau cohérent $\mathfrak{F}$ non plus sur Y, mais sur $P_r(\mathbf{C})$.

Proposition 4. *Si $\mathfrak{F}$ est un faisceau analytique cohérent sur $P_r(\mathbf{C})$, $\chi(P_r(\mathbf{C}), \mathfrak{F}(n))$ est un polynôme en n, de degré $\leq r$.*

On raisonne par récurrence sur $r = \dim \cdot P_r(\mathbf{C})$, le résultat étant évident pour $r = 0$; utilisant la suite exacte de l'Exposé 19, p. 2, on voit que

$$\Delta\chi(P_r(\mathbf{C}), \mathfrak{F}(n)) = \chi(P_r(\mathbf{C}), \mathfrak{F}(n)) - \chi(P_r(\mathbf{C}), \mathfrak{F}(n-1))$$
$$= \chi(P_{r-1}(\mathbf{C}), \mathfrak{G}(n)) - \chi(P_{r-1}(\mathbf{C}), \mathfrak{H}(n)),$$

d'où le résultat, grâce à l'hypothèse de récurrence.

Corollaire. *Pour n assez grand, $h^0(P_r(\mathbf{C}), \mathfrak{F}(n))$ est un polynôme en n de degré $\leq r$.*

En effet, il résulte du Théorème B que $h^0(P_r(\mathbf{C}), \mathfrak{F}(n))$ est égal à $\chi(P_r(\mathbf{C}), \mathfrak{F}(n))$ pour n assez grand.

On tire tout de suite de la Proposition 4:

Proposition 5. *Si $\mathfrak{F}$ est un faisceau analytique cohérent sur Y, $\chi(Y, \mathfrak{F}(m; n))$ est un polynôme en n (m étant fixé).*

Corollaire. *Pour n assez grand, $h^0(Y, \mathfrak{F}(m; n))$ est un polynôme en n.*

(Il serait facile de montrer que ce polynôme est de degré $\leq s = \dim \cdot Y$.)

Nous allons maintenant appliquer la Proposition 5 et son corollaire aux faisceaux $\mathcal{A}_p$.

Nous noterons d_p la dimension de l'espace vectoriel des formes automorphes de poids p; on a évidemment $d_p = h^0(Y, \mathcal{A}_p)$. Remarquons que $d_0 = 1$ (toute forme automorphe de poids 0 est constante, comme il résulte tout de suite du principe du maximum et de la compacité de Y), et que $d_p = 0$ pour $p < 0$ (car s'il y avait une forme automorphe de dimension < 0 non identiquement nulle, en multipliant une de ses puissances par une forme automorphe de poids opposé, on trouverait une forme automorphe de poids 0 non constante).

Nous poserons $\chi(p) = \chi(Y, \mathcal{A}_p)$. D'après le Corollaire au Théorème 3, on a $\chi(p) = d_p$ pour p assez grand. D'après la Proposition 5 jointe au Théorème 3, $\chi(p+nm)$ est un <u>polynôme</u> en n, pour p et m fixés (m vérifiant toujours les hypothèses du No. 8). Nous allons préciser ce résultat:

<u>Théorème 5</u>. <u>Il existe des polynômes</u> $P_1, \ldots, P_q$ <u>vérifiant les propriétés suivantes</u>:

a) $\chi(n) = P_i(n)$ si $n \equiv i \bmod q$,

b) <u>Les polynômes</u> P_i <u>sont de degré</u> $s = \dim \cdot Y$, <u>et ont même terme de plus haut degré</u> $a \cdot n^s/s!$,

c) <u>Le coefficient</u> a <u>est égal à</u> $\deg \varphi_m(Y)/m^s$, <u>où</u> $\deg \varphi_m(Y)$ <u>désigne le degré de la variété projective</u> $\varphi_m(Y) \subset P_r(\mathbf{C})$.

(Pour la signification de l'entier q, cf. No. 8.)

