

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

J. P. SERRE

Groupes d'homotopie des bouquets de sphères

Séminaire Henri Cartan, tome 7, n° 2 (1954-1955), exp. n° 20, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1954-1955__7_2_A10_0

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Séminaire H. CARTAN, E.N.S., 1954/55.

GROUPES D'HOMOTOPIE DES BOUQUETS DE SPHÈRES.

(Exposés de J.P. SERRE, 2.5.1955 et 9.5.1955).

1.- Opérations homotopiques.

Soient n et p deux entiers. Pour tout espace X , donnons-nous une application $f : \pi_n(X) \rightarrow \pi_p(X)$, commutant avec les applications continues $X \rightarrow Y$. La collection des applications f est appelée une opération homotopique à une variable (cf. [1]) ; c'est une notion analogue à celle d'opération cohomologique, étudiée dans les exposés 14 à 16.

Il est facile de déterminer toutes les opérations homotopiques à une variable. En effet, soit $i_n \in \pi_n(S_n)$ la classe d'homotopie de l'application identique : $S_n \rightarrow S_n$; si f est une opération homotopique, $f(i_n) = \alpha$ est un élément bien déterminé de $\pi_p(S_n)$, et si β est un élément quelconque de $\pi_n(X)$, on a :

$$f(\beta) = f \circ \beta(i_n) = \beta \circ f(i_n) = \beta \circ \alpha .$$

Inversement, si α est un élément quelconque de $\pi_p(S_n)$, l'application : $\beta \rightarrow \beta \circ \alpha$ est une opération homotopique à une variable. Ainsi, l'ensemble des opérations homotopiques à une variable est en correspondance naturelle avec l'ensemble des éléments du groupe $\pi_p(S_n)$; la sphère S_n joue donc un rôle universel pour ces opérations (de même que $K(\pi, n)$ joue un rôle universel pour les opérations cohomologiques à une variable).

On définit de la même manière les opérations homotopiques à plusieurs variables. Par exemple, une opération à 2 variables est la donnée, pour tout espace X , d'une application f de $\pi_n(X) \times \pi_m(X)$ dans $\pi_p(X)$, commutant aux applications continues (n, m et p étant des entiers donnés). Ici, l'espace universel est l'espace $S_n \vee S_m$ qui est réunion de deux sphères S_n et S_m ayant un point en commun ("bouquet" de sphères). En effet, la donnée d'un couple d'éléments $\beta \in \pi_n(X)$, $\gamma \in \pi_m(X)$ équivaut à la donnée d'une classe d'applications

$$\beta \vee \gamma : S_n \vee S_m \rightarrow X ;$$

d'autre part, les injections canoniques $i_n : S_n \rightarrow S_n \vee S_m$ et

$i_n : S_n \rightarrow S_n \vee S_m$ peuvent être regardées comme des éléments de $\pi_n(S_n \vee S_m)$ et de $\pi_m(S_n \vee S_m)$ respectivement ; il s'ensuit que $f(i_n, i_m)$ est un élément bien défini $\alpha \in \pi_p(S_n \vee S_m)$, et que, pour tout couple $\beta \in \pi_n(X)$, $\gamma \in \pi_m(X)$, on a :

$$f(\beta, \gamma) = (\beta \vee \gamma) \circ \alpha.$$

Plus généralement, les opérations homotopiques à k variables

$$f : \pi_{n_1}(X) \times \dots \times \pi_{n_k}(X) \rightarrow \pi_p(X)$$

sont en correspondance biunivoque avec les éléments de $\pi_p(S_{n_1} \vee \dots \vee S_{n_k})$. Nous verrons au paragraphe 2 comment ce dernier groupe peut être calculé en fonction des groupes d'homotopie de sphères.

