

# SÉMINAIRE HENRI CARTAN

R. GODEMENT

## Localités simples, I

*Séminaire Henri Cartan*, tome 8 (1955-1956), exp. n° 16, p. 1-10

[http://www.numdam.org/item?id=SHC\\_1955-1956\\_\\_8\\_\\_A16\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SHC_1955-1956__8__A16_0)

© Séminaire Henri Cartan  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1955-1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

LOCALITÉS SIMPLES, I.  
(Exposé de R. GODEMENT, 9.4.1956)

1.- Idéaux premiers associés à un module noethérien.

Soit  $A$  un anneau commutatif (à élément unité  $1 \neq 0$ ), et soit  $E$  un  $A$ -module. Pour tout idéal  $\underline{q}$  de  $A$ , on note  $\mathcal{U}(\underline{q})$  l'annulateur de  $\underline{q}$  : sous-module des  $x \in E$  tels que  $ax = 0$  pour tout  $a \in \underline{q}$ . Pour tout sous-module  $F$  de  $E$ , on note  $\mathcal{U}(F)$  l'annulateur de  $F$  : idéal des  $a \in A$  tels que  $aF = 0$ . Pour que  $\mathcal{U}(F) = A$ , il faut et il suffit que  $F = 0$ . On notera que

$$\mathcal{U}(\mathcal{U}(\underline{q})) \supset \underline{q} \quad , \quad \mathcal{U}(\mathcal{U}(F)) \supset F .$$

Définition : si  $A$  est noethérien et si  $E$  est un  $A$ -module de type fini, les idéaux premiers de la forme  $\mathcal{U}(F)$  (où  $F$  est un sous-module de  $E$ , nécessairement  $\neq 0$ ) s'appellent les idéaux premiers associés à  $E$ .

Théorème 1.- Soient  $A$  un anneau noethérien,  $E$  un  $A$ -module de type fini. Les idéaux premiers associés à  $E$  sont en nombre fini. De plus, si  $G$  est un sous-module quelconque de  $E$ ,  $\neq 0$ , tout élément minimal de l'ensemble des idéaux premiers contenant  $\mathcal{U}(G)$  (cf. Exposé 2, théorème 4) est l'un des idéaux premiers associés à  $E$ .

La démonstration utilise deux lemmes.

Lemme 1 : Soit  $\underline{q}$  un idéal tel que  $\underline{q}E \neq 0$ . Considérons l'ensemble des idéaux de la forme  $\mathcal{U}(\underline{q}F)$ , où  $F$  est un sous-module de  $E$  tel que  $\underline{q}F \neq 0$ ; tout élément maximal de cet ensemble est un idéal premier.

En effet, si  $xy\underline{q}F = 0$  et  $y\underline{q}F \neq 0$ ,  $\mathcal{U}(y\underline{q}F)$  est  $\neq A$  et contient  $\mathcal{U}(\underline{q}F)$ , donc si  $\mathcal{U}(\underline{q}F)$  est maximal, on a  $\mathcal{U}(y\underline{q}F) = \mathcal{U}(\underline{q}F)$ , et par suite  $x \in \mathcal{U}(\underline{q}F)$ ; ceci prouve que  $\mathcal{U}(\underline{q}F)$  est premier.

Cela posé,  $E$  étant évidemment supposé  $\neq 0$ , définissons par récurrence une suite strictement croissante de sous-modules  $F_i$  et une suite d'idéaux premiers  $\underline{p}_i$ , comme suit :  $\underline{p}_1$  est un élément maximal de l'ensemble des  $\mathcal{U}(F)$  tels que  $F \neq 0$ , et  $F_1 = \mathcal{U}(\underline{p}_1)$ . Supposons déjà définis  $F_1, \dots, F_i$  et  $\underline{p}_1, \dots, \underline{p}_i$  de manière que  $F_i = \mathcal{U}(\underline{p}_1 \dots \underline{p}_i)$ ; si  $F_i = E$ , on s'arrête; si  $F_i \neq E$ , il existe des  $F$  tels que  $\underline{p}_1 \dots \underline{p}_i F \neq 0$ , et on prend pour

