M. Lazard

Algèbres affines

Séminaire Henri Cartan, tome 8 (1955-1956), exp. nº 4, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1955-1956__8__A4_0>

Séminaire E.N.S., 1955/56
(H. CARTAN et C. CHEVALLEY)

ALGÈBRES AFFINES

(Exposé de M. LAZARD, 28.11.1955)

1.- Algèbres affines : lemme de Fr. Noether.

Soit K un corps (commutatif). On appelle algèbre affine sur K une K-algèbre unitaire A (associative et commutative) qui est un anneau d'intégrité et qui possède un nombre fini de générateurs. Il revient au même de dire que A est le quotient par un idéal premier d'une algèbre de polynomes en un nombre fini d'indéterminées sur K. Une algèbre de polynome en un nombre fini d'indéterminées sera appelée une algèbre affine pure.

Tout quotient d'une algèbre affine A sur K par un idéal premier de A est une algèbre affine (rappelons que, d'après nos conventions, un idéal premier de A est distinct de A tout entier).

Si A est une algèbre affine sur K, on désigne par $\mathfrak{F}(A)$ son corps des fractions, et on appelle dimension de A le degré de transcendance de $\mathfrak{F}(A)$ sur K.

Proposition 1.- (Fr. Noether). Soit A une algèbre affine. Il existe une sous-algèbre pure B de A telle que A soit entier sur B. De plus, si $\mathfrak{a}$ est un idéal de A, on peut choisir B de la forme $K[y_1, \ldots, y_s]$, où $y_1, \ldots, y_s$ sont algébriquement indépendants sur K et tels que, pour un entier r convenable et $\leq s$, $\mathfrak{a} \cap B$ soit engendré par $y_1, \ldots, y_r$.

La démonstration sera précédée de deux lemmes.

Lemme 1. Soit $A = K[x_1, \ldots, x_n]$ une algèbre affine sur K, et soit y_1 un élément de A n'appartenant pas à K ; il y a alors des éléments $y_2, \ldots, y_n$ de A tels que A soit entier sur $K[y_1, \ldots, y_n]$.

Soit $y_1 = P(x_1, \ldots, x_n)$, P étant un polynome à coefficients dans K. Posons $P(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i=0}^{h} P_i(X_2, \ldots, X_n)X_1^i$, avec $P_h \neq 0$; on a $h > 0$. Si P_h est une constante $c \neq 0$, l'équation $c^{-1}P(X_1, x_2, \ldots, x_n) - c^{-1}y_1 = 0$, qui admet x_1 comme racine, est une équation de dépendance intégrale de x_1 par rapport à l'anneau $K[y_1, x_2, \ldots, x_n]$; on peut alors prendre $y_i = x_i$ pour $i > 1$. Dans le cas général, nous poserons $y_i = x_i - x_1^{m_i}$ $(i > 1)$, où les m_i sont des entiers que nous choisirons de telle manière que x_1 soit entier sur $K[y_1 , y_2 , \ldots , y_n]$. Pour montrer que ce choix est possible, observons que le résultat de la substitution $X_i \to Y_i + X_1^{m_i}$ $(i > 1)$ dans un monôme $cX_1^{p_1} \ldots X_n^{p_n}$ est un polynome dont le terme de plus haut degré en X_1 est $cX_1^{p_1+p_2m_2+\ldots+p_nm_n}$. Si donc nous choisissons $m_2 , \ldots , m_n$ de telle manière que les nombres $p_1 + p_2m_2 + \ldots + p_nm_n$ relatifs à tous les monômes qui interviennent effectivement dans P soient tous distincts les uns des autres, le polynome $P(X_1 , Y_2 + X_1^{m_2} , \ldots , Y_n + X_1^{m_n})$, ordonné par rapport aux puissances de X_1 , aura un coefficient dominant constant ; comme $P(x_1 , y_1 + x_1^{m_2} , \ldots , y_n + x_1^{m_n}) = y_1$, x_1 sera entier sur $K[y_1 , \ldots , y_n]$. Or, il suffira de prendre $m_i = (d+1)^{i-1}$, où d est le plus grand des degrés de P par rapport à ses arguments.

Remarque : Si K est un corps infini, on voit facilement qu'il existe des y_i de la forme $x_i + t_i x_1$ (les t_i étant des éléments convenablement choisis de K) qui possèdent la propriété requise.

Lemme 2. Soit $\underline{a}$ un idéal d'une algèbre affine $K[x_1 , \ldots , x_n]$ engendrée par n éléments. Il existe des éléments $y_1 , \ldots , y_n$ de A et un entier $r \leq n$ qui possèdent les propriétés suivantes : a) $y_1 , \ldots , y_r$ sont dans $\underline{a}$; b) $\underline{a} \cap K[y_{r+1} , \ldots , y_n] = \{0\}$; c) A est entier sur $K[y_1 , \ldots , y_n]$.

