H. Cartan

La formule du produit pour les opérations de Steenrod

Séminaire Henri Cartan, tome 7, nº 2 (1954-1955), exp. nº 16 bis, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1954-1955__7_2_A6_0>

Séminaire H. CARTAN, E.N.S., 1954/55

LA FORMULE DU PRODUIT
POUR LES OPÉRATIONS DE STEENROD

(Notes de H. CARTAN)

On se propose de donner ici, de la "formule du produit", une démonstration basée uniquement sur les résultats obtenus dans les exposés 14, 15 et 16.

Enoncé du résultat : soit p un entier premier, et soient X et Y deux complexes CSS. Si $x \in H^n(X ; Z_p)$ et $y \in H^r(Y ; Z_p)$, avec $n \geq 1$, $r \geq 1$, on a, pour tout entier $c \geq 0$ et congru à 0 ou 1 mod.$(2p-2)$,

$$\text{(1)} \qquad St_p^c(x \otimes y) = \sum_{a,b} (-1)^{ar} St_p^a x \otimes St_p^b y ,$$

la sommation étant étendue à tous les couples d'entiers a et $b \geq 0$, congrus à 0 ou 1 mod.$(2p-2)$, et tels que $a+b = c$.

Dans la formule (1), la notation $x \otimes y$ désigne, par abus de langage, l'élément de $H^{n+r}(X \times Y ; Z_p)$, image de $x \otimes y$ par l'application naturelle $H^*(X ; Z_p) \otimes H^*(Y ; Z_p) \longrightarrow H^*(X \times Y ; Z_p)$. Même abus de langage pour la notation du second membre de (1).

Cas particuliers : pour $p=2$, on retrouve la formule connue (cf. [1])

$$\text{(1')} \qquad Sq^c(x \otimes y) = \sum_{a+b=c} Sq^a x \otimes Sq^b y .$$

Pour p impair, et $c = 2k(p-1)$, on retrouve la formule de Steenrod

$$\text{(1'')} \qquad P_p^k(x \otimes y) = \sum_{h+h'=k} P_p^h x \otimes P_p^{h'} y .$$

Il suffit évidemment de prouver (1) lorsque $X = K(Z_p, n)$, $Y = K(Z_p, r)$ (complexes d'Eilenberg-MacLane), et lorsque x et y sont les classes fondamentales de $H^n(Z_p, n ; Z_p)$ et $H^r(Z_p, r ; Z_p)$. Dans ce cas, l'application naturelle $H^*(X ; Z_p) \otimes H^*(Y ; Z_p) \longrightarrow H^*(X \times Y ; Z_p)$ est un isomorphisme.

1.- Rappel de propriétés qu'on va utiliser.

$$\text{(I)} \qquad St_p^c x = 0 \quad \text{si} \quad \deg(x) < [c/(p-1)] \quad \text{(cf. Exp. 16, paragraphe 2)}$$

(On rappelle que la notation $[u]$ désigne le plus petit entier $\geq u$).

$$
\text{(II)}\quad \begin{cases} St_p^0 \text{ est l'identité ;} \\ St_p^{2k(p-1)+1} = \beta_p' \circ St_p^{2k(p-1)} \quad \text{, par définition ;} \\ St_p^{2k(p-1)}x = x^p \text{ si } \deg(x) = 2k \quad \text{(Exp.15, coroll. du th.3) ;} \\ St_2^k x = x^2 \text{ si } \deg(x) = k \quad \text{(Exp.16, prop.5) .} \end{cases}
$$

Ces propriétés valent dans tout complexe X . Les propriétés suivantes sont particulières aux complexes d'Eilenberg-MacLane :

(III) les St_p^a commutent avec la suspension (Exp.16, prop.1) ;

(IV) si x est la classe fondamentale de $H^n(Z_p, n ; Z_p)$, les St_p^I relatifs à toutes les suites "canoniques" $I = (a_1 , \dots , a_i , \dots)$ telles que $n+q(I) \geq [(pa_1)/(p-1)]$ forment une <u>base</u> du Z_p-espace vectoriel $A^*(Z_p, n ; Z_p)$ (espace des éléments "additifs" de $H^*(Z_p, n ; Z_p)$) . Cela résulte du corollaire au théorème 1 (Exp.16, paragraphe 4).

2.- <u>Opérations cohomologiques et suspension</u>.

