

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

J. LAFON

Anneaux noethériens

Séminaire Henri Cartan, tome 8 (1955-1956), exp. n° 2, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1955-1956__8__A2_0>

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1955-1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Séminaire E.N.S., 1955-56
(H. CARTAN et C. CHEVALLEY)

ANNEAUX NOETHÉRIENS.

(Exposé de J. LAFON, 14.11.1955)

Observation sur l'Exposé 1 : on peut donner, du théorème 3, (a) de l'Exposé 1, une démonstration directe qui n'utilise pas la théorie des anneaux de valuation. Il s'agit de prouver ceci : soit A un sous-anneau d'un anneau d'intégrité B , B entier sur A . Si \underline{p} est un idéal premier de A , il existe un idéal premier \underline{q} de B tel que $\underline{q} \cap A = \underline{p}$.

Posons $A - \underline{p} = S$. On va montrer que si \underline{m} est un idéal maximal de l'anneau de fractions B_S , $\underline{m} \cap B = \underline{q}$ répond à la question ; autrement dit, que $\underline{m} \cap A = \underline{p}$.

B_S est entier sur A_S , qui est un anneau local dont l'idéal maximal est $\underline{p}A_S$; on a $(\underline{p}A_S) \cap A = \underline{p}$ (Exposé 1, proposition 1, (b)). D'après la proposition 7 de l'Exposé 1, $\underline{p}A_S$ est contenu dans le radical de B_S , donc dans \underline{m} . Ainsi $\underline{m} \cap A_S \supset \underline{p}A_S$, et puisque $\underline{m} \cap A_S$ est premier, on a $\underline{m} \cap A_S = \underline{p}A_S$. D'où $\underline{m} \cap A = (\underline{m} \cap A_S) \cap A = (\underline{p}A_S) \cap A = \underline{p}$.

Remarque : le théorème et sa démonstration s'étendent au cas où B n'est pas supposé intègre ; il faut alors faire usage de l'anneau de fractions B_S , mais cette notion n'a pas été définie dans l'Exposé 1.

1.- Modules noethériens.

Proposition 1.- Pour un module M sur un anneau A , les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) tout ensemble non vide de sous-modules de M admet au moins un élément maximal (pour la relation d'inclusion) ;
- (ii) toute suite croissante de sous-modules M_n de M ($M_n \subset M_{n+1}$) est stationnaire (i.e: $M_n = M_{n+1}$ pour n assez grand) ;
- (iii) tout sous-module de M est de type fini (i.e: engendré par un système fini d'éléments).

L'équivalence de (i) et (ii) est classique, et d'ailleurs purement ensembliste. Montrons que (i) entraîne (iii) : soit N un sous-module de M ;

soit N' un élément maximal de l'ensemble des sous-modules de type fini de N . On a $N' = N$, car si $a \in N$ et $a \notin N'$, le sous-module engendré par N' et a serait de type fini et $\neq N'$, contrairement à l'hypothèse de maximalité faite sur N' . Ainsi N est de type fini.

Enfin, (iii) entraîne (ii) : soit N la réunion d'une suite croissante de sous-modules M_n ; N est engendré par un système fini d'éléments; ceux-ci appartiennent à un M_k , et par suite $M_n = M_k$ pour $n \geq k$.

Remarque : si un module M satisfait aux conditions de la proposition 1, tout système S de générateurs de M contient une partie finie S' qui engendre M . En effet, l'ensemble des modules engendrés par les parties finies de S possède un élément maximal, qui est nécessairement M .

Définition : on appelle module noethérien un module M qui satisfait aux trois conditions (équivalentes) (i), (ii), (iii) de la proposition 1.

Proposition 2. - Soit une suite exacte de modules $0 \rightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \rightarrow 0$. Pour que M soit noethérien, il faut et il suffit que N et P soient noethériens.