L'assertion a) peut encore s'écrire:

$$\chi(n) = a \cdot n^s/s! + a_1 \cdot n^{s-1} + \cdots + a_s ,$$

où, d'après a) et b), les $a_1, \ldots, a_s$ ne dépendent que de la classe de n mod q.

On notera que la formule précédente est valable pour <u>tout</u> n (positif ou négatif); mais pour n assez grand, $\chi(n)$ est égal à d_n; d'où:

<u>Corollaire</u>. $d_n = a \cdot n^s/s! + a_1 \cdot n^{s-1} + \cdots + a_s$ <u>pour</u> n <u>assez grand</u>.

<u>Remarques</u>.

1) Pour calculer deg $\varphi_m(Y)$ on peut procéder ainsi: on prend s combinaisons linéaires génériques de $F_0, \ldots, F_r$, soient $G_1, \ldots, G_s$, et on compte (mod$\cdot$G) le nombre de points communs aux sous-ensembles $G_1 = 0, \ldots, G_s = 0$ du domaine X.

2) Il est facile de donner des exemples où $a_1, \ldots, a_s$ dépendent effectivement de la classe de n mod q: il suffit de faire des produits directs d'exemples à 1 variable.

3) Pour $s = 2$, le Théorème 5 est dû a Hervé (loc. cit.).

13. <u>Démonstration du Théorème 5</u>.

Soit m un multiple de q suffisamment grand (cf. No. 8); on a vu plus haut que $\chi(p+nm)$ est alors un polynôme en n (dépendant de p); appliquant ceci pour $p = 1, \ldots, m$, on voit qu'il existe m polynômes $P_1, \ldots, P_m$ tels que $\chi(n) = P_i(n)$ si $n \equiv i \bmod m$. L'assertion a) du Théorème 5 équivaut à dire que $P_i = P_j$ si $i \equiv j \bmod q$.

Soit m' un autre multiple de q, suffisamment grand, et tel que pgcd$(m, m') = q$; nous pouvons recommencer avec m' ce que nous venons de faire avec m, et il existe donc des polynômes $P'_1, \ldots, P'_m$ tels que $\chi(n) = P'_i(n)$ si $n \equiv i \bmod m'$. Supposons que i et i' soient congrus mod q; puisque pgcd$(m, m') = q$, il existe une infinité d'entiers qui sont à la fois congrus à i mod m et à i' mod m'; si n est un tel entier, on a $P_i(n) = \chi(n) = P'_{i'}(n)$, ce qui montre que les polynômes P_i et $P'_{i'}$ sont identiques. Si maintenant $j \equiv i \bmod q$, on a de même $P_j = P'_{i'}$, d'où $P_i = P_j$, ce qui achève de démontrer l'assertion a).

Montrons maintenant que deux polynômes P_i et P_j ont même terme de plus haut degré. Choisissons une forme automorphe f, non identiquement nulle, et de poids h congru à $j - i$ mod q (une telle forme existe, cf. Exposé 1). Si g est une forme automorphe de poids n congru à i mod q,

$f \cdot g$ sera une forme automorphe de poids $n + h$ qui est congru à j mod q. D'où $d_{n+h} \geq d_n$, ce qui montre que

$$P_j(n+h) \geq P_i(n) \quad \text{pour } n \text{ assez grand et congru à } i \text{ mod } q.$$

Ceci entraîne évidemment (en faisant tendre n vers $+\infty$) que le terme de plus haut degré de P_i est inférieur à celui de P_j, d'où, en permutant i et j, l'égalité de ces termes.

Pour étudier le terme de plus haut degré des polynômes P_i, on peut donc se borner au cas où $i = q$. Si m est un multiple de q vérifiant les hypothèses du No. 8, on a $d_{nm} = P_q(nm)$ pour n assez grand. Or, on a le résultat suivant:

<u>Lemme 3</u>. <u>Si</u> n <u>est assez grand, toute forme automorphe de poids</u> nm <u>est un polynôme en les</u> F_i.