Le lemme est évident si $n = 0$; supposons que $n > 0$ et que le lemme soit vrai pour $n-1$. Le lemme est évident si $\underline{a} = 0$ ou si $\underline{a} = A$; supposons ces deux cas exclus. Soit y_1 un élément $\neq 0$ de $\underline{a}$, et soient $z_2 , \ldots , z_n$ des éléments de A tels que A soit entier sur $K[y_1 , z_2 , \ldots , z_n]$ (lemme 1 ; y_1 ne peut être dans K) . Appliquons l'hypothèse inductive à l'algèbre $B = K[z_2 , \ldots , z_n]$ et à l'idéal $\underline{a} \cap B$: il y a des éléments $y_2 , \ldots , y_n$ de B et un $r \leq n$ tels que $y_2 , \ldots , y_r \in \underline{a}$, que $\underline{a} \cap K[y_{r+1} , \ldots , y_n] = \{0\}$ et que B soit entier sur $K[y_2 , \ldots , y_n]$. Les éléments $y_1 , \ldots , y_n$ possèdent alors les propriétés requises.

Démontrons maintenant la proposition 1. On peut supposer que $A = K[X_1, \dots, X_n]/\underline{p}$, $\underline{p}$ étant un idéal premier de l'algèbre de polynomes $K[X_1, \dots, X_n]$. Il existe des éléments $Z_1, \dots, Z_n$ de $K[X_1, \dots, X_n]$ qui possèdent les propriétés suivantes (où s est un entier convenable) : $Z_1, \dots, Z_{n-s}$ appartiennent à $\underline{p}$, $\underline{p} \cap K[Z_{n-s+1}, \dots, Z_n] = 0$ et A est entier sur $K[Z_1, \dots, Z_n]$. Si y'_i est l'image de Z_{n-s+i} dans A, les éléments $y'_1, \dots, y'_s$ sont algébriquement indépendants sur K (puisque $\underline{p} \cap K[Z_{n-s+1}, \dots, Z_n] = \{0\}$) et engendrent l'image de $K[Z_1, \dots, Z_n]$ dans A (puisque $Z_1, \dots, Z_{n-s}$ sont dans $\underline{p}$). Ceci démontre la première assertion. Appliquons le lemme 2 à l'algèbre $K[y'_1, \dots, y'_s]$ et à l'idéal $\underline{a} \cap K[y'_1, \dots, y'_s]$: il y a des éléments $y_1, \dots, y_s$ de $K[y'_1, \dots, y'_s]$ et un $r \leq s$ tels que $y_1, \dots, y_r \in \underline{a}$, que $\underline{a} \cap K[y_{r+1}, \dots, y_s] = \{0\}$ et que $K[y'_1, \dots, y'_s]$ soit entier sur $K[y_1, \dots, y_s]$. Il est clair que $y_1, \dots, y_r$ engendrent l'idéal $\underline{a} \cap K[y_1, \dots, y_s]$. Comme le corps $K(y'_1, \dots, y'_s)$ est algébrique sur $K(y_1, \dots, y_s)$, les éléments $y_1, \dots, y_s$ sont algébriquement indépendants par rapport à K.

<u>Remarque</u> : La conclusion de la proposition 1 vaut encore si, au lieu de supposer A affine, on suppose que c'est le quotient d'une algèbre de polynomes par un idéal <u>quelconque</u> de cette algèbre.

2.- <u>La fermeture intégrale d'une algèbre affine.</u>

<u>Théorème 1.- Soient A une algèbre affine sur un corps K et L un sur-corps du corps des fractions $\mathcal{F}(A)$ de A, algébrique et de degré fini sur $\mathcal{F}(A)$. La fermeture intégrale A' de A dans L est alors une algèbre affine sur K et est un A-module noethérien.</u>

Si B est une sous-algèbre de A sur laquelle A est entier, L est de degré fini sur le corps $\mathcal{F}(B)$ des fractions de B (puisque A admet un ensemble fini de générateurs) et A' est la fermeture intégrale de B dans L ; de plus, si A' est un B-module noethérien, c'est a fortiori un A-module noethérien, donc une algèbre affine. Tenant compte de la proposition 1 , il suffira donc de démontrer le théorème 2 dans le cas où A est une algèbre affine pure. L'anneau A est alors un anneau factoriel, c'est-à-dire que tout idéal principal se décompose d'une manière unique en produit d'idéaux principaux premiers.