La condition est nécessaire : à toute suite croissante de sous-modules de N (resp. de P), on associe la suite croissante des images directes dans M (resp. des images réciproques dans M), qui est stationnaire. La condition est suffisante : soit $\{M_n\}$ une suite croissante de sous-modules de M ; soit P_n l'image directe de M_n dans P , et soit N_n l'image réciproque de M_n dans N ; puisque N et P sont noethériens, on a $N_{n+1} = N_n$ et $P_{n+1} = P_n$ pour n assez grand. Soit alors $x \in M_{n+1}$. Puisque $P_{n+1} = P_n$, il y a un $x' \in M_n$ tel que $g(x-x') = 0$, d'où $x - x' \in f(N)$; comme $x, x' \in M_{n+1}$, on a $x - x' \in f(N_{n+1}) = f(N_n)$, puisque $N_{n+1} = N_n$; on a donc $x - x' \in M_n$, d'où $x \in M_n$, et $M_{n+1} = M_n$.

Corollaire : Si un module M est somme d'une famille finie de sous-modules noethériens M_i , M est noethérien.

On procède par récurrence sur le nombre des M_i , ce qui ramène la démonstration au cas de deux sous-modules M_1 et M_2 . Alors M/M_1 s'identifie à un quotient de M_2 , donc est noethérien; puisque M_1 et M/M_1 sont noethériens, M est noethérien.

2.- Anneaux noethériens.

Définition : un anneau A est dit noethérien s'il est noethérien comme A -module. Les propriétés (i), (ii) et (iii) de la proposition 1 valent alors pour les idéaux de A .

Proposition 3.- Tout module M de type fini sur un anneau noethérien est un module noethérien.

En effet, M est une somme finie de sous-modules monogènes, dont chacun est noethérien (quotient du A -module A); il suffit alors d'appliquer le corollaire de la proposition 2.

Proposition 4.- Soit A un anneau d'intégrité noethérien, et soit S une partie non vide, multiplicativement stable, de A ne contenant pas 0 . Alors l'anneau A_S est noethérien.

En effet, soit une suite croissante d'idéaux \underline{m}'_n de A_S ; les idéaux $\underline{m}_n = \underline{m}'_n \cap A$ de A forment une suite croissante, donc stationnaire; la suite \underline{m}'_n est donc stationnaire, en vertu de la proposition 1, (a) de l'Exposé 1.

Théorème 1 (Hilbert).- Si un anneau A est noethérien, l'anneau des polynomes $A[X]$ est noethérien.

Démonstration : soit \underline{a} un idéal de $A[X]$; soit M_n le A -module des polynomes de degré $\leq n$, et $\underline{a}_n = \underline{a} \cap M_n$. Le A -module \underline{a}_n est de type fini, puisque sous-module de M_n qui est somme directe de $n+1$ modules isomorphes à A . Pour tout $\mu \in M_n$, notons $f_n(\mu)$ le coefficient de X^n dans μ ; f_n est une forme linéaire sur M_n , donc l'image $f_n(\underline{a}_n) = \underline{b}_n$ est un idéal de A . Si $\mu \in \underline{a}_n$, alors $X\mu \in \underline{a}_{n+1}$ et $f_{n+1}(X\mu) = f_n(\mu)$; donc $\underline{b}_n \subset \underline{b}_{n+1}$. Puisque A est noethérien, il existe un entier p tel que $\underline{b}_n = \underline{b}_p$ pour $n \geq p$.

Montrons, par récurrence sur $n \geq p$, que \underline{a}_n est contenu dans l'idéal de $A[X]$ engendré par \underline{a}_p . C'est trivial pour $n = p$; supposons-le vrai pour $n-1$ ($n > p$), et montrons-le pour n . Soit $\mu \in \underline{a}_n$; puisque $f_n(\mu) \in \underline{b}_p$, il existe $\nu \in \underline{a}_p$ tel que $f_p(\nu) = f_n(\mu)$; donc $f_n(\mu - X^{n-p}\nu) = 0$, c'est-à-dire $\mu - X^{n-p}\nu \in \underline{a}_{n-1}$, et par suite μ est dans l'idéal de $A[X]$ engendré par \underline{a}_p .

Ainsi \underline{a} est l'idéal de $A[X]$ engendré par \underline{a}_p . Un système fini de générateurs de \underline{a}_p comme A -module engendre donc \underline{a} comme $A[X]$ -module, et ceci achève la démonstration.