$\underline{p}_{i+1}$  un élément maximal de l'ensemble des  $\mathcal{O}(\underline{p}_1 \dots \underline{p}_i F)$  correspondants.  
Puis on pose

$$(1) \quad F_{i+1} = \mathcal{O}(\underline{p}_1 \dots \underline{p}_i \underline{p}_{i+1}) . \text{ Ceci implique } F_{i+1} \supset F_i \text{ et } F_{i+1} \neq F_i .$$

La suite des  $F_i$  étant strictement croissante, on a  $F_n = E$  pour un  $n$  convenable. On notera que

$$(2) \quad \underline{p}_i = \mathcal{O}(\underline{p}_1 \dots \underline{p}_{i-1} F_i) , \quad (\underline{p}_1 = \mathcal{O}(F_1) \text{ pour } i = 1) ,$$

car  $\underline{p}_i \subset \mathcal{O}(\underline{p}_1 \dots \underline{p}_{i-1} F_i)$ , et  $\underline{p}_1 \dots \underline{p}_{i-1} F_i \neq 0$ , donc, d'après le caractère maximal de  $\underline{p}_i$ , on a l'égalité (2).

Puisque  $F_n = E$ , on a  $\underline{p}_1 \dots \underline{p}_n E = 0$ , autrement dit  $\underline{p}_1 \dots \underline{p}_n \subset \mathcal{O}(E)$ .

Lemme 2 : Soit  $G$  un sous-module quelconque de  $E$ ; définissons

$\underline{p}'_i = A$  si  $\underline{p}_i \not\supset \mathcal{O}(G)$ ,  $\underline{p}'_i = \underline{p}_i$  si  $\underline{p}_i \supset \mathcal{O}(G)$ . Alors

$$\underline{p}'_1 \dots \underline{p}'_n G = 0 ,$$

autrement dit :  $\mathcal{O}(G)$  contient le produit de ceux des  $\underline{p}_i$  qui contiennent  $\mathcal{O}(G)$ .

On va montrer, par récurrence descendante sur  $i \leq n$ , que

$$(3) \quad \underline{p}_1 \dots \underline{p}_i \underline{p}'_{i+1} \dots \underline{p}'_n G = 0 .$$

C'est trivial pour  $i = n$ . Supposons-le vrai pour  $i$ ; posons  $F = \underline{p}'_{i+1} \dots \underline{p}'_n G$ ; d'après (3), on a  $\underline{p}_i \subset \mathcal{O}(\underline{p}_1 \dots \underline{p}_{i-1} F)$ . De deux choses l'une : ou bien  $\underline{p}_1 \dots \underline{p}_{i-1} F = 0$ , et l'assertion à démontrer est alors vraie pour  $i-1$ ; ou bien, en vertu du caractère maximal de  $\underline{p}_i$ , on a  $\underline{p}_i = A(\underline{p}_1 \dots \underline{p}_{i-1} \underline{p}'_{i+1} \dots \underline{p}'_n G)$  et par suite  $\underline{p}_i \supset A(G)$ , donc  $\underline{p}'_i = \underline{p}_i$ , et l'assertion relative à  $i-1$  est encore vraie.

Le lemme 2 étant maintenant démontré, observons que si  $\mathcal{O}(G)$  est premier, le lemme implique que  $\mathcal{O}(G)$  contient l'un des  $\underline{p}_i$  qui contiennent  $\mathcal{O}(G)$ , donc  $\mathcal{O}(G)$  est identique à l'un des  $\underline{p}_i$ . Tout idéal premier associé à  $E$  fait donc partie de l'ensemble des  $\underline{p}_i$ ; d'ailleurs la relation (2) montre que les  $\underline{p}_i$  sont des idéaux premiers associés à  $E$ . Si maintenant  $G$  est un sous-module quelconque  $\neq 0$ , l'intersection de ceux des  $\underline{p}_i$  qui contiennent  $\mathcal{O}(G)$  a une puissance contenue dans  $\mathcal{O}(G)$ , d'après le lemme 2; donc tout idéal premier minimal de  $\mathcal{O}(G)$  est l'un de ces  $\underline{p}_i$  (cf. Exposé 2, paragraphe 4). Ceci achève la démonstration du théorème 1.

