

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

J. C. MOORE

Constructions sur des complexes d'anneaux

Séminaire Henri Cartan, tome 7, n° 2 (1954-1955), exp. n° 12, p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1954-1955__7_2_A1_0

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONSTRUCTIONS SUR DES COMPLEXES D'ANNEAUX

(Exposé de J.C. MOORE, 7.2.1955)

Le but de cet exposé et du suivant est de comparer l'homologie de la bar construction itérée à celle d'un espace $K(\mathbb{P}, n)$.

1.- Complexes.

Hypothèse : Λ est un anneau principal choisi une fois pour toutes.

Définitions : Nous appellerons K un complexe si

$$1) \quad K = \sum_{q \geq 0} K_q \quad ,$$

2) chaque K_q est libre comme module sur Λ ,

3) il existe des opérateurs de face $\partial_i : K_{q+1} \rightarrow K_q$ pour $i = 0, \dots, q+1$.
et des opérateurs de dégénérescence $s_i : K_q \rightarrow K_{q+1}$ pour $i = 0, \dots, q$,
satisfaisant aux identités suivantes

$$\begin{aligned} \partial_i \partial_j &= \partial_{j-1} \partial_i \quad , \quad i < j \quad , \\ s_i s_j &= s_{j+1} s_i \quad , \quad i \leq j \quad , \\ \partial_i s_j &= s_{j-1} \partial_i \quad , \quad i < j \quad , \\ \partial_j s_j &= \partial_{j+1} s_j = \text{identité, et} \\ \partial_i s_j &= s_j \partial_{i-1} \quad , \quad i > j+1 \quad . \end{aligned}$$

Nous définissons $\partial : K_{q+1} \rightarrow K_q$ par $\partial = \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \partial_i$. Nous disons qu'une

fonction $f : K \rightarrow L$, où K et L sont des complexes, est une application si elle est un homomorphisme de modules gradués et si de plus nous avons $f \partial_i = \partial_i f$ et $s_i f = f s_i$.

Nous noterons K^n le plus petit sous-complexe de K qui contient $\sum_{q \leq n} K_q$. Nous définissons $s(K)$ comme le sous-module de K engendré par toutes les images des opérateurs s_i , et $K_N = K/s(K)$; K_N est libre. Le module $s(K)$ est stable par l'opérateur ∂ , et il est acyclique (voir par exemple [1], p.61).

Définition : Nous disons qu'un complexe R est un complexe d'anneaux si chaque R_q est une algèbre avec unité sur Λ , et si chaque opérateur ∂_i ou s_i est un homomorphisme d'algèbres. Nous noterons 1_q l'élément unité de R_q .

Définition : $\tilde{\Lambda}$ est l'unique complexe d'anneaux tel que $\partial_0 : \tilde{\Lambda}_{q+1} \rightarrow \tilde{\Lambda}_q$ soit un isomorphisme pour chaque q et tel que $\tilde{\Lambda}_0 = \Lambda$. Nous disons qu'un complexe K est augmenté si on s'est donné une application de complexes $\varepsilon : K \rightarrow \tilde{\Lambda}$. Pour un complexe R d'anneaux, nous demandons que ε soit multiplicatif et dans ce cas nous identifierons Λ avec le sous-anneau de R_q qui est engendré par 1_q .

Définition : Si K et L sont des complexes, nous définissons le produit cartésien $K \times L$ par

- 1) $(K \times L)_q = K_q \otimes L_q$,
- 2) $\partial_i(k \times \ell) = (\partial_i k \times \partial_i \ell)$, et
- 3) $s_i(k \times \ell) = (s_i k \times s_i \ell)$.

Evidemment le produit cartésien de deux complexes est un complexe.