On aura besoin d'un résultat préliminaire :

<u>Théorème</u>.- <u>Soit</u> P <u>une collection d'opérations cohomologiques</u>

$$H^n(X ; Z_p) \longrightarrow H^{n+q}(X ; Z_p) \quad ,$$

<u>stable par</u> suspension (q est donné, et <u>pour chaque</u> n on a une opération cohomologique P) . <u>Si</u> $x \in H^n(\Pi , k ; Z_p)$ <u>et</u> $y \in H^r(\Pi', k' ; Z_p)$, $n \geq 2$, $r \geq 2$, $k \geq 1$, $k' \geq 1$, <u>on a</u>

$$P({}^t\sigma x \otimes y) = ({}^t\sigma \otimes 1).P(x \otimes y) \quad , \tag{2}$$

$$P(x \otimes {}^t\sigma y) = (\alpha_x \otimes {}^t\sigma).P(x \otimes y) \quad , \tag{3}$$

où ${}^t\sigma$ désigne la suspension en cohomologie mod. p , et α_x désigne l'automorphisme de $H^*(\Pi , k ; Z_p)$ qui transforme u en u si deg(u) a même parité que n , et en -u dans le cas contraire.

(Précisons que l'on identifie $H^*(K(\Pi , k) \times K(\Pi', k') ; Z_p)$ au produit tensoriel $H^*(\Pi , k ; Z_p) \otimes H^*(\Pi', k'; Z_p)$, ce qui donne la signification précise des seconds membres de (2) et (3) . Identification analogue pour les premiers membres).

On va prouver la formule (2). A priori, on a

$$P(x \otimes y) = \sum_i u_i \otimes v_i \quad ,$$

avec $u_i \in H^*(\Pi, k ; Z_p)$, $v_i \in H^*(\Pi', k' ; Z_p)$. Considérons l'application naturelle $f : L(\Pi, k)/K(\Pi, k-1) \longrightarrow K(\Pi, k)$ (cf. Exposé 14, démonstration du théorème 2). Soient x' et u_i' les images de x et u_i par $f^* : H^*(\Pi, k ; Z_p) \longrightarrow H^*(L(\Pi, k)/K(\Pi, k-1) ; Z_p)$. On a

(4) $P(x' \otimes y) = \sum_i u_i' \otimes v_i$ dans $H^*((L(\Pi, k)/K(\Pi, k-1)) \times K(\Pi', k') ; Z_p)$

Soit $\delta : H^*(\Pi, k-1 ; Z_p) \longrightarrow H^*(L(\Pi, k)/K(\Pi, k-1) ; Z_p)$ l'opérateur cobord de la suite exacte de cohomologie. On sait que

$$\delta({}^t\sigma x) = x' \quad , \quad \delta({}^t\sigma u_i) = u_i' \quad ,$$

et par suite (4) donne

$$P\delta({}^t\sigma x \otimes y) = \sum_i \delta({}^t\sigma u_i) \otimes v_i \quad \text{, ou encore}$$

(5) $$P\delta({}^t\sigma x \otimes y) = \delta(\sum_i {}^t\sigma u_i \otimes v_i) \quad ,$$

où δ désigne cette fois l'opérateur cobord

$$H^*(K(\Pi, k-1) \times K(\Pi', k') ; Z_p) \longrightarrow H^*((L(\Pi, k)/K(\Pi, k-1)) \times K(\Pi', k') ; Z_p).$$

δ est un <u>isomorphisme</u>, puisque $L(\Pi, k)$ est acyclique.

Par hypothèse, la collection des opérations P est stable par suspension : donc, d'après le théorème 2 de l'Exposé 14, on a $P\delta = \delta P$.

Finalement, (5) donne

$$\delta P({}^t\sigma x \otimes y) = \delta(\sum_i {}^t\sigma u_i \otimes v_i) \quad ,$$

d'où, puisque δ est un isomorphisme,

$$P({}^t\sigma x \otimes y) = \sum_i {}^t\sigma u_i \otimes v_i \quad ,$$

ce qui est la relation (2) à démontrer.

La relation (3) se prouve de la même manière.

3.- <u>Démonstration de la formule (1)</u>.

Soient x et y les classes fondamentales de $H^*(Z_p , n ; Z_p)$ et $H^*(Z_p , r ; Z_p)$, avec $n \geq 1$, $r \geq 1$. On a

$$x = {}^t\sigma x' \quad , \quad y = {}^t\sigma y' \quad ,$$

x' et y' étant les classes fondamentales de $H^*(Z_p , n+1 ; Z_p)$ et $H^*(Z_p , r+1 ; Z_p)$. D'après le théorème du paragraphe 2 appliqué à $P = St_p^c$, on a

$$St_p^c(x \otimes y) = ({}^t\sigma\alpha_x \otimes {}^t\sigma).St_p^c(x' \otimes y') \quad ;$$

donc $St_p^c(x \otimes y)$ est dans le produit tensoriel $A^*(Z_p, n ; Z_p) \otimes A^*(Z_p, r ; Z_p)$ des sous-espaces vectoriels des éléments "additifs" de la cohomologie modulo p (cf. Exposé 15, prop.3, d'après laquelle $A^*(Z_p, n ; Z_p)$ est exactement l'image de $H^*(Z_p, n+1 ; Z_p)$ par la suspension). Or $A^*(Z_p, n ; Z_p)$ admet pour Z_p-base les $St_p^I x$ relatifs à toutes les suites canoniques I (cf. Exp.16, paragraphe 4, coroll. du théorème 1). On a donc

$$(6) \qquad St_p^c(x \otimes y) = \sum_{I,J} (-1)^{q(I)r} \lambda_{IJ}\, St_p^I x \otimes St_p^J y \quad ,$$

les λ_{IJ} étant des éléments de Z_p (bien déterminés), et la sommation étant étendue à tous les couples (I,J) de suites canoniques telles que $q(I) + q(J) = c$.