## 2.- Idéaux essentiels d'un anneau gradué.

Soit  $S$  un anneau commutatif gradué ( $S_k = 0$  pour  $k < 0$ ,  $S_k S_h \subset S_{k+h}$ ). Un idéal  $\underline{q}$  de  $S$  est inessentiel si  $\underline{q} \supset S_k$  pour  $k$  assez grand ; dans le cas contraire,  $\underline{q}$  est essentiel. Il est évident que l'intersection d'un nombre fini d'idéaux inessentiels est inessentielle.

Lemme 3 : Si  $\underline{p}_1, \dots, \underline{p}_r$  sont des idéaux premiers essentiels, il y a des entiers  $k$  arbitrairement grands tels que  $S_k \not\subset \underline{p}_1 \cup \dots \cup \underline{p}_r$ .

C'est trivial si  $r = 1$ . Supposons l'assertion vraie pour  $r-1$  ( $r > 1$ ). S'il existe un  $i$  tel que  $S_k \cap \underline{p}_i \subset \bigcup_{j \neq i} \underline{p}_j$  pour  $k$  assez grand, on a  $S_k \not\subset \underline{p}_1 \cup \dots \cup \underline{p}_r$  pour des  $k$  arbitrairement grands. Supposons donc que,  $d$  étant un entier arbitrairement donné, il existe pour chaque  $i$  un entier  $k_i \geq d$  et un  $u_i \in S_{k_i} \cap \underline{p}_i$  tel que  $u_i \notin \bigcup_{j \neq i} \underline{p}_j$ . Posons  $v_i = \prod_{j \neq i} u_j$  ;  $v_i$  est homogène de degré  $k'_i = \sum_{j \neq i} k_j$ ,  $v_i$  appartient à  $\underline{p}_j$  pour  $j \neq i$ , et  $v_i \notin \underline{p}_i$ . Soit  $w_i$  la puissance de  $v_i$  d'exposant  $\prod_{j \neq i} k'_i$  ;  $w_i$  est de degré  $k = \prod_{1 \leq i \leq r} k'_i \geq d$ , et la somme  $\sum_i w_i$  est un élément de  $S_k$  qui n'appartient à aucun des  $\underline{p}_i$ .

Lemme 4 : Supposons que l'anneau  $S$  soit engendré par ses éléments de degré  $\leq e$ . Alors si  $\underline{q}$  est un idéal inessentiel, il en est de même de  $\underline{q}^2$  (donc tout produit fini d'idéaux inessentiels est inessentiel).

En effet, soit  $d$  un entier tel que  $S_k \subset \underline{q}$  pour  $k \geq d$ . Montrons que  $S_k \subset \underline{q}^2$  pour  $k \geq 2d+e-1$ . Soit en effet un produit  $x_1 \dots x_n$ , de degré  $k \geq 2d+e-1$ , dont les facteurs  $x_i$  sont homogènes de degrés  $\leq e$  ; considérons le plus petit  $i$  tel que  $x_1 \dots x_i$  soit de degré  $\geq d$  ; son degré est  $< d+e$ , donc le degré de  $x_{i+1} \dots x_n$  est  $> k-d-e$ , donc  $\geq d$ . Ainsi  $x_1 \dots x_n$  est égal au produit de deux éléments homogènes de degrés  $\geq d$ , et par suite appartient à  $\underline{q}^2$ .