Corollaire du théorème 1 : Soit B un sur-anneau d'un anneau noethérien A , engendré (comme anneau) par A et un nombre fini d'éléments $x_i \in B$; alors B est noethérien.

En effet, on se ramène par récurrence au cas où B est engendré par A et un élément x ; alors B est isomorphe à un quotient de $A[X]$.

3.- Théorème de Krull-Artin et ses conséquences.

Rappelons la notation classique : si M est un A -module, et \underline{a} un idéal de A , on note $\underline{a}M$ le sous-module de M , formé des sommes finies d'éléments de la forme ax , avec $a \in \underline{a}$, $x \in M$. On applique cette notation au cas où M est aussi un idéal : d'où la notion de produit de deux idéaux, et de puissance \underline{a}^n d'un idéal \underline{a} .

Théorème 2.- Soient \underline{a} un idéal d'un anneau noethérien A , N un A -module de type fini, et P un sous-module de N . Il existe un entier $h \geq 0$ tel que

$$(\underline{a}^n N) \cap P = \underline{a}^{n-h} ((\underline{a}^h N) \cap P) \text{ pour tout } n \geq h.$$

Démonstration : il est évident que

$$\underline{a}^{n-h} ((\underline{a}^h N) \cap P) \subset (\underline{a}^n N) \cap P.$$

On va montrer l'inclusion en sens contraire. Soit (u_1, \dots, u_r) un système fini de générateurs de l'idéal \underline{a} ; et soit (μ_1, \dots, μ_s) un système fini de générateurs du module N . Tout élément de $\underline{a}^n N$ s'écrit

$$\sum_{1 \leq j \leq s} F_j(u_1, \dots, u_r) \mu_j$$
, où $F_j(X_1, \dots, X_r)$ est un élément homogène de degré n de l'anneau des polynomes $A[X_1, \dots, X_r] = \Pi$. Le produit Π^s de s exemplaires de Π est un Π -module noethérien. Soit S l'ensemble des $(F_1, \dots, F_s) \in \Pi^s$ tels que F_1, \dots, F_s soient homogènes d'un même degré, et que $\sum_{1 \leq j \leq s} F_j(u_1, \dots, u_r) \mu_j \in P$. Le sous-module de Π^s engendré par S est engendré par une partie finie $\{\tilde{F}^{(k)}\}$ de S , avec

$\tilde{F}^{(k)} = (F_1^{(k)}, \dots, F_s^{(k)})$; soit n_k le degré commun des polynomes homogènes $F_1^{(k)}, \dots, F_s^{(k)}$. Alors $\nu^{(k)} = \sum_{1 \leq j \leq s} F_j^{(k)}(u_1, \dots, u_r) \mu_j \in (\underline{a}^{n_k} N) \cap P$.

Prenons $h = \sup n_k$, et soit n un entier $\geq h$. Soit $\nu \in (\underline{a}^n N) \cap P$; on a $\nu = \sum_j F_j(u_1, \dots, u_r) \mu_j$, et $\tilde{F} = (F_1, \dots, F_s) \in S$. Donc

$$\tilde{F} = \sum_k H_k \tilde{F}^{(k)}$$
, où $H_k(X_1, \dots, X_r) \in \Pi$ est homogène de degré $n - n_k$.

Ainsi $\nu = \sum_k H_k(u_1, \dots, u_r) \nu^{(k)}$. Or

$$H_k(u_1, \dots, u_r) \nu^{(k)} \in \underline{a}^{n-nk}((\underline{a}^{nk}N) \cap P) \subset \underline{a}^{n-h}((\underline{a}^hN) \cap P) .$$

Finalement $\nu \in \underline{a}^{n-h}((\underline{a}^hN) \cap P)$, ce qui prouve l'inclusion

$$(\underline{a}^nN) \cap P \subset \underline{a}^{n-h}((\underline{a}^hN) \cap P) .$$

Corollaire : Soient $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_r$ des idéaux (en nombre fini) d'un anneau noethérien A . Il existe un entier $h > 0$ tel que

$$(\underline{a}_1)^h \cap \dots \cap (\underline{a}_r)^h \subset \underline{a}_1 \dots \underline{a}_r .$$

(au second membre figure le produit des idéaux \underline{a}_i).