Exemple d'opération homotopique : le produit de Whitehead. Considérons $S_n \vee S_m$ comme plongé dans le produit direct $S_n \times S_m$; nous obtenons ainsi une suite exacte :

$$\dots \rightarrow \pi_p(S_n \vee S_m) \rightarrow \pi_p(S_n \times S_m) \rightarrow \pi_p(S_n \times S_m, S_n \vee S_m) \rightarrow \dots$$

En fait, en tenant compte de ce que $\pi_p(S_n \times S_m) = \pi_p(S_n) \oplus \pi_p(S_m)$, on voit facilement que la suite exacte précédente se décompose, et l'on obtient un isomorphisme :

$$\pi_p(S_n \vee S_m) = \pi_p(S_n) \oplus \pi_p(S_m) \oplus \pi_{p+1}(S_n \times S_m, S_n \vee S_m).$$

Les deux premiers facteurs sont plongés par les injections i_n et i_m ; le troisième facteur est plongé par l'opérateur bord

$$d : \pi_{p+1}(S_n \times S_m, S_n \vee S_m) \rightarrow \pi_p(S_n \vee S_m).$$

Mais le théorème d'Hurewicz relatif montre que $\pi_q(S_n \times S_m, S_n \vee S_m)$ est nul pour $q < n+m$, et que $\pi_{n+m}(S_n \times S_m, S_n \vee S_m)$ est cyclique infini, engendré par $i_n \times i_m$; en appliquant l'opérateur d à $i_n \times i_m$, on trouve un élément de $\pi_{n+m-1}(S_n \vee S_m)$ que nous noterons $[i_n, i_m]$. D'après ce qui a été dit plus haut, l'élément $[i_n, i_m]$ définit une opération homotopique à deux variables, que nous noterons

$$(\beta, \gamma) \rightarrow [\beta, \gamma] ; \text{ c'est le produit de Whitehead.}$$

Par définition, on a $[\beta, \gamma] \in \pi_{n+m-1}(X)$ si $\beta \in \pi_n(X)$, $\gamma \in \pi_m(X)$.

Si β est représenté par $b : I^n \rightarrow X$ tel que $b(\dot{I}^n) = x_0$, et si γ

est représenté par $c : I^m \rightarrow X$, alors $[\beta, \gamma]$ est représenté par l'application u de $I^{n+m} = S_{n+m-1}$ dans X définie par la formule :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= b(x) & \text{si} & \quad x \in I^n \text{ et } y \in \dot{I}^n, \\ &= c(y) & \text{si} & \quad x \in \dot{I}^n \text{ et } y \in I^m. \end{aligned}$$

Il en résulte aisément que $[\beta, \gamma]$ est bilinéaire. De plus, un calcul d'orientations montre que $[\beta, \gamma] = (-1)^{nm} [\gamma, \beta]$, et nous verrons plus loin que $[\beta, \gamma]$ vérifie l'identité de Jacobi (modifiée par des signes convenables). Le produit de Whitehead possède donc des propriétés tout à fait analogues à celles du crochet d'une algèbre de Lie.

2.- Le théorème de Hilton.

Ce théorème (démontré dans [3]) exprime $\pi_p(S_{n_1} \vee \dots \vee S_{n_k})$, $n_1 \geq 2, \dots, n_k \geq 2$, comme une somme directe de groupes d'homotopie de sphères $\pi_p(S_m)$. Chaque facteur se trouve plongé par un certain produit de Whitehead multiple. Nous allons d'abord décrire ces produits :

Définition des produits basiques. Nous définirons par récurrence sur w les produits basiques de poids w ; les produits basiques de poids 1 sont les éléments i_1, \dots, i_k , classes d'homotopie des injections canoniques $S_{n_1} \rightarrow S_{n_1} \vee \dots \vee S_{n_k}$, \dots , $S_{n_k} \rightarrow S_{n_1} \vee \dots \vee S_{n_k}$; nous les ordonnons par la relation d'ordre $i_1 < i_2 < \dots < i_k$. Supposons maintenant définis et ordonnés les produits basiques de poids $< w$. Un produit basique de poids w sera alors un produit de Whitehead $[a, b]$, où a (resp. b) est un produit basique de poids u (resp. v), avec $u + v = w$, $a < b$, et si b est lui-même défini comme $[c, d]$, on doit avoir $c < a$. Les produits de poids w sont ordonnés arbitrairement entre eux, et sont considérés comme strictement supérieurs aux produits basiques de poids $< w$.