Définition : soit  $E$  un  $S$ -module gradué (i.e. :  $E$  est gradué par des  $E_n$  tels que  $S_k E_n \subset E_{n+k}$ ). Un élément  $u \in S_k$  est superficiel pour  $E$  si,  $N$  désignant le noyau de l'homothétie  $x \rightarrow ux$  de  $E$ , la composante homogène  $N_n$  de  $N$  est nulle pour tout  $n$  assez grand.

Proposition 1.- Soit  $S$  un anneau gradué noethérien, engendré (comme anneau) par ses éléments homogènes de degré  $\leq e$ . Soit  $E$  un  $S$ -module gradué,

de type fini. Alors il existe des éléments superficiels pour E, de degré k arbitrairement grand.

Démonstration : considérons les idéaux premiers  $p_i$  associés à E (théorème 1). Etant donné un entier d, il existe un  $k \geq d$  et un élément  $u \in S_k$  qui n'appartient à aucun de ceux des  $p_i$  qui sont essentiels (lemme 3). On va montrer que u est superficiel pour E. Soit F l'annulateur de l'idéal  $S_u$ ; puisque  $\mathcal{O}(F)$  contient u, aucun des  $p_i$  essentiels ne contient  $\mathcal{O}(F)$ , et par suite (lemme 2)  $\mathcal{O}(F)$  contient un produit d'idéaux premiers inessentiels. D'après le lemme 4,  $\mathcal{O}(F)$  est inessentiel. Or le sous-module F est homogène, donc engendré par un nombre fini d'éléments homogènes; soit q un entier plus grand que les degrés des générateurs homogènes de F, et soit a tel que  $S_k \subset \mathcal{O}(F)$  pour tout  $k \geq a$ . Pour tout entier  $n \geq a+q$ , tout élément de  $F_n$  est somme de produits de la forme  $vy$ , avec  $v \in S_k$  ( $k \geq a$ ) et  $y \in F_r$  ( $r \leq q$ ), et par suite est nul. Ceci signifie que la composante  $N_n$  du noyau N de l'homothétie  $x \rightarrow ux$  est nulle. C.Q.F.D.

### 3.- Fonction caractéristique d'un module gradué.

Enonçons tout d'abord quelques propriétés des fonctions polynomiales. Soit  $f(n)$  une fonction définie pour tout entier n assez grand et à valeurs entières; on dit (par abus de langage) qu'elle est polynomiale s'il existe un polynôme  $P(n)$  tel que l'on ait  $f(n) = P(n)$  pour tout n assez grand; le degré de P s'appelle le degré de f.

Pour tout entier  $k \geq 0$  considérons le polynôme

$$\binom{X}{k} = X(X-1) \dots (X-k+1)/k! = \frac{X^k}{k!} + \dots ;$$

il est clair que les  $\binom{X}{k}$  ( $0 \leq k \leq n$ ) forment une base (sur les rationnels) de l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels de degré  $\leq n$ ; donc toute fonction polynomiale  $f(n)$  s'écrit d'une façon et d'une seule sous la forme

$$(4) \quad f(n) = \sum_{k \geq 0} \alpha_k \cdot \binom{n}{k}$$

pour n grand; les coefficients  $\alpha_k$  (en nombre fini) sont a priori des nombres rationnels; en fait ce sont des entiers: on le voit par récurrence sur le degré de f, en observant que de (4) résulte

$$(5) \quad \Delta f(n) = f(n+1) - f(n) = \sum_{k \geq 1} \alpha_k \cdot \binom{n}{k-1} .$$

Le même procédé montre d'ailleurs que f est polynomiale si et seulement si

$\Delta f$  l'est, et on a alors

$$\deg(f) = \deg(\Delta f) + 1 .$$

Précisons qu'une fonction polynomiale  $f$  sera de degré 0 si c'est (pour  $n$  grand) une constante non nulle, et de degré  $-1$  si elle est identiquement nulle (pour  $n$  grand).

