H. CARTAN

Constructions multiplicatives

Séminaire Henri Cartan, tome 7, nº 1 (1954-1955), exp. nº 4, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1954-1955__7_1_A4_0>

Séminaire H. CARTAN, E.N.S., 1954/55.

CONSTRUCTIONS MULTIPLICATIVES

(Exposé de H. CARTAN, 1.12.1954)

1. Produit tensoriel de deux DGA-modules, de deux constructions.

Soient M un DGA-module sur une DGA-algèbre A, et M' un DGA-module sur une DGA-algèbre A'. On a déjà défini (Exposé 2, n° 3) le produit tensoriel $A \otimes_{\Lambda} A'$ qui est une DGA-algèbre A''. Sur le Λ-module $M'' = M \otimes_{\Lambda} M'$, nous définissons :

- une graduation, en posant $M''_q = \sum_{k+h=q} M_k \otimes M'_h$;

- une structure de A''-module à gauche, en posant

(1) $$(a \otimes a').(m \otimes m') = (-1)^{kh} (am) \otimes (a'm') \quad \text{pour } a' \in A'_k,\ m \in M_h \ ;$$

- un opérateur différentiel d'', par la formule

(2) $$d''(m \otimes m') = (dm) \otimes m' + (-1)^k m \otimes (d'm') \quad \text{pour } m \in M_k \ ;$$

- une augmentation η'', en posant $\eta''(m \otimes m') = (\eta m)(\eta' m')$.

On vérifie que ces données définissent sur M'' une structure de DGA-module sur la DGA-algèbre A''.

On va maintenant définir le produit tensoriel de deux constructions (A,N,M) et (A',N',M'). C'est une construction (A'',N'',M''), où :

$A'' = A \otimes A'$, produit tensoriel de DGA-algèbres ;

$N'' = N \otimes N'$, produit tensoriel de deux Λ-modules gradués et augmentés ;

$M'' = M \otimes M'$, produit tensoriel de deux DGA-modules comme ci-dessus ; ainsi M'' est un module sur A''.

Pour obtenir une construction, il faut encore définir un isomorphisme de M'' sur $A'' \otimes N''$; par définition, l'isomorphisme de $(A \otimes N) \otimes (A' \otimes N')$ sur $(A \otimes A') \otimes (N \otimes N')$ est l'application linéaire qui envoie $(a \otimes n) \otimes (a' \otimes n')$ dans $(-1)^{kh}(a \otimes a') \otimes (n \otimes n')$, où k désigne le degré de n et h celui de a'.

On vérifie que c'est bien un isomorphisme de A''-modules gradués et augmentés, en utilisant (1). Par cet isomorphisme, d'' se transporte de $M \otimes M'$ à $A'' \otimes N''$; par passage au quotient, on obtient $\bar{d}''$ sur N'', et il résulte de (2) que

$$\bar{d}''(n \otimes n') = (\bar{d}n) \otimes n' + (-1)^k n \otimes (\bar{d}'n') \quad \text{pour} \quad n \in N_k.$$

Ainsi le <u>module final</u> N'', comme module différentiel gradué, est le <u>produit tensoriel des modules finaux</u> N et N'.

Ce qui précède s'applique notamment à deux bar-constructions $(A, \bar{\mathcal{B}}(A), \mathcal{B}(A))$ et $(A', \bar{\mathcal{B}}(A'), \mathcal{B}(A'))$; on obtient une construction

$$(A \otimes A', \ \bar{\mathcal{B}}(A) \otimes \bar{\mathcal{B}}(A'), \quad \mathcal{B}(A) \otimes \mathcal{B}(A')).$$

On notera que $\mathcal{B}(A) \otimes \mathcal{B}(A')$ est <u>acyclique</u>, car les opérateurs d'homotopie s et s' de $\mathcal{B}(A)$ et $\mathcal{B}(A')$ définissent un opérateur d'homotopie dans $\mathcal{B}(A) \otimes \mathcal{B}(A')$ (cf ci-dessous, n° 5, formule (8)). Comparons cette construction à la bar construction $\mathcal{B}(A \otimes A')$. La proposition 1 de l'Exposé 3 donne aussitôt :