Exemple. Si $k = 2$, et si l'on pose $x = i_1, y = i_2$, les produits basiques de poids ≤ 4 sont les suivants :

poids 1 : x, y
 " 2 : $[x, y]$
 " 3 : $[x, [x, y]]$, $[y, [x, y]]$
 " 4 : $[x, [x, [x, y]]]$, $[y, [x, [x, y]]]$, $[y, [y, [x, y]]]$

Chaque produit basique a peut être considéré comme un élément de

$\pi_{n_a}(S_{n_1} \vee \dots \vee S_{n_k})$, n_a désignant un entier facile à déterminer.

L'application $\beta \mapsto a \circ \beta$ est donc un homomorphisme f_a de $\pi_p(S_{n_a})$ dans $\pi_p(S_{n_1} \vee \dots \vee S_{n_k})$; d'où un homomorphisme f de la somme directe $\sum_a \pi_p(S_{n_a})$ dans $\pi_p(S_{n_1} \vee \dots \vee S_{n_k})$. Le résultat de Hilton s'énonce alors :

Théorème. Pour tout entier p , l'homomorphisme f est un isomorphisme de $\sum_a \pi_p(S_{n_a})$ sur $\pi_p(S_{n_1} \vee \dots \vee S_{n_k})$.

On observera que les entiers n_a tendent vers $+\infty$; il s'ensuit que, pour chaque entier p , la somme directe $\sum_a \pi_p(S_{n_a})$ est finie. On a par exemple :

$$\pi_p(S_n \vee S_n) = \pi_p(S_n) \oplus \pi_p(S_n) \oplus \pi_p(S_{2n-1}) \oplus \pi_p(S_{3n-2}) \oplus \pi_p(S_{3n-2}) \quad \text{si}$$

$$p < 4n-3.$$

[Des résultats partiels de ce genre avaient d'ailleurs été déjà obtenus par G. Whitehead, J.H.C. Whitehead, Blakers-Massey, Moore, Chang, etc.]

Démonstration du théorème de Hilton.

Soit Ω l'espace des lacets sur l'espace $S_{n_1} \vee \dots \vee S_{n_k}$; d'après un résultat de Bott et Samelson [2], $H_*(\Omega)$, munie de la structure d'algèbre définie par le produit de Pontrjagin, est l'algèbre associative libre engendrée par les éléments x_1, \dots, x_k correspondant aux sphères S_{n_1}, \dots, S_{n_k} par transgression. (La démonstration de Bott et Samelson consiste à expliciter la suite spectrale de l'espace des chemins sur $S_{n_1} \vee \dots \vee S_{n_k}$; on pourrait également utiliser le théorème de Moore démontré dans l'exposé 3). Soit de même Ω_a l'espace des lacets sur S_{n_a} ; l'algèbre $H_*(\Omega_a)$ est une algèbre de polynômes à 1 générateur y_a de dimension $n_a - 1$. Si l'on désigne par T la limite inductive des produits finis des Ω_a , a parcourant l'ensemble des produits basiques, on voit que $H_*(T)$ admet pour base l'ensemble des éléments de la forme :

$$y_{a_1}^{m_1} \otimes \dots \otimes y_{a_i}^{m_i}.$$

Chaque produit basique a définit, par passage aux espaces de lacets,

une application multiplicative $g_a : \Omega_a \rightarrow \Omega$; nous désignerons par x_a l'image de y_a par g_a . Puisque g_a est multiplicative, l'image de y_a^m par g_a est égale à x_a^m . Soit alors $g : T \rightarrow \Omega$ l'application produit des applications g_a ; par passage à l'homologie, g transforme les $y_{a_1}^{m_1} \otimes \dots \otimes y_{a_i}^{m_i}$ en les monômes $x_{a_1}^{m_1} \dots x_{a_i}^{m_i}$. Admettons provisoirement que ces monômes forment une base de $H_*(\Omega)$. Alors