Cela fait, rappelons qu'un anneau commutatif  $A$  est dit artinien si ses idéaux satisfont à la condition minimale. Nous admettrons sans démonstration que tout  $A$ -module  $E$  de type fini est alors de longueur finie, i.e. possède une suite de Jordan-Hölder  $0 = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_r = E$  telle que les quotients  $E_i/E_{i-1}$  ( $1 \leq i \leq r$ ) soient des modules simples ; la "longueur"  $r$  d'une telle suite ne dépend alors que de  $E$ , et on la notera  $lg(E)$ . En particulier,  $A$  est de longueur finie, donc est un anneau noethérien.

[N.B. dans le seul cas où nous appliquerons ces résultats (i.e. au paragraphe 4, où  $A$  est quotient d'un anneau local noethérien  $M$  par un idéal primaire  $\underline{q}$ ), ces résultats sont immédiats].

Tout sur-anneau  $S$  de  $A$ , engendré sur  $A$  par un nombre fini d'éléments  $X_1, \dots, X_r$ , est noethérien (Exposé 2, corollaire du théorème 1). Désormais, on supposera que  $S$  est un anneau gradué, engendré sur un  $A$  artinien (de degré 0) par des éléments  $X_i$  ( $0 \leq i \leq r$ ) de degré 1. Soit alors  $E$  un  $S$ -module gradué :  $E = \sum_n E_n$  ; chaque  $E_n$  est un  $A$ -module, et si  $E$  est un  $S$ -module de type fini, chaque  $E_n$  est un  $A$ -module de type fini, donc de longueur finie.

Proposition 2.- Sous les hypothèses précédentes, la fonction

$$\chi_E(n) = lg(E_n)$$

est polynomiale (pour  $n$  grand), et son degré  $d(E)$  est  $< r$ .

Démonstration : si  $r = 0$ , c'est-à-dire  $S = A$ , alors  $E$  est de longueur finie, donc  $E_n = 0$  pour  $n$  grand, et la proposition est démontrée dans ce cas. Raisonnons alors par récurrence sur le nombre  $r$  des générateurs  $X_i$ , la proposition étant supposée vraie pour  $r-1$  ( $r \geq 1$ ). Soit  $u$  l'endomorphisme de  $E$  défini par la multiplication par  $X_r$  ; on a une suite exacte de  $S$ -modules gradués de type fini

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow E \xrightarrow{u} E \longrightarrow Q \longrightarrow 0 ,$$

et en fait  $N$  et  $Q$  sont des modules gradués sur l'anneau  $A[X_1, \dots, X_{r-1}]$  ; donc  $\chi_N(n)$  et  $\chi_Q(n)$  sont des fonctions polynomiales en  $n$ , de degrés

$< r - 1$  . Or il est clair que, pour toute suite exacte

$$0 \rightarrow L_0 \rightarrow L_1 \rightarrow \dots \rightarrow L_m \rightarrow 0$$

de  $A$ -modules de longueur finie, on a la relation d'Euler-Poincaré

$$\sum_i (-1)^i \ell g(L_i) = 0 .$$

Puisque  $u$  est de degré  $+1$  , il vient ici

$$(6) \quad \chi_E(n+1) - \chi_E(n) = \chi_Q(n+1) - \chi_N(n) ,$$

et le second membre est une fonction polynomiale de  $n$  , de degré  $< r-1$  .  
Donc  $\chi_E(n)$  est une fonction polynomiale de degré  $< r$  .

Si  $d$  désigne le degré de  $\chi_E(n)$  , on a donc

$$(7) \quad \chi_E(n) = a \cdot \frac{n^d}{d!} + \dots ,$$

où  $a$  est un entier  $> 0$  . Pour que  $d = d(E)$  soit nul, il faut et il suffit que  $E$  soit  $\neq 0$  et de longueur finie.

La proposition 2 affirme que  $d(E) < r$  . Ce résultat ne peut pas être amélioré : prenons en effet pour  $E$  l'anneau  $S$  des polynômes à  $r$  lettres  $X_i$  . Les monômes de degré  $n$  en  $r$  variables sont au nombre de  $\binom{n+r-1}{r-1}$  , et par suite

$$(8) \quad \chi_S(n) = \ell g(A) \cdot \binom{n+r-1}{r-1}$$

est un polynôme en  $n$  de degré  $r-1$  exactement.