<u>Démonstration</u>: D'après le Théorème 3, $\mathcal{A}_{nm}$ est isomorphe à $\mathcal{A}_0(m; n)$. or $\mathcal{A}_0$ n'est pas autre chose que le faisceau $\mathcal{O}$ des germes de fonctions holomorphes sur Y. Vu que φ_m est un plongement de Y dans $P_r(\mathbf{C})$, le faisceau $\mathcal{O}$ est un quotient du faisceau $\mathcal{O}(P_r(\mathbf{C}))$, soit $\mathcal{O}_1$. Appliquant alors le Lemme 2 à $\mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}$, on voit que toute section de $\mathcal{A}_0(m; n)$ est image d'une section de $\mathcal{O}_1(n)$, si n est assez grand; ceci signifie exactement que toute forme automorphe de poids nm est un polynôme homogène de degré n en les F_i.

(Ce raisonnement montre, plus généralement, que la série linéaire découpée sur une variété normale par les formes de degré n assez grand est complète—résultat bien connu.)

Le Lemme 3 montre que, pour n assez grand, $P_q(nm)$ est égal à la dimension de l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré n en les F_i. Si $\mathfrak{a}_m$ désigne l'idéal homogène de $\mathbf{C}[X_0, \ldots, X_r]$ formé des polynômes P tels que $P(F_0, \ldots, F_r) = 0$, et si $\chi_{\mathfrak{a}_m}(n)$ désigne le polynôme caractéristique de Hilbert de cet idéal, on a donc:

$$P_q(nm) = \chi_{\mathfrak{a}_m}(n) \quad \underline{\text{pour}}\ n\ \underline{\text{assez grand}}.$$

Or l'idéal $\mathfrak{a}_m$ n'est pas autre chose que l'idéal de la variété $\varphi_m(Y) \subset P_r(\mathbf{C})$; d'après un résultat classique (et élémentaire), son terme de plus haut degré est égal à $\deg \varphi_m(Y) \cdot n^s/s!$, ce qui achève de démontrer les assertions b) et c) du Théorème 5.

14. Compléments divers.

1) On trouvera dans l'article d'Hervé des résultats analogues aux précédents, relatifs à des idéaux de fonctions automorphes. Il serait facile de les retrouver par la méthode suivie ici.

2) Il est possible de déduire le Théorème 5 de résultats généraux sur les faisceaux cohérents, qui précisent la Proposition 4. On définit la dimension s, et le degré d d'un faisceau analytique cohérent $\mathfrak{F}$ sur $P_r(\mathbf{C})$, et l'on montre (en reprenant la démonstration de la Prop. 4) que $\chi(P_r(\mathbf{C}), \mathfrak{F}(n))$ est un polynôme en n dont le terme de plus haut degré est égal à $d \cdot n^s/s!$.

3) Les faisceaux $\mathcal{A}_p$ sont en rapport étroit avec certains diviseurs de la variété Y. Bornons-nous au cas où G opère sans points fixes sur X, de telle sorte que Y soit une variété sans singularités. Si D est un diviseur sur Y, notons $\mathfrak{L}(D)$ le faisceau défini ainsi: un élément de $\mathfrak{L}(D)_y$, $y \in Y$, est un germe de fonction méromorphe au voisinage de y, soit f, tel que $(f) \geq -D$ au voisinage de y; le faisceau $\mathfrak{L}(D)$ est localement isomorphe à $\mathcal{O}$, donc en particulier cohérent. Soit d'autre part K un diviseur "canonique," c'est-à-dire le diviseur d'une forme différentielle méromorphe de degré s sur Y. Le raisonnement de l'Exposé 4 donne alors:

Proposition 6. *Le faisceau $\mathcal{A}_p$ est isomorphe au faisceau $\mathfrak{L}(pK)$.*

D'où notamment $\chi(k) = \chi(Y, \mathfrak{L}(kK))$; appliquant alors à la variété algébrique Y les résultats connus sur les $\chi(Y, \mathfrak{L}(D))$, on obtient sur $\chi(k)$ des renseignements sensiblement plus précis que ceux donnés par le Théorème 5. Par exemple, le "théorème de dualité" donne:

Corollaire. $\chi(1-k) = (-1)^s \chi(k)$.