Définition : Si K et L sont des complexes, nous définissons $\nabla : K \otimes L \rightarrow K \times L$ par $\nabla(a_p \otimes b_q) = \sum_{(\mu, \nu)} \sigma(\mu, \nu) (s_{\nu_q} \dots s_{\nu_1} a_p) \times (s_{\mu_p} \dots s_{\mu_1} b_q)$, où $a_p \in K_p$, $b_q \in L_q$, et (μ, ν) désigne un (p, q) -"shuffle", c'est-à-dire que (μ, ν) est une partition de $\{0, \dots, p+q-1\}$ en deux suites disjointes telles que $\mu_1 < \dots < \mu_p$ et $\nu_1 < \dots < \nu_q$; $\sigma(\mu, \nu)$ désigne la signature de la permutation $(\mu_1, \dots, \mu_p, \nu_1, \dots, \nu_q)$. Nous noterons que $K \otimes L$ n'est pas un "complexe" mais un Λ -module différentiel gradué.

Dans les mêmes conditions nous définissons $f : K \times L \rightarrow K \otimes L$ par

$$f(a_q \times b_q) = \sum_{i=0}^q \partial^{q-i} a_q \otimes \partial_0^i b_q, \text{ où } \partial a_r = \partial_r a_r \text{ pour } a_r \in K_r.$$

Théorème 1. - Si K et L sont des complexes, f et ∇ induisent des fonctions, notées encore f et ∇ , telles que

- 1) $f : (K \times L)_N \rightarrow K_N \otimes L_N$,
- 2) $\nabla : K_N \otimes L_N \rightarrow (K \times L)_N$,

- 3) $f\partial = \partial f$, $\nabla\partial = \partial\nabla$,
 4) $f\nabla = \text{identité}$,
 5) il existe une homotopie $\bar{\Phi}$ telle que
 $\partial\bar{\Phi} + \bar{\Phi}\partial = \nabla f - 1$, $\bar{\Phi}\nabla = 0$, $f\bar{\Phi} = 0$,
 6) f , ∇ , et $\bar{\Phi}$ sont naturelles.

Preuve : voir [2], p. 51, Theorem 2.1 ; et [1], p. 63-65. Posons $h = \nabla f$; alors $\bar{\Phi}_{q+1} = -\bar{\Phi}'_q + h'_q s_0$, et $\bar{\Phi}_0 = 0$. Expliquons les notations $\bar{\Phi}'_q$ et h'_q .

Un opérateur $\beta : K_q \rightarrow K_p$ est appelé monotone si $\beta = s_{i_r} \dots s_{i_1} \partial_{j_r} \dots \partial_{j_1}$, où $p > i_r \dots > i_1 \geq 0$, et $0 \leq j_t < \dots < j_1 \leq q$. Nous définissons β' par $\beta' = s_{i_r+1} \dots s_{i_1+1} \partial_{j_r+1} \dots \partial_{j_1+1}$. Donc $\beta' : K_{q+1} \rightarrow K_{p+1}$.
 Maintenant, puisque tout opérateur naturel β est une combinaison linéaire d'opérateurs monotones, nous avons défini β' pour n'importe quel opérateur naturel β .

2.- Constructions.

Définition : Etant donné un complexe d'anneaux R , on dit qu'un complexe U est un R-module (à gauche) si on s'est donné une application de $R \times U$ dans U telle que

- 1) $1_q \cdot u_q = u_q$, et
 2) $(r_q \cdot r'_q) \cdot u_q = r_q \cdot (r'_q \cdot u_q)$,

où nous noterons $r_q \cdot u_q$ l'image de $r_q \times u_q$. Nous disons que U est augmenté si R est augmenté, et si on s'est donné une application $\xi : U \rightarrow \tilde{\Lambda}$ telle que $\xi(r \cdot u) = \xi(r) \cdot \xi(u)$.

Si R , R' sont des complexes d'anneaux, si U est un module sur R , U' un module sur R' , et si $f : R \rightarrow R'$ est une application, nous disons que l'application $g : U \rightarrow U'$ est compatible avec f si le diagramme

$$\begin{array}{ccc} R \times U & \xrightarrow{f \times g} & R' \times U' \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{g} & U' \end{array}$$

est commutatif.

