J-P. SERRE

Les espaces $K(\pi, n)$

Séminaire Henri Cartan, tome 7, nº 1 (1954-1955), exp. nº 1, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1954-1955__7_1_A1_0>

LES ESPACES $K(\Pi,n)$

(Exposé de J-P. SERRE, 10.11.1954).

Dans cet exposé, nous allons indiquer les principales propriétés des espaces $K(\Pi,n)$, introduits par Eilenberg-MacLane [4] ; nous nous placerons à un point de vue purement "topologique" (cf. [20], [15], [17]) . Le point de vue "algébrique" (cf. [4], [5], [1]) fera l'objet des exposés suivants .

1. Rappel .

Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue d'un espace X dans un espace Y . Le "mapping-cylinder" X_f de f est défini ainsi : si Z désigne l'espace somme de Y et de $X \times I$ ($I = [0,1]$), X_f est l'espace obtenu à partir de Z en identifiant $(x,1)$ avec $f(x)$ pour tout $x \in X$.
L'espace X_f contient X et Y , et Y est un rétracte de déformation de X_f ; de plus l'application composée : $X \rightarrow X_f \rightarrow Y$ est égale à f . Si l'on convient d'identifier X_f et Y (ce qui est naturel, vu qu'ils ont même type d'homotopie), on voit que f se trouve ainsi identifiée à l'homéomorphisme de X dans X_f .

A titre d'application, supposons que les homomorphismes

$$f_o : \pi_i(X) \rightarrow \pi_i(Y)$$

définis par f soient bijectifs pour tout i ; on en conclut que $\pi_i(X_f,X) = 0$ pour tout i, d'où, par un raisonnement élémentaire de déformation, $H_i(X_f,X) = 0$ pour tout i , ce qui montre que

$$f_* : H_i(X) \rightarrow H_i(Y)$$

est bijectif pour tout i .

De façon analogue, toute application continue peut être remplacée par une projection d'espace fibré . D'après ce qui précède, on peut se borner à le montrer pour une injection $X \rightarrow Y$. Soit alors X' l'espace des chemins de Y dont l'origine appartient à X ; l'espace X est un rétracte de déformation de X' ; l'application π qui fait correspondre à tout chemin de Y son extrémité fait de X' un espace fibré de base Y (au sens de [15]), et l'application composée $X \rightarrow X' \xrightarrow{\pi} Y$ n'est autre que l'injection de X dans Y . Si, comme précédemment, on identifie X avec X' , on voit que l'injection de X dans Y est remplacée par la projection $\pi : X' \rightarrow Y$.

Ces deux procédés sont souvent utilisés dans les questions relatives aux groupes d'homotopie. Cf. notamment [9], [10], [16].

2 . Les espaces $K(\Pi, n)$ - définition et construction .

Soit n un entier ≥ 1, et soit Π un groupe, supposé abélien si $n \geq 2$. Un espace X est appelé un espace $K(\Pi, n)$ si l'on a :

$$\begin{cases} \pi_i(X) = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq n \\ \pi_n(X) = \Pi \ . \end{cases}$$

En particulier, $\pi_0(X) = 0$, ce qui signifie que X est connexe par arcs.

Exemples . Le cercle S_1 est un espace $K(Z,1)$; le tore T^n est un espace $K(Z^n,1)$; plus généralement, si X est un espace $K(\Pi, n)$, et X' un espace $K(\Pi', n)$, il est clair que $X \times X'$ est un espace $K(\Pi \times \Pi', n)$.

L'espace projectif réel de dimension infinie, $P_{\infty}(R)$, est un espace $K(Z_2,1)$; de même, un espace lenticulaire de dimension infinie est un espace $K(Z_p,1)$.

L'espace projectif complexe de dimension infinie, $P_{\infty}(C)$, est un espace $K(Z,2)$.

Construction d'espaces $K(\Pi, n)$. Donnons-nous n et Π (abélien, si $n \geq 2$). Le procédé décrit dans [22] permet de construire un complexe cellulaire qui soit un espace $K(\Pi, n)$: on définit par récurrence le q-squelette K_q de ce complexe, de la façon suivante :

pour $q < n$, K_q est réduit à un point x_0.