<u>Proposition 3.- Il existe un DGA-homomorphisme</u>

$$\varphi : \mathcal{B}(A) \otimes \mathcal{B}(A') \longrightarrow \mathcal{B}(A \otimes A')$$

<u>qui envoie</u> $\bar{\mathcal{B}}(A) \otimes \bar{\mathcal{B}}(A')$ <u>dans</u> $\bar{\mathcal{B}}(A \otimes A')$ <u>et est compatible avec l'application identique</u> $A \otimes A' \longrightarrow A \otimes A'$. <u>Un tel</u> φ <u>est unique. Par passage à l'homologie, on obtient</u>

$$\bar{\varphi}_* : H_*(\bar{\mathcal{B}}(A) \otimes \bar{\mathcal{B}}(A')) \longrightarrow H_*(\bar{\mathcal{B}}(A \otimes A')) ,$$

<u>qui est un isomorphisme lorsque les algèbres</u> A <u>et</u> A' <u>ont chacune une</u> Λ<u>-base homogène contenant l'élément unité</u>.

La dernière assertion résulte aussitôt du théorème 2 (Exposé 2).

<u>Remarque</u> : l'application φ a été explicitée par Eilenberg-MacLane au moyen des "shuffles". Nous n'aurons pas besoin de la formule explicite.

2. <u>Structure multiplicative de la bar construction</u>.

Nous supposerons maintenant que l'algèbre graduée A est <u>anticommutative</u>. Alors l'homomorphisme $\mu : A \otimes A \longrightarrow A$ défini par la multiplication (i.e: $\mu(a \otimes b) = ab$) est multiplicatif ; c'est donc un DGA-homomorphisme de DGA-algèbres. Puisque la bar construction est un foncteur covariant, μ induit des homomorphismes

$$\mathcal{B}(A \otimes A) \longrightarrow \mathcal{B}(A) \quad \text{et} \quad \bar{\mathcal{B}}(A \otimes A) \longrightarrow \bar{\mathcal{B}}(A) ,$$

qui, composés avec l'application de la proposition 3, donnent :

$$\mathcal{B}(A) \otimes \mathcal{B}(A) \longrightarrow \mathcal{B}(A), \qquad \bar{\mathcal{B}}(A) \otimes \bar{\mathcal{B}}(A) \longrightarrow \bar{\mathcal{B}}(A).$$

On obtient ainsi une <u>multiplication</u> dans $\mathcal{B}(A)$, pour laquelle le sous- Λ -module $\bar{\mathcal{B}}(A)$ est stable. L'image de $x \otimes y$, pour cette multiplication, sera notée $x*y$. Exprimons que l'application $*$ est un DGA-homomorphisme : $x*y$ est Λ -bilinéaire, $\deg(x*y) = \deg(x) + \deg(y)$, et :

(3) $\quad (ax)*(by) = (-1)^{kh}(ab)*(xy)$ pour $a \in A$, $b \in A_h$, $x \in \mathcal{B}_k(A)$, $y \in \mathcal{B}(A)$.

(4) $\quad d(x*y) = (dx)*y + (-1)^k x*(dy)$ pour $x \in \mathcal{B}_k(A)$, $y \in \mathcal{B}(A)$;

(5) $\quad \eta(x*y) = (\eta x)(\eta y)$.

Ces propriétés, et le fait que $x*y \in \bar{\mathcal{B}}(A)$ chaque fois que x et y sont dans $\bar{\mathcal{B}}(A)$, <u>caractérisent la multiplication</u> $*$, en vertu de l'unicité énoncée à la proposition 1 de l'Exposé 3. Par passage au quotient, la relation (4), où d serait remplacé par $\bar{d}$, est vraie dans $\bar{\mathcal{B}}(A)$.

On va montrer que $\mathcal{B}(A)$ et $\bar{\mathcal{B}}(A)$, munies de la multiplication $*$, sont des <u>DGA-algèbres</u>. D'une façon précise :

<u>Théorème 4</u>.- <u>Si la DGA-algèbre</u> A <u>est anticommutative, alors la multiplication</u> $*$ <u>de</u> $\mathcal{B}(A)$ <u>jouit des propriétés suivantes</u> :

(i) <u>l'élément [ ] est élément unité</u> ;

(ii) <u>la multiplication $*$ est associative</u> ;

(iii) <u>la multiplication $*$ est anticommutative</u> ;

<u>Ces propriétés sont vraies aussi pour</u> $\bar{\mathcal{B}}(A)$; <u>de plus</u> :

(iv) <u>si</u> $x \in \bar{\mathcal{B}}(A)$ <u>est de degré impair, on a</u> $x*x = 0$; <u>si en outre</u> $1 + 1 = 0$ <u>dans l'anneau</u> Λ , <u>alors</u> $x*x = 0$ <u>pour</u> $x \in \bar{\mathcal{B}}(A)$ <u>de degré pair</u> ≥ 2.