$g_* : H_*(T) \rightarrow H_*(\Omega)$ est une bijection ; comme les espaces T et Ω sont des H -espaces, ceci entraîne, en vertu du théorème de Moore, que $\tilde{g}_* : H_*(\tilde{T}) \rightarrow H_*(\tilde{\Omega})$ est bijectif, \tilde{T} et $\tilde{\Omega}$ désignant les revêtements universels de T et de Ω respectivement (pour une démonstration directe, cf. [3]) ; appliquant alors le théorème d'Hurewicz relatif au mapping-cylinder de \tilde{g} , on en conclut que $g_0 : \pi_{p-1}(T) \rightarrow \pi_{p-1}(\Omega)$ est bijectif pour tout p . Mais,

$$\pi_{p-1}(T) = \sum_a \pi_p(S_{n_a}) \quad , \quad \pi_{p-1}(\Omega) = \pi_p(S_{n_1} \vee \dots \vee S_{n_k}) \quad , \quad \text{et ces}$$

isomorphismes transforment g_0 en f , comme on le vérifie immédiatement ; donc f est bijectif.

Ainsi, la démonstration sera achevée si nous montrons que les monômes $x_{a_1}^{m_1} \dots x_{a_i}^{m_i}$ forment une base de $H_*(\Omega)$.

Calculons d'abord les x_a en fonction des générateurs x_1, \dots, x_k de $H_*(\Omega)$. De façon générale, soit X un espace quelconque, Ω son espace des lacets, et soit τ l'application composée des homomorphismes canoniques :

$$\pi_{p+1}(X) \rightarrow \pi_p(\Omega) \rightarrow H_p(\Omega) \quad .$$

D'après un résultat de Samelson [4], on a :

$$\tau[\beta, \gamma] = (-1)^p(\tau\beta \cdot \tau\gamma - (-1)^{pq} \tau\gamma \cdot \tau\beta) \quad \text{si } \beta \in \pi_{p+1}(X) \text{ ,} \\ \gamma \in \pi_{q+1}(X) \text{ .}$$

Ceci nous fournit tout de suite la valeur des x_a : si l'on munit $H_*(\Omega)$ de l'opération $[x, y] = (-1)^p(x \cdot y - (-1)^{pq} y \cdot x)$, x_a n'est autre que le a -ième produit basique des x_1, \dots, x_k .

Nous sommes ainsi ramenés à un problème purement algébrique : montrer que, si l'on forme les produits basiques x_a des générateurs d'une algèbre associative libre A , les monômes en les x_a forment une base de A . D'après

le cas où le crochet $[x, y]$ est égal à $x.y - y.x$ (ce qui se produit si toutes les sphères considérées sont de dimension impaire), le résultat précédent est un théorème bien connu de Witt ; ceci montre que le nombre des monômes en les x_a de degré r donné est égal au rang du groupe formé des éléments homogènes de degré r de A . Il suffit donc, dans le cas où les n_i sont quelconques, de montrer que les monômes en question engendrent A ; c'est ce que fait Hilton [3], par un raisonnement direct, inspiré de raisonnements analogues de P. Hall et Magnus.

3. Applications.

Le théorème de Hilton détermine complètement la forme des opérations homotopiques à plusieurs variables ; il montre en particulier que ces opérations sont engendrées par les trois opérations élémentaires suivantes : addition, composition, produit de Whitehead.