Définition : Nous disons que (R, \bar{U}, U) est une construction si

- 1) R est un complexe d'anneaux,
- 2) \bar{U} est un \wedge -module gradué,
- 3) U est un R -module augmenté tel que $U_q = R_q \otimes \bar{U}_q$ comme R_q -module,
- 4) $s_i(1_q \otimes \bar{U}_q) \subset 1_{q+1} \otimes \bar{U}_{q+1}$.

Nous nommerons \hat{R} le noyau de $\varepsilon : R \rightarrow \tilde{\Lambda}$. Maintenant, $\hat{R} \times U$ est un sous-complexe de U , et \bar{U} est isomorphe à $U/\hat{R} \times U$ d'une manière naturelle. Ainsi nous considérons \bar{U} comme un complexe augmenté.

Définition : Nous disons qu'une construction (R, \bar{U}, U) est un produit cartésien tordu si $\partial_i(1_{q+1} \times \bar{U}_{q+1}) \subset 1_q \times \bar{U}_q$ pour $i > 0$. Nous noterons que dans ce cas notre isomorphisme de \wedge -modules entre U et $R \times \bar{U}$ est compatible avec tous les opérateurs ∂_i et s_i , sauf ∂_0 .

Nous disons qu'une construction (R, \bar{U}, U) satisfait à la condition (W), si

- 1) elle est un produit cartésien tordu,
- 2) $\partial_0 : 1_{q+1} \times \bar{U}_{q+1} \rightarrow U_q$ est un isomorphisme,
- 3) $\varepsilon : \bar{U}_0 \rightarrow \wedge$ est isomorphisme.

Théorème 2. - Si (R, \bar{U}, U) est un produit cartésien tordu, (R', \bar{U}', U') une construction satisfaisant à la condition (W), et si $f : R \rightarrow R'$ est une application, il existe une application $g : U \rightarrow U'$ telle que

- 1) g soit compatible avec f ,
- 2) $g(1_q \times \bar{U}_q) \subset 1_q \times \bar{U}'_q$,
- 3) $\varepsilon g = \varepsilon'$.

De plus, une telle application g est unique.

Preuve : Supposons que nous ayons une telle application g . Appelons g_q l'application induite de U_q dans U'_q . Donc $g_0(1xy) = \varepsilon(y)$ puisque $U'_0 = \wedge$ et $\varepsilon g = g \varepsilon$. Notons $S : U_q \rightarrow 1_{q+1} \times \bar{U}_{q+1}$ l'inverse de ∂_0 . Puisque $g : 1_q \times \bar{U}_q \rightarrow 1_q \times \bar{U}'_q$, on a $g_{q+1}(1_{q+1}xy) = S \partial_0 g_{q+1}(1xy) = S g_q \partial_0(1xy)$. Par conséquent il existe au plus une application telle que g ; mais les formules ci-dessus nous ont défini un homomorphisme g de \wedge -modules tel que $\varepsilon g = g \varepsilon$ et $\partial_0 g = g \partial_0$. Il nous reste à vérifier que $\partial_{i+1} g = g \partial_{i+1}$ et que $s_i g = g s_i$.

Si $y \in U_1$, nous observons que $\partial_1 g(1xy) = \partial_1 S g \partial_0(1xy) = \varepsilon g \partial_0(1xy)$,

puisque (R', \bar{U}', U') satisfait à la condition (W), et de plus $\varepsilon g \partial_0(1xy) = g \varepsilon \partial_0(1xy) = g \varepsilon \partial_1(1xy)$. Faisons maintenant l'hypothèse de récurrence : $\partial_i g = g \partial_i$ pour $i \leq j$. Donc $\partial_{j+1} g(1xy) = \partial_{j+1} S g \partial_0(1xy) = S \partial_j g \partial_0(1xy) = g(1x \partial_{j+1} y)$, où $y \in U_{q+2}$.