<u>Démonstration</u> : (i) l'application $x \longrightarrow [\ ]*x$ est un DGA-homomorphisme du A-module $\mathcal{B}(A)$ dans lui-même, compatible avec l'application identique $A \longrightarrow A$, et qui applique $\bar{\mathcal{B}}(A)$ dans $\bar{\mathcal{B}}(A)$. Donc, d'après la propriété d'unicité (Exposé 3 prop.1), c'est l'application identique. On montre de même que [ ] est élément unité à droite.

(ii) considérons les deux DGA-homomorphismes

$$\mathcal{B}(A) \otimes \mathcal{B}(A) \otimes \mathcal{B}(A) \longrightarrow \mathcal{B}(A)$$

qui envoient $x \otimes y \otimes z$ respectivement en $(x*y)*z$ et $x*(y*z)$. Pour la même raison d'unicité, ils sont identiques.

(iii) considérons les deux DGA-homomorphismes $\mathcal{B}(A) \otimes \mathcal{B}(A) \longrightarrow \mathcal{B}(A)$, qui envoient $x \otimes y$ respectivement en $x*y$ et en $(-1)^{kh}\, y*x$ (h et k désignant les degrés de x et y). Pour la même raison d'unicité, ils sont identiques.

(iv) si $x \in \bar{\mathcal{B}}(A)$, alors $x*x \in \bar{\mathcal{B}}(A)$. Utilisons la propriété (B) de la bar construction (Exposé 3, théorème 3) : pour montrer que $x*x = 0$, il suffit de montrer que $d(x*x) = 0$ dans $\mathcal{B}(A)$. Or, d'après (4) et l'anticommutativité du produit $*$, on a

$$d(x*x) = (dx)*x - x*(dx) = 0 .$$

Même démonstration si x est de degré pair 2 et si $-1 = 1$ dans Λ.

<u>Remarque</u> : si on a un DGA-homomorphisme d'algèbres anticommutatives $A \longrightarrow A'$, l'application fonctorielle $\mathcal{B}(A) \longrightarrow \mathcal{B}(A')$ est compatible avec la multiplication $*$; autrement dit, c'est un DGA-homomorphisme d'algèbres. De même pour $\bar{\mathcal{B}}(A) \longrightarrow \bar{\mathcal{B}}(A')$. Ainsi, les DGA-<u>algèbres</u> $\mathcal{B}(A)$ et $\bar{\mathcal{B}}(A)$ sont des foncteurs covariants de la DGA-algèbre anticommutative A.

3. <u>La bar construction itérée</u>.

Soit A une DGA-algèbre <u>anticommutative</u>. Alors $\bar{\mathcal{B}}(A)$ est une DGA-algèbre anticommutative, et l'on peut considérer la bar construction ayant $\bar{\mathcal{B}}(A)$ comme algèbre initiale. D'une manière générale, définissons par récurrence une suite de constructions $(A^{(n)}, A^{(n+1)}, M^{(n+1)})$, en posant

$$A^{(0)} = A, \quad A^{(n+1)} = \bar{\mathcal{B}}(A^{(n)}), \quad M^{(n+1)} = \mathcal{B}(A^{(n)}) .$$

L'algèbre $A^{(n)}$ se notera $\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A)$, et $M^{(n)}$ se notera $\mathcal{B}^{(n)}(A)$. On a

$$\bar{\mathcal{B}}^{(0)}(A) = A, \quad \mathcal{B}^{(n+1)}(A) = \bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A) \otimes \bar{\mathcal{B}}^{(n+1)}(A).$$

Si A possède une Λ-base homogène contenant l'élément unité 1, il en est de même pour chacune des algèbres $\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A)$.