L'assertion est triviale pour $r = 1$. Supposons-la vraie pour $r - 1$ ($r > 1$), et appliquons le théorème en prenant $\underline{a} = \underline{a}_1$, $N = A$,

$P = (\underline{a}_2)^{h'} \cap \dots \cap (\underline{a}_r)^{h'}$, h' étant tel que

$(\underline{a}_2)^{h'} \cap \dots \cap (\underline{a}_r)^{h'} \subset \underline{a}_2 \dots \underline{a}_r$. D'après le théorème, il existe h'' tel que

$$(\underline{a}_1)^{h''} \cap (\underline{a}_2)^{h'} \cap \dots \cap (\underline{a}_r)^{h'} \subset \underline{a}_1((\underline{a}_2)^{h'} \cap \dots \cap (\underline{a}_r)^{h'}) .$$

Il suffit alors de prendre $h = \sup(h', h'')$.

Théorème 3. - Soit \underline{r} le radical d'un anneau noethérien A . Pour tout A -module de type fini M , on a

$$\bigcap_n (\underline{r}^n M) = 0 .$$

Démonstration : soit $P = \bigcap_n (\underline{r}^n M)$. On a $P \subset M$, donc P est de type fini. D'après le théorème 2, il existe un entier h tel que

$$(\underline{r}^n M) \cap P = \underline{r}^{n-h}(\underline{r}^h M \cap P) \quad \text{pour } n \geq h .$$

Prenant $n = h + 1$, il vient $P = \underline{r}P$, et ceci implique $P = 0$ (Exposé 1, Appendice).

Interprétation : sur le module de type fini M , considérons la topologie définie par les sous-modules $\underline{i}^n M$, \underline{i} étant un idéal de A contenu dans le radical. Le théorème 3 affirme que cette topologie est séparée (l'intersection des voisinages de 0 est réduite à 0). Pour cette topologie, tout sous-module N est fermé (car le module quotient M/N est séparé); de plus, la topologie définie sur N par les sous-modules $\underline{i}^n N$ est la topologie induite par celle de M , en vertu du théorème 2.

Remarque : le théorème 3 s'applique notamment lorsque A est un anneau

local noethérien, \underline{r} étant alors l'idéal maximal de A .

4.- Idéaux premiers contenant un idéal donné.

Voici une proposition préliminaire, valable pour tout anneau (non nécessairement noethérien) :

Proposition 5.- Dans un anneau A , l'intersection de tous les idéaux premiers de A se compose des éléments nilpotents.

Démonstration : il est clair qu'un élément nilpotent appartient à tout idéal premier. Réciproquement, soit $\underline{i}(A)$ l'intersection des idéaux premiers de A ; si A est sous-anneau d'un anneau B , $\underline{i}(A)$ est contenu dans le radical $\underline{r}(B)$: car si \underline{m} est un idéal maximal de B , $\underline{m} \cap A$ est premier. Prenons en particulier $B = A[X]$; si $a \in \underline{i}(A)$, aX est dans le radical de $A[X]$, donc $1 - aX$ est inversible dans $A[X]$, ce qui implique que $a^n = 0$ pour un entier n convenable.

(Remarque : on peut donner une autre démonstration : si $a \in A$ n'est pas nilpotent, on montre l'existence d'un idéal premier ne contenant pas a . Pour cela, on utilise l'anneau de fractions A_S , où S désigne l'ensemble des puissances de a ; mais comme dans l'Exposé 1, la théorie des anneaux de fractions n'a été faite que pour un anneau d'intégrité, nous ne donnons pas ici cette démonstration).

Proposition 6.- Soit \underline{q} un idéal de A ; soit \underline{q}' l'intersection des idéaux premiers contenant \underline{q} . Tout élément de \underline{q}' possède une puissance dans \underline{q} . Si de plus A est noethérien, on a $\underline{q}'^n \subset \underline{q}$ pour un entier n convenable.

