C. Chevalley

Le théorème principal de Zariski, II

Séminaire Henri Cartan, tome 8 (1955-1956), exp. n$^{\text{o}}$ 12, p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1955-1956__8__A12_0>

LE THÉORÈME PRINCIPAL DE ZARISKI, II.
(Exposé de C. CHEVALLEY, le 13.2.1956)

3.- Nous sommes en mesure de démontrer le "Main theorem" de Zariski, dont nous rappelons l'énoncé :

Théorème 1.- Si une localité M' domine régulièrement une localité M, M' est de la forme $M^*_{\underline{m}^*}$, où M^* désigne la fermeture intégrale de M dans M', et $\underline{m}^*$ un idéal maximal de M^*.

Soient F et F' les corps des fractions de M et M'. Les localités M, M' ont des algèbres de définition A, A' telles que $A \subset A'$. Si A^* est la fermeture intégrale de A dans M', A^* est contenu dans la fermeture intégrale de A dans F' ; comme F' est de degré fini sur F, A^* est une algèbre affine ; on sait que $M^* = M[A^*]$. Soit $\underline{m}^* = M^* \cap \underline{r}(M')$, $M_o = M^*_{\underline{m}^*}$; M' domine donc M_o. De plus, M_o est intégralement fermé dans M'. En effet, si $x \in M'$ est entier sur M_o, il y a un $a \in M^*$, $a \notin \underline{m}^*$ tel que ax soit entier sur M^*, d'où $ax \in M^*$ et $x \in M_o$. Le corps des fractions de M_o est F'. Car, si $y \in F'$, il y a un $b \neq 0$ de M tel que bx soit entier sur M, d'où $by \in M^*$, ce qui démontre notre assertion. Il y a des éléments $x_1, \dots, x_h$ de A' tels que $A^*[A'] = A^*[x_1, \dots, x_h]$; M' est donc anneau local d'un idéal premier de $M_o[x_1, \dots, x_h]$.

Définissons par récurrence des anneaux M_i, M_i^* comme suit : M_o est déjà défini, et $M_o^* = M_o$; M_i^* est la fermeture intégrale de $M_{i-1}[x_i]$ dans M', et M_i est l'anneau local de l'idéal premier $\underline{r}(M') \cap M_i^*$ de M_i^*. On a $M_o[x_1, \dots, x_r] \subset M_r$, d'où $M_r = M'$; pour tout i, M' domine M_i et M_i domine M_o, qui domine M ; M' est donc régulière au-dessus de M_i (corollaire de la proposition 1). Si $i < r$, tout élément x de M_{i+1}^* entier sur M_i est dans M_i ; il y a en effet un $a \in M_i^*$ n'appartenant pas à $\underline{r}(M') \cap M_i^*$ tel que ax soit entier sur M_i^*, d'où $ax \in M_i^*$, $x \in M_i$. Il résulte du théorème préliminaire (Exposé 11) que, si $M_j = M'$ pour tout $j > i$, on a aussi $M_i = M'$. On a donc $M' = M_o$; comme $M'/\underline{r}(M')$ est algébrique sur $M/\underline{r}(M)$, $M^*/(M^* \cap \underline{r}(M))$ est un corps, et M' est bien anneau local d'un idéal premier maximal de M^*. Ceci achève la démonstration.

4.- Application aux correspondances birationnelles.

Soient S et S' des schémas sur un corps K, et soient F et F' leurs corps de fractions. Donnons-nous un isomorphisme j de F' sur F ; les images par j des localités de S' forment alors un schéma S'_1 dont le corps des fractions est F ; de plus, j définit un isomorphisme φ de S'_1 sur S'. Soient S'' le joint de S' et S'_1, f et f'_1 ses applications de domination sur S et S'_1 ; soit $f' = \varphi \circ f'_1$. Alors (S'', f, f') est une correspondance non dégénérée maximale entre S et S' ; toute correspondance qui peut se définir de la manière qu'on vient d'indiquer à partir d'un isomorphisme de F' sur F est appelée une correspondance birationnelle.

Théorème 2.- Soit Γ une correspondance birationnelle entre des schémas S et S'. Soit M une localité normale appartenant à S ; soit M' une localité de S' qui correspond à M mais qui n'est spécialisation d'aucune localité différente d'elle-même qui corresponde à M. S'il n'y a aucune spécialisation $\neq M'$ de M' qui corresponde à M, alors M' est la seule localité de S' qui corresponde à M ; si Γ est définie par un isomorphisme j du corps des fractions F' de S' sur celui, F, de S, on a $j(M') \subset M$.

On peut supposer sans restriction de généralité que S et S' ont le même corps de fractions et que $\Gamma = (S'', f, f')$ est définie par l'automorphisme identique de ce corps ; S'' est alors le joint de S et S'. Soit $\mathcal{Y}(M)$ (resp. $\mathcal{Y}(M')$) l'ensemble des spécialisations de M (resp. M') dans S (resp. S') ; parmi les correspondances entre $\mathcal{Y}(M)$ et $\mathcal{Y}(M')$ induites par Γ, nous pouvons en trouver qui n'est spécialisation d'aucune autre différente d'elle-même (exposé 9, proposition 4) ; cette correspondance induite est définie par une localité M'' de S'' qui domine M et M' et qui n'est spécialisation d'aucune localité différente d'elle-même ayant la même propriété. Si M'' est une spécialisation d'une localité M''_1 qui domine M, M''_1 domine une localité M'_1 de S' qui correspond à M et qui est par suite identique à M' ; il en résulte que $M''_1 = M''$. Soit δ'' la dimension de M'' ; il résulte du théorème 1, exposé 9, qu'il y a des localités de dimension $\dim M + \dim M' - \delta''$ de $\mathcal{Y}(M')$ qui correspondent à M ; en vertu de l'hypothèse faite sur M', on a donc $\delta'' \leqslant \dim M$; comme on a manifestement $\delta'' \geqslant \dim M$, on a $\delta'' = \dim M$, et M'' domine M régulièrement. Comme M est normale et comme M'' a même corps de fractions que M, il résulte du théorème 1 que $M'' = M$. Comme S'' domine S, M est évidemment la seule localité de S'' qui domine M ; on en conclut que M' est la seule localité de S' qui correspond à M , et que $M' \subset M$.

Remarque : L'hypothèse " il n'y a aucune spécialisation de M' autre que M' qui correspond à M " peut être remplacée par " il n'y a qu'un nombre fini de spécialisations de M' qui correspondent à M " . Reprenons en effet la démonstration précédente. L'ensemble des localités de dimension $\dim M + \dim M' - \delta''$ de $\mathcal{T}(M')$ qui correspondent à M est dense dans $\mathcal{T}(M')$; si donc on avait $\delta'' < \dim M$, cet ensemble serait infini.