K_n s'obtient en attachant à x_0 des cellules de dimension n, correspondant chacune à un générateur de groupe Π.

K_{n+1} s'obtient en attachant à K_n des cellules de dimension $n+1$, de telle sorte que leurs bords fournissant les relations nécessaires entre les générateurs précédents.

...

K_{q+1}, $q > n$, s'obtient en attachant à K_q des cellules de dimension $q+1$, de telle sorte que leurs bords engendrent le groupe $\pi_q(K_q)$.

On constate alors que $\pi_i(K_q) = 0$ pour $i < q$, et $i \neq n$, tandis que, si $q \geq n+1$, on a $\pi_n(K_q) = \Pi$. Le complexe K, réunion des K_q, est donc bien un espace $K(\Pi, n)$.

De plus, si Π est un groupe abélien de type fini, on peut faire en sorte que les K_q soient des complexes finis (cf. [18],p.36-37) : on raisonne par récurrence sur q ; si K_q est un complexe fini, $\pi_q(K_q)$ est un groupe de type fini ; ([15] ,p.491 , ou [16] , p.271-274) , donc K_{q+1} peut être obtenu en attachant à K_q un nombre fini de cellules.

3 . Espaces $K(\Pi,n)$ et classes de cohomologie .

A partir de maintenant, nous nous bornerons au cas où Π est un groupe abélien (ce n'est une restriction que si $n = 1$). Si Y est un espace $K(\Pi,n)$, on a alors $H_n(Y) = \Pi$ et $H_{n-1}(Y) = 0$, ce qui montre que $H^n(Y,G) \approx \mathrm{Hom}(\Pi,G)$; en particulier, le groupe $H^n(Y,\Pi)$ contient une classe fondamentale ι , correspondant à l'application identique de Π sur Π .

Soit $f : X \to Y$ une application continue d'un espace X dans l'espace Y ; l'élément $f^*(\iota)$ est un élément bien déterminé de $H^n(X,\Pi)$, qui ne dépend que de la classe d'homotopie de f .

Théorème - Si X est un complexe cellulaire, l'application $f \to f^*(\iota)$ met en correspondance biunivoque les classes d'homotopie des applications de X dans Y et les éléments de $H^n(X,\Pi)$.

(Cf. [5] , Note IV, [6] , III, ainsi que [17]) .

Le théorème précédent est une simple conséquence de la théorie des obstructions de S. Eilenberg : par exemple, pour montrer qu'il existe une application $f : X \to Y$ telle que $f^*(\iota)$ soit une classe de cohomologie donnée $x \in H^n(X,\Pi)$, on commence par définir f sur le $n+1$-squelette de X (ce qui est toujours possible, comme on sait) , puis on prolonge f aux squelettes successifs en utilisant le fait que les $\pi_i(Y)$ sont nuls pour $i > n$. On procède de la même façon pour construire une homotopie entre deux applications f et g telles que $f^*(\iota) = g^*(\iota)$.

On peut appliquer le théorème précédent au cas où X est lui-même un espace $K(\Pi,n)$: on en conclut qu'il existe une application $f : X \to Y$ telle que $f_o : \pi_n(X) \to \pi_n(Y)$ soit l'application identique de Π sur Π . D'après ce qui a été rappelé au n° 1, f induit donc un isomorphisme des groupes d'homologie de X sur ceux de l'espace Y . Donc, les groupes d'homologie d'un espace $K(\Pi,n)$ ne dépendent que de Π et de n (cf. [4]) ; on les note $H_q(\Pi,n;G)$, ce sont les groupes d'Eilenberg-MacLane . Pour $n = 1$, ils se réduisent aux groupes d'homologie du groupe Π , au sens de Hopf et Eilenberg-MacLane . Le calcul des $H_q(\Pi,n;G)$, pour n quelconque, fera l'objet des exposés suivants .

4 . Les espaces $K(\Pi,n)$, comme foncteurs de Π .

Soit X un complexe cellulaire qui soit un espace $K(\Pi,n)$, et soit Y un espace $K(\Pi',n)$. On a $H^n(X,\Pi') = \mathrm{Hom}(\Pi,\Pi')$, et le théorème du numéro précédent montre donc que les classes d'applications de X dans Y correspondent biunivoquement aux homomorphismes de Π dans Π' . En appliquant le procédé du n° 1, on peut en déduire diverses fibrations (cf. [17] ,n° 6).