Lorsque A est l'algèbre $\Lambda(\Pi)$ d'un groupe abélien Π, munie de l'augmentation habituelle, <u>les algèbres d'homologie</u> $H_*(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A))$ <u>sont canoniquement isomorphes aux algèbres d'Eilenberg-MacLane</u>. $H_*(\Pi, n; \Lambda)$, comme on le montrera plus tard (cf. Eilenberg-MacLane, Ann. of Math. 58, 1953, p.55-106).

4. Notion générale de construction (multiplicative).

Une construction multiplicative (A,N,M) consiste dans la donnée :

(i) d'une DGA-algèbre A (sur l'anneau Λ);

(ii) d'une Λ-algèbre graduée N, munie d'une augmentation $\eta : N_0 \to \Lambda$;

(iii) d'une différentielle d sur l'algèbre graduée $M = A \otimes N$, telle que l'injection $A \to M$ (définie par $a \to a \otimes 1$) soit compatible avec les différentielles de A et de M, et telle que M, munie de d, soit une DGA-algèbre.

Dans ces conditions, on obtient une différentielle $\bar{d}$ sur $N \approx \bar{M}$, par passage au quotient. Avec cette différentielle, N est une DGA-algèbre, qu'on appelle l'algèbre finale de la construction; A s'appelle l'algèbre initiale. La construction est dite acyclique si M est acyclique.

Produit tensoriel de deux constructions (A,N,M) et (A',N',M') : la définition est la même qu'au n° 1 ci-dessus, avec cette différence que $N \otimes N'$ et $M \otimes M'$ sont maintenant des algèbres. Par exemple, soient A et A' deux DGA-algèbres anticommutatives ; on a une construction multiplicative $(A \otimes A', \bar{\mathcal{B}}(A) \otimes \bar{\mathcal{B}}(A'), \mathcal{B}(A) \otimes \mathcal{B}(A'))$, ayant pour algèbre initiale $A \otimes A'$, et pour algèbre finale $\bar{\mathcal{B}}(A) \otimes \bar{\mathcal{B}}(A')$.

Homomorphisme de constructions : soient deux constructions multiplicatives (C,Q,P) et (A,N,M). Un homomorphisme de la première dans la seconde consiste dans la donnée d'une application $g : P \to M$ qui est un DGA-homomorphisme d'algèbres, tel que la restriction f de g à C (identifiée à une sous-algèbre de P) applique C dans A (identifiée à une sous-algèbre de M). On dit alors que g est compatible avec le DGA-homomorphisme $f : C \to A$. On n'exige pas que g applique Q dans N ; mais, par passage aux quotients, g définit un DGA-homomorphisme d'algèbres $\bar{g} : Q \to N$. On verra de nombreux exemples dans la suite.

5. La notion de construction spéciale.

La propriété (B) de la bar construction (Exp. 3, théorème 3) se généralise comme suit. On appelle construction spéciale $(A,N,M,\tilde{N})$ la donnée d'une construction multiplicative (A,N,M) et d'une sous-Λ-algèbre $\tilde{N}$ de M, contenant Λ, et satisfaisant à la condition suivante :

(S) η est un isomorphisme de $\tilde{N}_0$ sur Λ (d'où $\tilde{N}_0 = N_0$) ; et, pour tout entier $k \geqslant 0$, l'opérateur différentiel d de M applique biunivoquement $\tilde{N}_{k+1}$ sur le noyau de η (si $k = 0$), resp. sur le noyau de d (si $k \geqslant 1$).

Dans le cas où $\tilde{N} = N$, on retrouve la propriété (B) de la bar construction. Dans tous les cas, (S) implique que M est <u>acyclique</u>.

Soit $(A,N,M,\tilde{N})$ une construction spéciale. Par récurrence sur le degré, on définit un Λ-homomorphisme $s : M \to \tilde{N}$, qui envoie M_k dans $\tilde{N}_{k+1}$ et satisfait à

(6) $dsx + sdx = x - \sigma\eta x$ pour $x \in M$ (σ désigne l'injection canonique $\Lambda \to M$ telle que $\sigma(1) = 1$).