Grâce aux formules (2) et (3), et à l'unicité des λ_{IJ} , on voit que les λ_{IJ} <u>ne dépendent pas des degrés</u> n <u>et</u> r <u>de</u> x <u>et</u> y : c'est pour obtenir ce résultat que, dans (6), on a introduit le signe $(-1)^{q(I)r}$.

Il reste seulement à calculer les constantes λ_{IJ} . Pour chacune d'elles, on va choisir convenablement les degrés de x et de y . Supposons que les suites $I = (a_1 , \dots , a_i , \dots)$ et $J = (b_1 , \dots , b_i , \dots)$ soient telles que $q(I) + q(J) = c$ et

$$(7) \qquad [pc/(p-1)] > [pa_1/(p-1)] + [pb_1/(p-1)] \; .$$

Prenons alors pour x et y les classes fondamentales de degrés $[pa_1/(p-1)] - q(I)$ et $[pb_1/(p-1)] - q(J)$ respectivement ; d'après (I), on aura $St_p^c(x \otimes y) = 0$, tandis que $St_p^I x \otimes St_p^J y$ fait partie d'une Z_p-base de $A^*(Z_p, n ; Z_p) \otimes A^*(Z_p, r ; Z_p)$. La relation (6) implique donc que $\lambda_{IJ} = 0$ chaque fois que (7) a lieu.

Pour que (7) ait lieu, il suffit que $a_1 + b_1 < c$: c'est trivial si $p = 2$; si p est premier impair, cela tient à ce qui a_1 , b_1 et c sont congrus à 0 ou 1 mod.(2p-2) . Ainsi les seuls $\lambda_{IJ} \neq 0$ sont ceux pour lesquels $a_1 + b_1 = c$, ce qui, à cause de $q(I) + q(J) = c$, implique que $I = (a_1 , 0 , \dots)$ et $J = (b_1 , 0 , \dots)$. La formule se réduit donc à

$$(6') \qquad St_p^c(x \otimes y) = \sum_{a,b} (-1)^{ar} \lambda_{ab}\, St_p^a x \otimes St_p^b y \quad ,$$

la sommation étant étendue à tous les couples d'entiers a et $b \geq 0$, congrus à 0 ou 1 mod.(2p-2) , et tels que $a + b = c$. Il ne reste plus qu'à calculer les coefficients λ_{ab} . On va distinguer plusieurs cas :

Cas $p = 2$: prenons pour x la classe fondamentale de degré a, pour y celle de degré b (avec $a + b = c$). A cause de (I), le seul terme non nul du second membre de (6') est alors $\lambda_{ab} St_2^a x \otimes St_2^b y$, qui, d'après (II), est égal à $\lambda_{ab} x^2 \otimes y^2$. Or, toujours d'après (II), le premier membre de (6') est $(x \otimes y)^2 = x^2 \otimes y^2$; d'où $\lambda_{ab} = 1$. Et ceci démontre la formule (1').

Cas où p est premier impair, et $c \equiv 0 \mod.(2p-2)$: alors, pour tout couple (a,b) du second membre de (6'), a et b sont $\equiv 0 \mod.(2p-2)$. Donc (6') s'écrit

$$P_p^k(x \otimes y) = \sum_{h+h'=k} \mu_{hh'} \, P_p^h x \otimes P_p^{h'} y .$$

Prenons pour x la classe fondamentale de degré $2h$, pour y la classe fondamentale de degré $2h'$; à cause de (I), le seul terme non nul du second membre est $\mu_{hh'} P_p^h x \otimes P_p^{h'} y = \mu_{hh'} x^p \otimes y^p$, en vertu de (II). Or, toujours d'après (II), le premier membre est $(x \otimes y)^p = x^p \otimes y^p$, puisque x et y sont de degrés pairs. On a donc $\mu_{hh'} = 1$, et ceci démontre la formule (1").

Dernier cas : p premier impair, et $c \equiv 1 \mod.(2p-2)$.- Il suffit d'appliquer l'opération de Bockstein β_p' aux deux membres de (1") pour obtenir la formule (1) dans ce cas.

La démonstration est ainsi terminée.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] H. CARTAN, Une théorie axiomatique des carrés de Steenrod (C. Rendus, 230, 1950, p.425-427).

[2] N. STEENROD, Cyclic reduced powers of cohomology classes (Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 39, 1953, p.217-223) ; voir la formule (6.12).