Revenons au cas général. Soit toujours  $E$  un  $S$ -module gradué de type fini, et soit  $u \in S_k$  . La suite exacte

$$0 \rightarrow N \rightarrow E \xrightarrow{u} E \rightarrow Q \rightarrow 0$$

montre que

$$\chi_E(n+k) - \chi_E(n) = \chi_Q(n+k) - \chi_N(n) .$$

On en déduit :

Proposition 3. - Si  $u$  est superficiel pour  $E$  (cf. paragraphe 2), on a

$$(9) \quad d(E/uE) = d(E) - 1 .$$

#### 4.- Modules de type fini sur un anneau local noethérien.

Soit  $M$  un anneau local noethérien (non nécessairement intègre). Conformément à la définition donnée dans l'Exposé 5 (paragraphe 1), on appellera idéal primaire de  $M$  tout idéal  $\neq M$  qui contient une puissance de l'idéal

maximal  $\underline{r}(M)$ . Si  $\underline{q}$  est un idéal primaire, l'anneau  $A = M/\underline{q}$  est artinien; en effet, il suffit de montrer que  $M/\underline{r}(M)^n$  est artinien; or chaque module  $\underline{r}(M)^k/\underline{r}(M)^{k+1}$  est de longueur finie, car c'est un espace vectoriel sur le corps  $M/\underline{r}(M)$ .

Soit  $\underline{q}$  un idéal primaire de  $M$ ; posons

$$G(\underline{q}; M) = \sum_{n \geq 0} \underline{q}^n / \underline{q}^{n+1}.$$

$G(\underline{q}; M)$  est évidemment une algèbre graduée  $S$  sur l'anneau  $A = M/\underline{q}$ , les éléments de  $\underline{q}^n / \underline{q}^{n+1}$  étant, par définition, de degré  $n$ . Supposons que  $\underline{q}$  soit engendré, comme idéal, par des éléments  $x_1, \dots, x_r$ ; alors les images de  $x_1, \dots, x_r$  dans  $\underline{q}/\underline{q}^2$  sont des éléments de  $S$  qui engendrent  $S$  comme algèbre sur  $A$ , et l'on se trouve dans la situation étudiée au paragraphe 3.

Soit  $E$  un  $M$ -module de type fini; posons

$$G(\underline{q}; E) = \sum_{n \geq 0} \underline{q}^n E / \underline{q}^{n+1} E;$$

on peut évidemment considérer  $G(\underline{q}; E)$  comme un module gradué, de type fini, sur l'algèbre graduée  $G(\underline{q}; M)$ . On notera que la longueur de  $\underline{q}^n E / \underline{q}^{n+1} E$  est la même, qu'on considère ce module comme  $A$ -module ou comme  $M$ -module (car il a les mêmes sous-modules).

D'après la proposition 2, la longueur de  $\underline{q}^n E / \underline{q}^{n+1} E$  est, pour  $n$  grand, une fonction polynomiale de degré  $< r$ , où  $r$  désigne le nombre minimum de générateurs de l'idéal  $\underline{q}$ . Introduisons la fonction de  $n$

$$\chi_E(\underline{q}; n) = \ell g(E/\underline{q}^n E).$$

On a évidemment

$$(10) \quad \chi_E(\underline{q}; n+1) - \chi_E(\underline{q}; n) = \ell g(\underline{q}^n E / \underline{q}^{n+1} E),$$

d'où

Théorème 2.- Soient  $M$  un anneau local noethérien,  $\underline{q}$  un idéal primaire de  $M$ , et  $E$  un  $M$ -module de type fini. Soit  $r$  le nombre minimum de générateurs de l'idéal  $\underline{q}$ . Alors la fonction  $\chi_E(\underline{q}; n) = \ell g(E/\underline{q}^n E)$  est (pour  $n$  grand) polynomiale de degré  $\leq r$ .