Appliquons ce qui précède à l'homomorphisme $\Pi \times \Pi \to \Pi$ qui fait correspondre à tout couple (α, β) l'élément $\alpha + \beta$: si X est un complexe cellulaire qui soit un espace $K(\Pi,n)$, l'espace $X \times X$ est un espace $K(\Pi\times\Pi,n)$, et c'est aussi un complexe cellulaire (du moins si X a un nombre fini de cellules en toute dimension) ; il existe donc une application $\varepsilon : X \times X \to X$ telle que $\varepsilon_0 : \pi_n(X \times X) \to \pi_n(X)$ soit l'homomorphisme ci-dessus. D'où une structure d'<u>algèbre</u> sur $H_*(X) = \sum H_q(X)$. Si l'on note (x,y) $x.y$ l'application qui vient d'être définie (et qui est unique à une homotopie près), on voit que cette application est homotope à l'application (x,y) $y.x$ (car les deux applications ont le même effet sur π_n) ; le même raisonnement montre que $(x,y).z$ et $x.(y.z)$ sont des applications homotopes de $X\times X\times X$ dans X. Donc $H_*(\Pi,n)$ est une algèbre <u>associative</u> et <u>anticommutative</u>. On démontre de même l'existence dans X d'un "inverse à une homotopie près".

5. <u>Relations entre</u> $K(\Pi,n-1)$ <u>et</u> $K(\Pi,n)$.

Soit X un espace $K(\Pi,n)$, et soit $\Omega(X)$ l'espace des lacets sur X (ayant leur origine et leur extrémité en un point fixé de X). Puisque $\pi_i(\Omega(X)) = \pi_{i+1}(X)$, l'espace $\Omega(X)$ est un espace $K(\Pi,n-1)$. En considérant l'espace fibré E des chemins sur X d'origine fixée, on voit (cf. [15], chap. VI) qu'<u>il existe un espace fibré contractile dont la base est un</u> $K(\Pi,n)$ <u>et la fibre un</u> $K(\Pi,n-1)$.

Une telle fibration fournit des relations très précises entre $K(\Pi,n)$ et $K(\Pi,n-1)$; d'où la possibilité d'une étude des $K(\Pi,n)$ par récurrence sur n (le cas $n=1$ étant bien connu) ; c'est ainsi que, par des calculs de suites spectrales, on peut déterminer les algèbres de cohomologie $H^*(\Pi,n;R)$ et $H^*(\Pi,n;Z_2)$, cf. [15], [17]. Lorsqu'on se place au point de vue algébrique, cette fibration est remplacée par la notion de "construction" de H. Cartan [1].

Le produit de deux lacets définit une multiplication dans $\Omega(X)$, qui est un espace $K(\Pi,n-1)$; d'où une structure d'algèbre sur $H_*(\Pi,n-1)$. Cette structure <u>coïncide</u> avec celle définie au numéro précédent, comme on le voit en écrivant un diagramme (voir aussi [7]). L'espace fibré E joue, pour le "groupe" $K(\Pi,n-1)$, le rôle d'un espace fibré principal universel, dont l'espace classifiant est $K(\Pi,n)$.

6. <u>Espaces</u> $K(\Pi,n)$ <u>et opérations cohomologiques</u>.

Le théorème du n° 3 joue un rôle essentiel dans l'étude des opérations cohomologiques (cf. [6], III, ainsi que [17], paragraphe 4). Par exemple, supposons que l'on veuille prouver la formule suivante, due à Adem :