Alors $\sum_{k \geq 0} \tilde{N}_{k+1}$ est exactement l'image de l'application s ; de plus

(7) $s(1) = 0$, $ss = 0$ (vérification par récurrence sur le degré)

Réciproquement, la donnée, dans une construction (A,N,M), d'un Λ-homomorphisme $s : M \to M$ augmentant le degré de un et satisfaisant à (6) et (7), définit un sous-module $\tilde{N}$ de M, à savoir $\sigma(\Lambda) + s(M)$; si $\tilde{N}$ contient N et est stable pour la multiplication de M, alors $(A,N,M,\tilde{N})$ est une construction spéciale

<u>Produit tensoriel de deux constructions spéciales</u> : soient $(A,N,M,\tilde{N})$ et $(A',N',M',\tilde{N}')$ deux constructions spéciales, s et s' leurs opérateurs d'homotopie Sur le produit tensoriel $M'' = M \otimes M'$, définissons l'endomorphisme

(8) $s'' = s \otimes 1' + (\sigma\eta) \otimes s'$, où $1'$ désigne l'application identique de M'. Si on note d'' l'opérateur différentiel de M'' (défini par la formule (2)), on a

$$d''s''(x \otimes x') + s''d''(x \otimes x') = x \otimes x' - (\sigma\eta\, x)(\sigma'\eta' x')$$

pour $x \in M$, $x' \in M'$ (vérification facile). Ainsi s'' est un opérateur d'homotopie dans M''. Soit $\tilde{N}''$ l'image $\sigma''(\Lambda) + s''(M'')$ dans M'' ; on a

(9) $\tilde{N}'' = \left(\sum_{k \geq 0} \tilde{N}_{k+1} \right) \otimes M' + N_0 \otimes \tilde{N}'$.

On voit que $\tilde{N}''$ contient N'' et est multiplicativement stable. Ainsi $(A'', N'', M'', \tilde{N}'')$ <u>est une construction spéciale, dont l'opérateur</u> s'' <u>est donné par (8), et la sous-algèbre</u> $\tilde{N}''$ <u>donnée par (9)</u>. C'est cette construction spéciale qu'on appelle, par définition, le produit tensoriel des constructions spéciales $(A,N,M,\tilde{N})$ et $(A', N', M', \tilde{N}')$.

<u>Exemple</u> : Le produit tensoriel de deux bar-constructions $\mathfrak{B}(A)$ et $\mathfrak{B}(A')$ est une construction spéciale, avec

$$\tilde{N}'' = \left(\sum_{k \geq 0} \bar{\mathfrak{B}}_{k+1}(A) \right) \otimes \mathfrak{B}(A') + \Lambda \otimes \bar{\mathfrak{B}}(A').$$

Associativité du produit tensoriel : soient trois constructions spéciales, dont les opérateurs d'homotopie sont s, s' et s'' respectivement. L'opérateur d'homotopie que l'on obtient sur leur produit tensoriel ne dépend pas de la manière dont on les associe successivement, car on trouve dans les deux cas l'opérateur

$$s \otimes 1' \otimes 1'' + (\sigma\eta) \otimes s' \otimes 1'' + (\sigma\eta) \otimes (\sigma'\eta') \otimes s'' .$$

On peut donc parler, sans ambigüité, du produit tensoriel de trois constructions spéciales, rangées dans un ordre déterminé ; ceci s'étend au produit tensoriel d'une suite quelconque de constructions spéciales.

6. Homomorphismes spéciaux.

Soit (C, Q, P) une construction (multiplicative), et soit $(A, N, M, \tilde{N})$ une construction spéciale. Un homomorphisme de constructions $g : P \to M$ sera dit spécial si $g(Q) \subset \tilde{N}$. L'application identique d'une construction spéciale est un homomorphisme spécial. Un homomorphisme spécial de (C,Q,P) dans la bar construction $(A, \bar{\mathcal{B}}(A), \mathcal{B}(A), \bar{\mathcal{B}}(A))$ est précisément un homomorphisme qui satisfait à la condition de la proposition 1 (Exposé 3).

Théorème 5.- Soient données deux constructions multiplicatives (C,Q,P) et $(A,N,M,\tilde{N})$, dont la seconde est spéciale, et un DGA-homomorphisme $f : C \to A$. Si l'algèbre A est anticommutative, il existe un homomorphisme spécial (multiplicatif) $g : P \to M$ compatible avec f , et un tel homomorphisme spécial est unique.