Il fournit également une démonstration de l'identité de Jacobi :

$$(-1)^{pq} [[\beta, \gamma], \alpha] + (-1)^{qr} [[\gamma, \alpha], \beta] + (-1)^{rp} [[\alpha, \beta], \gamma] = 0$$

si $\alpha \in \pi_p(X)$, $\beta \in \pi_q(X)$, $\gamma \in \pi_r(X)$.

En effet, d'après le paragraphe 1, il suffit de démontrer cette identité lorsque α, β, γ sont respectivement égaux aux éléments i_p, i_q, i_r de $\pi_*(S_p \vee S_q \vee S_r)$. Comme $[i_p, [i_q, i_r]]$ n'est pas un produit basique, il peut s'écrire sous la forme :

$$[i_p, [i_q, i_r]] = a [i_q, [i_p, i_r]] + b [i_r, [i_p, i_q]] + \delta,$$

où a et b sont des entiers, et où δ est une somme d'opérations homotopiques ne portant que sur deux des trois éléments i_p, i_q, i_r . La formule précédente étant universelle, on en déduit facilement que $\delta = 0$, et l'on détermine les valeurs de a et de b par un raisonnement homologique.

[D'autres démonstrations de l'identité de Jacobi ont été données par Nakaoka et Toda, Massey et Uehara, G. Whitehead].

Une autre application importante du théorème de Hilton est la définition des invariants de Hopf généralisés (cf. [3]) : soit

$$\Phi : \pi_p(S_n) \longrightarrow \pi_p(S_n \vee S_n)$$

l'application obtenue en identifiant en un point l'équateur de S_n . Si l'on compose Φ avec les projections de $\pi_p(S_n \vee S_n)$ sur ses différents

facteurs $\pi_p(S_{2n-1})$, $\pi_p(S_{3n-2})$, ..., on obtient des homomorphismes :

$$\begin{aligned} H_0 &: \pi_p(S_n) \longrightarrow \pi_p(S_{2n-1}) \\ H_1, H_2 &: \pi_p(S_n) \longrightarrow \pi_p(S_{3n-2}) \\ &\dots, \end{aligned}$$

et l'on a, pour tout $\alpha \in \pi_p(S_n)$:

$$\phi(\alpha) = i_1 \circ \alpha + i_2 \circ \alpha + [i_1, i_2] \circ H_0 \alpha + [i_1, [i_1, i_2]] \circ H_1 \alpha + \dots$$

Si X est un espace quelconque, et si β et γ sont deux éléments de $\pi_n(X)$, on déduit de la formule précédente que l'on a :

$$(\beta + \gamma) \circ \alpha = \beta \circ \alpha + \gamma \circ \alpha + [\beta, \gamma] \circ H_0 \alpha + [\beta, [\beta, \gamma]] \circ H_1 \alpha + \dots$$

On voit ainsi quelle est la "déviation de l'additivité" de l'opération $\beta \longrightarrow \beta \circ \alpha$.

On trouvera dans [3] diverses propriétés des H_i ; le plus intéressant de ces opérateurs est H_0 , qui généralise directement l'invariant de Hopf classique. On verra d'ailleurs, dans un exposé ultérieur de Moore (Exp. 22), qu'il est en rapport étroit avec la suspension de Freudenthal.

BIBLIOGRAPHIE

- [1]. A.L.Blakers and W.S.Massey. Products in homotopy theory. Ann. of Maths., vol. 58, 1953, p. 295-324.
- [2]. R.Bott and H. Samelson. On the Pontrjagin product in spaces of paths. Comm. Math. Helv., vol. 27, 1953, p. 320-337.
- [3]. P.J.Hilton. On the homotopy groups of the union of spheres. J. London Math. Soc., vol. 30, 1955, p. 154-171.
- [4]. H. Samelson. A connection between the Whitehead and the Pontrjagin product. Amer. J. of Maths., vol. LXXV, 1953, p. 744-752.
-