Montrons maintenant que le degré de la fonction polynomiale  $\chi_E(\underline{q}; n)$  est indépendant du choix de l'idéal primaire  $\underline{q}$ . En effet, si  $\underline{q}'$  est un autre idéal primaire, il existe un entier  $s$  tel que  $\underline{q}^s \subset \underline{q}'$ , d'où



$\underline{q}^{sn}E \subset \underline{q}'^nE$ , et par suite  $\chi_E(\underline{q}' ; n) \leq \chi_E(\underline{q} ; sn)$  ; donc le degré (en  $n$ ) du premier membre est au plus égal au degré du second. En échangeant les rôles de  $\underline{q}$  et de  $\underline{q}'$ , on voit que ces degrés sont égaux.

Ainsi on a

$$\chi_E(\underline{q} ; n) = e_E(\underline{q}) \cdot \frac{n^h}{h!} + \dots \quad \text{pour } n \text{ grand,}$$

où  $e_E(\underline{q})$  est un entier  $\geq 1$ , et  $h$  un entier indépendant de  $\underline{q}$ . Cet entier  $h$  s'appellera la hauteur du  $M$ -module  $E$  ; on le notera  $h(E)$ .

Il résulte de (10) que

$$(11) \quad h(E) = d(G(\underline{q} ; E)) + 1 .$$

### 5.- Systèmes de paramètres.

Prenons en particulier  $E = M$ . On peut considérer la hauteur  $h(M)$ . On va voir que, dans le cas où  $M$  est une localité sur un corps,  $h(M)$  est bien ce qu'on a appelé la hauteur (Exposé 5, paragraphe 1). Compte tenu de la proposition 3 de l'Exposé 5, cela va résulter du

Théorème 3.- Soit  $M$  un anneau local noethérien. La hauteur  $h(M)$  est le plus petit des entiers  $r$  tels qu'il existe un idéal primaire engendré par  $r$  éléments.

Démonstration : on sait déjà (théorème 2) que si un idéal primaire  $\underline{q}$  est engendré par  $r$  éléments, on a  $h(M) \leq r$ . Il reste à trouver un idéal primaire engendré par  $h(M)$  éléments.

On va prouver que c'est possible, par récurrence sur l'entier  $h(M)$ . Supposons d'abord  $h(M) = 0$  ; alors la suite des puissances  $\underline{r}(M)^n$  est stationnaire. Comme l'intersection des  $\underline{r}(M)^n$  est nulle (Exposé 2, théorème 3), on a  $\underline{r}(M)^n = 0$  pour  $n$  assez grand, donc l'idéal  $\{0\}$  est primaire ; comme il est engendré par zéro élément, l'assertion est démontrée dans ce cas.

Supposons maintenant  $h(M) \geq 1$ . Supposons qu'on ait trouvé un élément  $a \in \underline{r}(M)$  tel que l'anneau local  $M' = M/aM$  soit de hauteur  $h(M') = h(M) - 1$  ; par l'hypothèse de récurrence, il existe  $h(M) - 1$  éléments  $x_i \in \underline{r}(M)$  dont les images dans  $M'$  engendrent un idéal primaire de  $M'$  ; cela veut dire que l'idéal de  $M$  engendré par les  $x_i$  et  $a$  contient une puissance de  $\underline{r}(M)$ , autrement dit que c'est un idéal primaire de  $M$ .