$$Sq^2\, Sq^2(x) = Sq^3 Sq^1(x) \quad \text{pour tout } x \in H^n(X,Z_2).$$

On peut supposer que X est un complexe cellulaire. Dans ce cas, d'après le n° 5, on aura $x = f^{*}(\iota)$, f étant une application continue convenable de X dans un espace $K(Z_2,n)$, et tout reviendra à démontrer que $Sq^2Sq^2(\iota) = Sq^3Sq^1(\iota)$ dans $H^{n+4}(Z_2,n;Z_2)$. On peut même éviter de vérifier cette dernière formule : supposons seulement démontré que $H^{n+4}(Z_2,n;Z_2)$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur le corps Z_2 (n étant $\geqslant 4$) ; alors les trois éléments $Sq^4(\iota)$, $Sq^3Sq^1(\iota)$, $Sq^2Sq^2(\iota)$ sont liés par au moins une relation linéaire ; mais il est facile de construire une classe de cohomologie x particulière (dans un produit d'espaces projectifs réels, par exemple) telle que $Sq^2Sq^2(x) = Sq^3Sq^1(x)$ et que $Sq^4(x)$ et $Sq^3Sq^1(x)$ soient linéairement indépendantes sur Z_2 ; il en résulte que la seule relation linéaire possible entre $Sq^4(\iota)$, $Sq^3Sq^1(\iota)$ et $Sq^2Sq^2(\iota)$ est la relation $Sq^3Sq^1(\iota) = Sq^2Sq^2(\iota)$, C.Q.F.D.

La même méthode permet de retrouver les résultats d'Adem relatifs aux puissances réduites de Steenrod (cf. [2]) ; le seul résultat que l'on utilise est la dimension de $H^q(Z_p,n;Z_p)$ sur le corps Z_p .

7 . Espaces $K(\Pi,n)$ et type d'homotopie .

Soient π_1 , ... , π_n , ... une suite de groupes, et essayons de construire un espace X dont le i-ème groupe d'homotopie soit π_i . Soit d'abord X_1 un espace $K(\pi_1,1)$. Nous allons déterminer un espace X_2 , fibré de base X_1 , et de fibre un espace $K(\pi_2,2)$; il est clair qu'un tel espace aura pour groupes d'homotopie π_1 , π_2 , 0 , ... Soit E un espace fibré contractile de base $K(\pi_2,3)$ et de fibre $K(\pi_2,2)$; si f est une application quelconque de X_1 dans $K(\pi_2,3)$, l'espace fibré image réciproque de E par f sera bien un espace fibré de base X_1 et de fibre $K(\pi_2,2)$. Si X_1 est un complexe cellulaire, nous savons que la classe d'homotopie de f correspond biunivoquement à une classe de cohomologie $k^3 \in H^3(\pi_1,1;\pi_2)$. On voit donc que, à tout élément $k^3 \in H^3(\pi_1,1;\pi_2)$, est associé un espace X_2 que nous appellerons un espace $K(\pi_1,1,\pi_2,2,k^3)$. De la même façon, toute classe de cohomologie $k^4 \in H^4(X_2,\pi_3)$ définit un espace fibré $X_3 = K(\pi_1,1,\pi_2,2,k^3,\pi_3,3,k^4)$ de base X_2 et de fibre un espace $K(\pi_3,3)$. Et ainsi de suite.

La construction précédente a été introduite, à un point de vue purement algébrique, par Postnikov ([13] , [14]) et Zilber (non publié) ; voir aussi [6] . Signalons que l'on peut démontrer que tout espace X a même type d'homotopie (au point de vue singulier) que la limite d'une suite $(X_1$, ... , X_n , ... $)$ définie comme ci-dessus ; les groupes d'homotopie π_1 , ... et les invariants k^3 , ... constituent un système complet d'invariants du type d'homotopie.

Les espaces $K(\pi_1, 1, \pi_2, k^3, \ldots)$ jouent un rôle "universel" pour les opérations cohomologiques non partout définies (par exemple les opérations introduites par Massey, et par Adem), de même que les espaces $K(\Pi, n)$ jouent un rôle universel pour les opérations cohomologiques partout définies.

8 . Autres applications des $K(\Pi, n)$.

Les espaces $K(\Pi, n)$ sont en relation étroite avec les problèmes d'obstruction ; cf. [5], Note IV, [5], III, [II], [12].

Ils peuvent également être utilisés dans le calcul des groupes d'homotopie d'un espace donné X : on construit des espaces (X, i) qui "tuent" les groupes d'homotopie de X jusqu'au i-éme, et qui sont reliés entre eux par des fibrations faisant intervenir des espaces $K(\Pi, n)$ (cf. [3], Note I, et [21]). On trouvera des applications de cette méthode dans [3], Note II, [9], [IO], [16], [17], [18].