Démonstration : on va d'abord (sans supposer l'anticommutativité de A) prouver l'existence et l'unicité d'un DGA-homomorphisme de modules $g : P \to M$, compatible avec f , et tel que $g(Q) \subset \tilde{N}$. Ensuite on montrera que si A est anticommutative, cet homomorphisme g est compatible avec les structures multiplicatives de P et M.

D'abord, si g existe, on a nécessairement

(10) $\quad g(c \otimes q) = f(c)g(1 \otimes q)$,

(11) $\quad g(1 \otimes q) = sgd(1 \otimes q), \quad g(1 \otimes 1) = 1.$

Réciproquement, toute application Λ-linéaire $g : P \to M$ qui conserve le degré et satisfait à (10) et (11) est un DGA-homomorphisme de modules, compatible avec f , et tel que $g(Q) \subset \tilde{N}$. Or les relations (10) et (11) déterminent sans ambiguïté g , par récurrence sur le degré. D'où l'existence et l'unicité de g.

Supposons maintenant que l'algèbre A soit anticommutative. Supposons prouvé que $g(1 \otimes q_1)g(1 \otimes q_2) = g(1 \otimes (q_1q_2))$ pour les couples (q_1,q_2) dont la somme des degrés est $\leqslant n$; il s'ensuivra que $g(c_1 \otimes q_1)g(c_2 \otimes q_2) = g(c_1 \otimes q_1).(c_2 \otimes q_2))$ lorsque la somme des degrés de c_1, c_2, q_1 et q_2 est $\leqslant n$. (On le voit en utilisant la relation $f(c_2)g(1 \otimes q_1) = (-1)^{kh}g(1 \otimes q_1)f(c_2)$ pour c_2 et q_1 de degrés k et h respectivement ; cette relation provient de l'anticommutation des éléments de A avec ceux de $M = A \otimes N$, et cette anticommutation suit de l'anticommutativité de l'algèbre A (et de la définition de la multiplication dans un produit tensoriel d'algèbres graduées).

Après ces remarques, on va prouver que $g(1 \otimes q_1)g(1 \otimes q_2) = g(1 \otimes (q_1q_2))$ par récurrence sur la somme des degrés de q_1 et q_2 . C'est trivial si ces degrés sont nuls. Supposons que ce soit prouvé quand la somme des degrés est $< n$ $(n \geqslant 1)$ et prenons q_1 et q_2 dont la somme des degrés soit n . Puisque $g(1 \otimes q_1)g(1 \otimes q_2)$ et $g(1 \otimes (q_1q_2))$ sont deux éléments de $\widetilde{N}$ (supposé multiplicativement stable), leur égalité suivra de l'égalité de leurs différentielles. Or cette dernière suit de l'hypothèse de récurrence, qui permet d'affirmer que

$$gd(1 \otimes q_1).\, g(1 \otimes q_2) = g(d(1 \otimes q_1).(1 \otimes q_2)) ,$$

$$g(1 \otimes q_1).gd(1 \otimes q_2) = g((1 \otimes q_1).d(1 \otimes q_2)).$$

Ceci achève la démonstration.

<u>Remarque</u> : dans la situation du théorème 5, g définit, par passage aux quotients, un DGA-homomorphisme d'algèbres $\bar{g} : Q \longrightarrow N$, qui est ainsi entièrement déterminé par la donnée de f .

<u>Exemple</u> : l'unique homomorphisme spécial $\varphi : \mathcal{B}(A) \otimes \mathcal{B}(A') \longrightarrow \mathcal{B}(A \otimes A')$ (cf. proposition 3) est compatible avec les structures multiplicatives, lorsque A et A' sont anticommutatives. De même, il y a un unique homomorphisme spécial $\psi : \mathcal{B}(A \otimes A') \longrightarrow \mathcal{B}(A) \otimes \mathcal{B}(A')$ (compatible avec l'application identique de $A \otimes A'$) qui est multiplicatif. Enfin, <u>le composé</u> $\psi \circ \varphi : \mathcal{B}(A) \otimes \mathcal{B}(A') \longrightarrow \mathcal{B}(A) \otimes \mathcal{B}(A')$ <u>est l'identité</u>, car il est évidemment spécial, et on peut lui appliquer le résultat d'unicité du théorème 5.