Tout revient donc à trouver un  $a \in \underline{r}(M)$  tel que  $h(M/aM) = h(M) - 1$ . Posant  $M' = M/aM$ , ceci signifie (compte tenu de (11)) :

$$(12) \quad d(G(\underline{q} ; M)) = d(G(\underline{q}' ; M')) + 1 ,$$

en notant  $\underline{q}$  un idéal primaire de  $M$ , et  $\underline{q}'$  son image dans  $M'$ . Plus généralement, on va prouver :

Théorème 4. - Soit  $a \in \underline{q}^k$  tel que l'image  $u$  de  $a$  dans  $S_k = G_k(\underline{q} ; M)$  soit un élément superficiel (un tel  $a$  existe, d'après la proposition 1). Si  $E$  est un  $M$ -module de type fini, et  $E' = E/aE$  (module sur  $M' = M/aM$ ), on a

$$(13) \quad d(G(\underline{q} ; E)) = d(G(\underline{q}' ; E')) + 1 ,$$

en notant  $\underline{q}'$  l'image de  $\underline{q}$  dans  $M'$ .

D'après ce qu'on a vu, le théorème 3 résultera du théorème 4. Démontrons maintenant ce dernier. On va utiliser la proposition 3, en y remplaçant le module  $E$  par  $G(\underline{q} ; E)$ . Malheureusement on n'a pas ici identité des deux modules gradués  $G(\underline{q}' ; E')$  et  $G(\underline{q} ; E)/uG(\underline{q} ; E)$ ; cependant le résultat va être applicable, parce que ces deux modules gradués coïncident pour les degrés assez grands, comme on va le voir.

Cela revient à montrer que, pour  $n$  assez grand,

$$\underline{q}^n E / (\underline{q}^{n+1} E + (\underline{q}^n E) \cap (aE)) = \underline{q}^n E / (\underline{q}^{n+1} E + a \underline{q}^{n-k} E).$$

Il suffit de prouver

$$(14) \quad (\underline{q}^n E) \cap (aE) = a \underline{q}^{n-k} E \text{ pour } n \text{ grand.}$$

Le second membre étant évidemment contenu dans le premier, il suffit de prouver

$$(15) \quad (\underline{q}^n E) \cap (aE) \subset a \underline{q}^{n-k} E \text{ pour } n \text{ grand.}$$

Or, d'après le théorème de Krull-Artin (Exposé 2, théorème 2), il existe un entier  $t$  tel que, pour  $n \geq t$ ,

$$(16) \quad (\underline{q}^n E) \cap (aE) \subset a \underline{q}^{n-t} E ;$$

ceci prouve (15) si  $t \leq k$ . Si  $t > k$ , puisque  $u$  est superficiel, la multiplication par  $u$  définit une application  $G_{m-k}(\underline{q} ; E) \rightarrow G_m(\underline{q} ; E)$  dont le noyau est nul si  $m \geq m_0$  ( $m_0$  entier convenable). Ceci implique que

$$(a \underline{q}^{m-k} E) \cap (\underline{q}^{m+1} E) \subset a \underline{q}^{m-k+1} E \text{ pour } m \geq m_0 .$$

Appliquons ceci successivement pour  $m = n-t+k, \dots, n-1$ , en supposant  $n > m_0$ ; on voit que

$$(a \underline{q}^{n-t} E) \cap (\underline{q}^n E) \subset a \underline{q}^{n-k} E \text{ pour } n > m_0 \text{ et } n \geq t .$$

Ceci, joint à (16), donne (15), ce qui achève la démonstration du théorème 4, et en même temps celle du théorème 3.

Soit alors  $M$  un anneau local noethérien, et soit  $h$  sa hauteur. On appelle système de paramètres de  $M$  toute suite de  $h$  éléments  $x_1, \dots, x_h$  de  $\mathfrak{r}(M)$  qui engendrent un idéal primaire de  $M$ . Etant donnée une telle suite, pour tout entier  $i$  tel que  $1 \leq i \leq h$ , l'anneau quotient  $M/(x_1, \dots, x_i)$  est de hauteur  $h-i$  ; en effet, les classes de  $x_{i+1}, \dots, x_h$  dans cet anneau quotient forment un système de paramètres.

Lorsque  $M$  est une localité sur un corps, la hauteur  $h$  est aussi le maximum de la longueur des chaînes d'idéaux premiers de  $M$ . On peut démontrer que ce résultat subsiste pour tout anneau local noethérien.

---