En outre, les résultats récents de Hirzebruch permettent d'exprimer les coefficients du polynôme $\chi(n)$ à partir des "classes canoniques" de la variété Y.

Lorsque l'on ne suppose plus que G opère sans points fixes, il faut introduire une notion de "ramification" pour les diviseurs de Y, et l'on peut alors obtenir une proposition analogue à la Proposition 6. Nous n'insisterons pas là-dessus.

§III. Formes E-automorphes.

15. Sous-ensembles analytiques stables par G.

Revenons aux hypothèses du No. 1: soit X une variété analytique complexe de dimension s, et soit G un groupe d'automorphismes de X vérifiant les hypothèses (I) et (II). Considérons un sous-ensemble analytique E de X, stable par G.

Proposition 7. *L'ensemble E/G est un sous-ensemble analytique de Y = X/G.*

La question étant locale, nous pouvons supposer que le groupe G est fini, et que E est défini par l'annulation d'un nombre fini de fonctions holomorphes $f_1, \ldots, f_k$. Pour tout $g \in G$, soit f_i^g la fonction définie par:

$$f_i^g(x) = f_i(g \cdot x) \qquad 1 \leq i \leq k.$$

Soit r l'ordre de G; pour chaque indice i, soient $F_i^1, \ldots, F_i^r$, les fonctions symétriques élémentaires des r fonctions f_i^g, $g \in G$. On a donc:

$$F_i^1 = \sum_{g \in G} f_i^g, \ldots, F_i^r = \prod_{g \in G} f_i^g .$$

Les fonctions F_i^j sont invariantes par G, donc peuvent être considérées comme des fonctions holomorphes sur Y = X/G. La Proposition 7 est donc une conséquence du lemme suivant:

Lemme 4. *E/G est défini par l'annulation des fonctions* F_i^j, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq r$.

Il est clair que les F_i^j s'annulent sur E; inversement, soit $x \in E$ tel que $F_i^j(x) = 0$ quels que soient i et j; ces équations entraînent $f_i(x) = 0$ pour tout i, d'où $x \in E$, cqfd.

Corollaire. *Le faisceau d'idéaux défini par E/G dans Y est cohérent.*

16. Formes E-automorphes.

Par une fonction holomorphe sur E nous entendrons une fonction continue à valeurs complexes sur E qui peut localement se prolonger en une fonction holomorphe sur X; c'est donc une section du faisceau quotient du faisceau $\mathcal{O}(X)$ par le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}(E)$ défini par E.

Donnons-nous d'autre part un facteur d'automorphie $g \to J_g$ sur X. Une fonction f, holomorphe sur E, sera dite E-*automorphe* (relativement à J, ou encore E-J-automorphe) si elle vérifie la relation

(*) $$f(g \cdot x) = J_g(x) \cdot f(x) \quad \text{\underline{pour tout}} \quad x \in E.$$

(Cette notion est due à Hervé.)

On peut également définir le *faisceau* des germes de formes E-automorphes: si U est un ouvert de $Y = X/G$, on désigne par $\mathcal{A}(J; E)_U$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur $E \cap \pi^{-1}(U)$ qui vérifient la relation (*) pour tout $x \in E \cap \pi^{-1}(U)$; à partir des $\mathcal{A}(J; E)_U$ on définit le faisceau $\mathcal{A}(J; E)$ à la manière habituelle. C'est un faisceau analytique sur l'espace Y, nul en dehors de E/G.