Maintenant, nous observons que $S : 1_q \times \bar{U}_q \rightarrow 1_{q+1} \times \bar{U}'_{q+1}$ est un monomorphisme ; mais puisque $\partial_0 s_0 = \text{identité}$, S n'est pas autre chose que s_0 . Donc $s_0 S g \partial_0(1xy) = S S g \partial_0(1xy) = S g(1xy) = S g \partial_0 s_0(1xy) = g s_0(1xy)$.

Enfin $s_{i+1} S g \partial_0(1xy) = S s_i g \partial_0(1xy) = S g s_i \partial_0(1xy)$ par l'hypothèse de récurrence, et $S g s_i \partial_0(1xy) = S g \partial_0 s_{i+1}(1xy) = g s_{i+1}(1xy)$. Maintenant la preuve est complète.

Notons que dans la démonstration précédente nous avons prouvé ceci : dans une construction (R, \bar{U}, U) satisfaisant à la condition (W), si u est un cycle d'augmentation nulle de U_N , il est le bord d'un élément unique de l'image de $\bar{\Lambda} \times \bar{U}_N$ dans U_N .

Corollaire : Si (R, \bar{U}, U) et (R, \bar{W}, W) sont des constructions satisfaisant à la condition (W), et si $f : U \rightarrow W$ et $g : W \rightarrow U$ sont les applications du théorème précédent, compatibles avec l'identité de R , alors gf et fg sont les applications identiques de U et W . Autrement dit, R étant donné, il existe au plus une construction (R, \bar{U}, U) satisfaisant à la condition (W), à un isomorphisme près.

Pour prouver l'existence d'une telle construction, nous allons suivre exactement l'exposé de MacLane [3].

Définition : Soit R un complexe d'anneaux, augmenté. Posons $W_0 = R_0$, $W_{q+1} = R_{q+1} \otimes W_q$, $\bar{W}_0 = \wedge$, et $\bar{W}_{q+1} = R_q \otimes \bar{W}_q$. Maintenant dans $W(R) = \sum_{q \geq 0} W_q$, nous définissons

- 1) $\partial_0(r_1 \otimes r_0) = \partial_0 r_1 \cdot r_0$, $\partial_1(r_1 \otimes r_0) = \partial_1 r_1 \cdot \varepsilon(r_0)$ où $r_i \in R_i$, et pour $q > 0$,
- 2) $\partial_0(r_{q+1} \otimes w_q) = \partial_0 r_{q+1} \cdot w_q$,
- 3) $\partial_{i+1}(r_{q+1} \otimes w_q) = \partial_{i+1} r_{q+1} \otimes \partial_i w_q$,
- 4) $s_0(r_{q+1} \otimes w_q) = s_0 r_{q+1} \otimes (1_{q+1} \otimes w_q)$,

$$5) s_{i+1}(r_{q+1} \otimes w_q) = s_{i+1}r_{q+1} \otimes s_i w_q, \text{ et}$$

$$6) \varepsilon(r_{q+1} \otimes w_q) = \varepsilon(r_{q+1}) \cdot \varepsilon(w_q) .$$

On désignera $\sum_{q \geq 0} \bar{w}_q$ par $\bar{w}(R)$.

Théorème 3.- $(R, \bar{w}(R), w(R))$ est une construction satisfaisant à la condition (W).

Preuve : Il est clair que $\partial_0 : 1 \times \bar{w}_{q+1} \rightarrow w_q$ est un isomorphisme. Nous laissons au lecteur le soin de voir que les autres conditions sont remplies.

Notons que ce qui est appelé $\bar{w}(R)$ ici et dans [3], est appelé $w(R)$ dans [1] et [2].

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] S. EILENBERG et S. MacLANE - On the groups $H(\pi, n)$, I, Ann. of Math., vol. 58, 1953, p. 55-106.
 - [2] S. EILENBERG et S. MacLANE - On the groups $H(\pi, n)$, II, Ann. of Math., vol. 60, 1954, p. 49-139.
 - [3] S. MacLANE - Constructions Simpliciales Acycliques, Colloque Henri Poincaré, Paris 1954.
-