Pour une construction explicite d'un complexe cellulaire $K(Z, n)$ (en dimensions assez basses), cf. [19].

Bibliographie

[1] - H. CARTAN - Sur les groupes d'Eilenberg-Maclane $H(\Pi, n)$. I , Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 40, 1954, p. 467-471 ; II , ibid., p. 704-707

[2] - H. CARTAN - Sur l'itération des opérations de Steenrod. Comm. Math. Helv., vol. 29, 1955, à paraître.

[3] - H. CARTAN et J-P. SERRE - Espaces fibrés et groupes d'homotopie. I , C.R. Acad. Sci. Paris, vol. 234, 1952, p. 288-290 ; II , ibid., p. 393-395.

[4] - S. EILENBERG and S. MAC LANE - Relations between homology and homotopy groups of spaces. I , Ann. of Math., vol. 46, 1945, p. 480-509 ; II , ibid., vol. 51, 1950, p. 514-533.

[5] - S. EILENBERG and S. MAC LANE - Cohomology theory of abelian groups and homotopy theory. I , Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 36, 1950, p. 443-447 ; II , ibid., p. 657-663 ; III , ibid., vol. 37, 1951, p. 307-310 ; IV , ibid., vol. 38, 1952, p. 1340-1342.

[6] - S. EILENBERG and S. MAC LANE - On the groups $H(\Pi, n)$. I , Ann. of Math., vol. 58, 1953, p. 55-106 ; II , ibid., vol. 60, 1954, p. 49-139 ; III , ibid., à paraître.

[7] - S. MAC LANE - The homology products in $K(\Pi, n)$. Proc. Am. math. Soc., vol. 5, 1954, p. 642-651 .

[8] - K. MIZUNO - On the minimal complexes. J. Inst. Polyt. Osaka City Univ., vol. 5, 1954, p. 41-51.

[9] - J.C. MOORE - Some applications of homology theory to homotopy problems. Ann. of Math., vol.58, 1953, p. 325-350.

[10] - J.C. MOORE - On homotopy groups of spaces with a single non-vanishing homology group. Ann. of Math., vol. 59, 1954, p. 549-557.

[11] - M. NAKAOKA - Classification of mappings of a complex into a special kind of complex. J. Inst. Polyt. Osaka City Univ., vol. 3, 1952, p. 101-143.

[12] - M. NAKAOKA - On homotopy classification and extension. Proc. Japan Acad., vol. 29, 1953, p. 6-9.

[13] - M.M. POSTNIKOV - Determination of the homology groups of a space by means of the homotopy invariants (en russe) . Doklady Akad. Nauk SSSR, vol. 76, 1951, p. 359-362.

[14] - M.M. POSTNIKOV - On the homotopy type of polyedra (en russe) . Doklady Akad. Nauk SSSR, vol. 76, 1951, p. 789-791.

[15] - J.P. SERRE - Homologie singulière des espaces fibrés. Applications. Ann. of Math., vol. 54, 1951, p. 425-505.

[16] - J.P. SERRE - Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens. Ann. of Math., vol. 58, 1953, p. 258-294.

[17] - J-P. SERRE - Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg-MacLane. Comm. Math. Helv., vol. 27, 1953, p. 198-232.

[18] - R. THOM - Quelques propriétés globales des variétés différentielles. Comm. Math. Helv., vol. 28, 1954, p. 17-86.

[19] - H. TODA - Generalized Whitehead products and homotopy groups of spheres. J. Inst. Polyt. Osaka City Univ., vol. 3, 1952, p. 43-82.

[20] - G.W. WHITEHEAD - On spaces with vanishing low-dimensional homotopy groups. Proc. Nat. Acad. Sci. USA., vol. 34, 1948, p. 207-211.

[21] - G.W. WHITEHEAD - Fibre space and the Eilenberg homology groups. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 38, 1952, p. 426-430.

[22] - J.H.C. WHITEHEAD - On the realizability of homotopy groups. Ann. of Math., vol. 50, 1949, p. 261-263.