Démonstration : la première assertion résulte de la proposition 5, appliquée à l'anneau quotient A/\underline{q} . Supposons A noethérien, et soit $\{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble fini de générateurs de \underline{q}' ; pour chaque i il y a un $n(i)$ tel que $x_i^{n(i)} \in \underline{q}$. Soit $n = n(1) + \dots + n(r)$; tout produit de n éléments de l'ensemble $\{x_1, \dots, x_r\}$ est alors dans \underline{q} , d'où $\underline{q}'^n \subset \underline{q}$.

Théorème 4.- Soient A un anneau noethérien, et \underline{q} un idéal de A . Dans l'ensemble des idéaux premiers contenant \underline{q} , il existe des éléments minimaux \underline{p}_i ; ceux-ci sont en nombre fini, et tout idéal premier contenant \underline{q} contient l'un des \underline{p}_i .

Corollaire : avec les notations de la proposition 6, on a $\underline{q}' = \bigcap_i \underline{p}_i$, d'où :

$$\underline{q} \subset \bigcap_i \underline{p}_i, \quad \underline{q} \supset \left(\bigcap_i \underline{p}_i \right)^n \text{ pour un entier } n \text{ convenable.}$$

Démonstration du théorème : on utilisera un lemme de la théorie des ensembles, qui est utile en diverses circonstances :

Lemme : Soit E un ensemble de parties d'un ensemble A , tel que l'intersection de deux éléments de E appartienne à E , et que toute suite croissante d'éléments de E soit stationnaire. Un $a \in E$ est dit réductible s'il existe $b \in E$, $c \in E$ tels que $a = b \cap c$, $b \neq a$, $c \neq a$; a est dit irréductible dans le cas contraire. Alors tout $a \in E$ est intersection d'un nombre fini d'éléments irréductibles. De plus, s'il est vrai qu'un élément irréductible ne peut jamais contenir une intersection $b \cap c$ sans contenir b ou c , alors l'ensemble des éléments irréductibles qui contiennent un élément donné $a \in E$ possède des éléments minimaux p_i ; ceux-ci sont en nombre fini, et tout élément irréductible qui contient a contient l'un d'eux; a est donc l'intersection des p_i .

La démonstration du lemme est immédiate; on la laisse au lecteur.

Revenons alors au théorème 4. Prenons pour E l'ensemble des idéaux de A qui sont intersection (finie ou infinie) d'idéaux premiers. On va montrer : pour qu'un idéal $\underline{a} \in E$ soit irréductible (au sens du lemme), il faut et il suffit que \underline{a} soit un idéal premier.

Tout d'abord, si \underline{a} n'est pas premier, \underline{a} est réductible; en effet, soient $x \in A$, $y \in A$ tels que $xy \in \underline{a}$, $x \notin \underline{a}$, $y \notin \underline{a}$. Pour tout idéal premier \underline{p} contenant \underline{a} , on a $x \in \underline{p}$ ou $y \in \underline{p}$; donc $\underline{a} = \underline{b} \cap \underline{c}$, \underline{b} désignant l'intersection des idéaux premiers contenant \underline{a} et l'élément x , et \underline{c} désignant l'intersection des idéaux premiers contenant \underline{a} et l'élément y . Comme $x \in \underline{b}$ et $x \notin \underline{a}$, on a $\underline{b} \neq \underline{a}$; de même $\underline{c} \neq \underline{a}$. Donc \underline{a} est réductible.

Maintenant, montrons que si $\underline{a} \supset \underline{b} \cap \underline{c}$, $\underline{a} \not\subset \underline{b}$, $\underline{a} \not\subset \underline{c}$, alors \underline{a} n'est pas premier. En effet, soient $x \in A$ et $y \in A$ tels que $x \in \underline{b}$, $x \notin \underline{a}$, $y \in \underline{c}$, $y \notin \underline{a}$. Alors $xy \in \underline{a}$, ce qui montre que \underline{a} n'est pas premier. En particulier, si \underline{a} est réductible, \underline{a} n'est pas premier.