Théorème 6. *Le faisceau analytique* $\mathcal{A}(J; E)$ *est un faisceau analytique cohérent sur l'espace* Y.

Avant de démontrer le Théorème 6, remarquons que toute forme automorphe vis-à-vis de J (au sens usuel) définit par restriction à E une forme E-automorphe. D'où un homomorphisme de faisceaux

$$\sigma : \mathcal{A}(J) \to \mathcal{A}(J; E) \quad .$$

Il est clair que σ est un homomorphisme analytique.

Proposition 8. L'homomorphisme σ est surjectif.

La question étant locale, nous pouvons supposer G fini, d'ordre n. Si l'on a $f \in \mathfrak{A}(J;\, E)_y$, $y \in Y$, il existe une fonction f_1, holomorphe au voisinage de $\pi^{-1}(y)$, et qui induit f sur E (cela résulte simplement du fait que f est holomorphe sur E). La fonction:

$$L(f_1) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} J_g(x)^{-1} f_1(g \cdot x)$$

appartient alors à $\mathfrak{A}(J)_y$, et induit f sur E, cqfd.

Corollaire 1. Le faisceau $\mathfrak{A}(J;\, E)$ est engendré localement par un nombre fini de ses sections.

En effet, la faisceau $\mathfrak{A}(J)$ possède cette propriété d'après le Théorème 1.

La Proposition 8 a une autre conséquence intéressante: prenons pour facteur d'automorphie $J_g = 1$ quel que soit g; le faisceau $\mathfrak{A}(J)$ est alors le faisceau $\mathcal{O}$ des germes de fonctions holomorphes sur Y, et le faisceau $\mathfrak{A}(J;\, E)$ est le faisceau des fonctions holomorphes sur E qui sont invariantes par G, autrement dit, c'est le faisceau $\mathcal{O}(E/G)$ des germes de fonctions holomorphes sur E/G. Le fait que σ: $\mathcal{O} \to \mathcal{O}(E/G)$ soit surjectif signifie alors que le plongement $E/G \to Y = X/G$ transforme le faisceau $\mathcal{O}(E/G)$ en le faisceau induit par $\mathcal{O}$ sur E/G; en particulier, puisque E/G est analytique (Prop. 7), on a:

Corollaire 2. Le faisceau $\mathcal{O}(E/G)$ est cohérent sur Y.

17. Démonstration du Théorème 6 (fin).

Vu le Corollaire 1 de la Proposition 8, il nous reste seulement à démontrer que les relations entre un certain nombre de sections $f_1, \ldots, f_n$ de $\mathfrak{A}(J;\, E)$ forment un faisceau cohérent (c'est-à-dire sont engendrées localement par un nombre fini d'entre elles). Nous suivrons la même méthode qu'au No. 6.

Nous supposons que les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ sont holomorphes dans un voisinage ouvert d'un point donné x_0. En remplaçant X par $V(x_0)$, on peut supposer que le groupe G est fini d'ordre r, laisse le point x_0 fixe, et que $f_1, \ldots, f_n$ sont holomorphes dans E tout entier. Nous voulons étudier le faisceau des relations entre les f_i au voisinage de x_0.

Soit $E = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k$ la décomposition de E en sous-ensembles analytiques irréductibles au voisinage de x_0. Soit K l'ensemble des indices i, $1 \leq i \leq k$, tels qu'il existe au moins une des fonctions $f_1, \ldots, f_n$ qui ne soit pas identiquement nulle sur E_i; il existe des scalaires $a_1, \ldots, a_n$ tels que $a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n$ ne s'annule identiquement sur aucun des E_i, $i \in K$ (il suffit de choisir les a_i en dehors d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels de $\mathbf{C}^n$). Posons $f_0 = a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n$; c'est encore une fonction E-automorphe relativement à J. Soit H la fonction définie par la formule:

$$H(x) = \prod_{h \in G, h \neq e} f_0(h \cdot x) .$$

La fonction H est holomorphe sur E, et on vérifie facilement qu'elle est J^{-1}-automorphe sur E. En outre, sa restriction à E_i, $i \in K$, n'est pas identiquement nulle; car sinon, il y aurait $h \in G$ tel que $f_0(h \cdot x)$ soit identiquement nulle pour $x \in E_i$, d'où f_0 identiquement nulle pour $x \in h^{-1} \cdot E_i = E_j$, d'où $f_1, \ldots, f_n$ identiquement nulles sur E_j, donc aussi sur E_i, contrairement à la definition de K.

Désignons maintenant par $g_1, \ldots, g_n$ les fonctions $f_1 \cdot H, \ldots, f_n \cdot H$. Ce sont des fonctions holomorphes sur E et invariantes par G, autrement dit des sections du faisceau $\mathcal{O}(E/G)$.

Toute relation:

(1) $h_1 \cdot f_1 + \cdots + h_n \cdot f_n = 0$,

où les h_i appartiennent à $\mathcal{O}_y$, entraîne la relation:

(2) $h_1 \cdot g_1 + \cdots + h_n \cdot g_n = 0$.

La réciproque est vraie: la relation (2) peut en effet s'écrire:

(3) $[h_1 \cdot f_1 + \cdots + h_n \cdot f_n] \cdot H = 0$.

D'après un résultat connu (cf. Séminaire 51-52, Exposés 14 (page 5) et 16) la relation (3) entraîne que $h_1 \cdot f_1 + \cdots + h_n \cdot f_n$ est nul sur E_i pour $i \in K$ (tout au moins pour y assez voisin de $\pi(x_0)$); d'autre part $h_1 \cdot f_1 + \cdots + h_n \cdot f_n$ est évidemment nul sur E_i si $i \notin K$. Donc (3) $\Longrightarrow$ (1), ce qui montre bien que (1) et (2) sont équivalents.

Mais, d'après le Corollaire 2 à la Proposition 8, le faisceau $\mathcal{O}(E/G)$ est cohérent. Donc le faisceau des relations entre les g_i est cohérent, et comme nous venons de voir qu'il coïncide avec le faisceau des relations entre les f_i, la démonstration du Théorème 6 est achevée.

18. Application au cas d'un domaine borné.

Faisons maintenant sur X, G, J les hypothèses du No. 8: X est un domaine borné de $\mathbf{C}^s$, $Y = X/G$ est compact, J_g est le jacobien en x de l'automorphisme $x \to g \cdot x$.

Nous noterons $\mathcal{A}_k(E)$ le faisceau $\mathcal{A}(J^{-k}; E)$.

Théorème 7. *Le faisceau* $\mathcal{A}_p(E)(m; n)$ *est isomorphe à* $\mathcal{A}_{p+nm}(E)$.

Ce théorème se démontre exactement comme le Théorème 3.

Corollaire. *Toute forme E-automorphe de poids assez grand est la restriction à E d'une forme automorphe sur X.*

Appliquant le Lemme 2 à l'homomorphisme surjectif $\mathcal{A}_p \to \mathcal{A}_p(E)$, on voit que $H^0(Y, \mathcal{A}_p(m; n)) \to H^0(Y, \mathcal{A}_p(E)(m; n)) = H^0(E, \mathcal{A}_p(E)(m; n))$ est surjectif pour n assez grand. Compte tenu des Théorèmes 3 et 7 (et d'une relation de commutation évidente), ceci signifie que $H^0(Y, \mathcal{A}_{p+mn}) \to H^0(E, \mathcal{A}_{p+mn}(E))$ est surjectif pour n assez grand, d'où le corollaire.

Note. Le résultat précédent avait été obtenu par Hervé (Comptes Rendus, 234, 1952, p. 41-43) lorsque X est le produit direct de deux disques et que E vérifie certaines hypothèses particulières.