Ainsi les éléments irréductibles de l'ensemble E sont exactement les idéaux premiers de l'anneau A . Et si un \underline{a} irréductible contient une intersection $\underline{b} \cap \underline{c}$ d'éléments de E , alors \underline{a} contient \underline{b} ou \underline{c} . Le lemme est donc applicable, et donne le théorème.

5.- Anneaux noethériens normaux.

Proposition 7.- Soit B un anneau local, noethérien et intègre. Si l'idéal maximal \underline{m} de B est principal, B est un anneau de valuation de

son corps des fractions K , et tout idéal non nul de B est une puissance de
l'idéal maximal.

Démonstration : l'intersection des puissances \underline{m}^k est réduite à 0 (théorème 3). Soit $u \in B$, $u \neq 0$; soit n le plus grand entier k tel que $u \in \underline{m}^k$. Si z est un générateur de l'idéal principal \underline{m} , on a

$$z^{-n}u \in B, \quad z^{-n}u \notin zB = \underline{m},$$

et par suite $z^{-n}u$ est un élément inversible de B . Donc l'idéal principal uB est égal à $z^n B = \underline{m}^n$.

Tout idéal $\neq 0$ de B étant une somme d'idéaux principaux $\neq 0$ est aussi une puissance \underline{m}^n . Soit alors $v \in K$, $v \neq 0$; on a $v = u/u'$, $u \in B$, $u' \in B$; il existe des entiers $n \geq 0$ et $p \geq 0$ tels que u/z^n et u'/z^p soient des éléments inversibles de B ; donc v ou v^{-1} appartient à B , qui est bien un anneau de valuation de K .

Théorème 5.- Soit A un anneau d'intégrité noethérien, intégralement
fermé dans son corps des fractions K . Soit $x \in A$, $x \neq 0$. Soit \underline{p} l'un
des éléments minimaux de l'ensemble des idéaux premiers contenant x (théorème 4). Alors :

1°) l'idéal maximal $\underline{p}A_{\underline{p}} = \underline{m}$ de l'anneau local $A_{\underline{p}}$ est engendré par un
élément de \underline{p} (donc $A_{\underline{p}}$ est un anneau de valuation de K , d'après la proposition 7) ;

2°) \underline{p} est minimal dans l'ensemble de tous les idéaux $\neq 0$ de A .

Démonstration : d'après la correspondance entre idéaux premiers de $A_{\underline{p}}$ et idéaux premiers de A contenus dans \underline{p} (Exposé 1, proposition 1), l'idéal maximal $\underline{p}A_{\underline{p}} = \underline{m}$ est l'unique idéal premier de $A_{\underline{p}}$ contenant x . Donc (proposition 6) on a $\underline{m}^k \subset xA_{\underline{p}}$ pour k assez grand. Soit n le plus petit des entiers k ayant cette propriété ; on a $n \geq 1$. Choisissons $y \in \underline{m}^{n-1}$ tel que $y \notin xA_{\underline{p}}$; on a $ym \subset xA_{\underline{p}}$. D'où, en posant $xy^{-1} = z \in K$:

$$(1) \quad z^{-1} \notin A_{\underline{p}}, \quad z^{-1}\underline{m} \subset A_{\underline{p}}.$$

On va montrer que $z^{-1}\underline{m} = A_{\underline{p}}$. Comme $z^{-1}\underline{m}$ est un idéal de $A_{\underline{p}}$, il suffit de montrer que $z^{-1}\underline{m} \not\subset \underline{m}$. Raisonnons par l'absurde : si $z^{-1}\underline{m} \subset \underline{m}$, on a $z^{-k}\underline{m} \subset \underline{m}$ pour tout entier $k \geq 0$, donc $z^{-k}x \in \underline{m}$. Ainsi l'anneau $A_{\underline{p}}[z^{-1}]$ est contenu dans $x^{-1}A_{\underline{p}}$, qui est un $A_{\underline{p}}$ -module monogène. Comme $A_{\underline{p}}$ est un anneau noethérien (proposition 4), l'anneau $A_{\underline{p}}[z^{-1}]$ est un $A_{\underline{p}}$ -module de