Lemme 3. Tout anneau d'intégrité factoriel est intégralement clos.

Soit A un tel anneau, et soit $x = ab^{-1}$ (a , $b \in A$) un élément du corps des fractions de A entier sur A ; il y a donc une relation de la forme $x^n = \sum_{i=1}^{n} c_i x^{n-i}$ ($c_i \in A$) , d'où $a^n = b \sum_{i=1}^{n} c_i a^{n-i} b^{i-1}$. Or, A étant factoriel, nous pouvons supposer que a et b sont premiers entre eux (i.e. il n'existe aucun idéal premier principal qui contienne a et b). Comme notre relation montre que a^n est divisible par b , il en résulte que b n'est contenu dans aucun idéal premier principal, donc est inversible, et x appartient à A .

Ceci dit, nous considérerons d'abord le cas où L est séparable sur $\mathcal{F}(A)$.

Lemme 4. Soient A un anneau d'intégrité intégralement clos, et $L/\mathcal{F}(A)$ une extension séparable de degré fini du corps des fractions $\mathcal{F}(A)$ de A , que nous pouvons supposer engendrée par un élément θ entier sur A . Désignons par f le polynome minimal de θ par rapport à $\mathcal{F}(A)$, et par f' son polynome dérivé. Alors, si $x \in L$ est entier sur A , $xf'(\theta)$ appartient à $A[\theta]$.

Les coefficients de f s'expriment comme polynomes à coefficients entiers en les conjugués de θ par rapport à K (dans une clôture algébrique $\bar{L}$ de L) ; ils sont donc entiers sur A ; appartenant à $\mathcal{F}(A)$, ils sont dans A . Le même raisonnement montre que, pour tout élément y de L entier sur A , la trace $\mathrm{Tr}\, y$ de y (de L par rapport à $\mathcal{F}(A)$) est dans A . Il est clair que le polynome $f(X) - f(Y)$ en deux lettres X , Y se met sous la forme

$$(1) \qquad f(X) - f(Y) = (X - Y) \sum_{i=0}^{n-1} u_i(Y) X^{n-i-1}$$

où n est le degré de f et où les u_i sont des polynomes à coefficients dans A . On va montrer que

$$(2) \qquad xf'(\theta) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{Tr}\,(x\theta^{n-i-1}) u_i(\theta)$$

Dérivons (1) par rapport à X , puis remplaçons X et Y par θ dans l'équation obtenue et multiplions par x ; il vient

$$(3) \qquad xf'(\theta) = \sum_{i=0}^{n-1} u_i(\theta) x \theta^{n-i-1} \quad .$$

Soient s_1 , ... , s_n les isomorphismes distincts de L dans $\bar{L}$ laissant fixes les éléments de K , s_1 étant l'identité. Soit $j > 1$; remplaçons dans (2) X par θ , Y par $s_j\theta$ et multiplions par $s_j x$; comme $\theta - s_j\theta \neq 0$, il vient

$$(4) \qquad 0 = \sum_{i=0}^{n-1} u_i(\theta)\ s_j(x\,\theta^{n-i-1}) \quad .$$

On obtient (2) en ajoutant à (3) les formules (4) pour $j = 2 , \ldots , n$.

Corollaire : Les notations étant celles du lemme 4 , si A est noethérien, sa fermeture intégrale dans L est un A-module noethérien.

On sait en effet que $f'(\theta) \neq 0$, et la clôture intégrale de A dans L est contenue dans $(f'(\theta))^{-1}A[\theta]$, qui est un A-module engendré par un nombre fini d'éléments, donc noethérien.

Le théorème 1 est donc démontré dans le cas où L est séparable sur $\mathfrak{F}(A)$ (A étant pure). Pour passer au cas général, établissons le lemme suivant :

Lemme 5. Soit $A = K[x_1 , \ldots , x_n]$ une algèbre affine pure sur K , les x_i étant algébriquement indépendants, et soit F son corps des fractions. Soit L une extension radicielle de degré fini de F . Alors L est contenue dans une extension radicielle L' de la forme

$F(a_1^{1/q} , \ldots , a_r^{1/q} , x_1^{1/q} , \ldots , x_n^{1/q})$ où q est une puissance de l'exposant caractéristique de K et où les a_i sont dans K . La fermeture intégrale de A dans L est un A-module noethérien.

Soit $L = F(y_1 , \ldots , y_s)$; il y a une puissance q de l'exposant caractéristique de K telle que les y_i^q soient dans F ; les y_i^q sont alors des fractions rationnelles en $x_1 , \ldots , x_n$ à coefficients dans K ; si $a_1 , \ldots , a_r$ sont tous les coefficients de ces fractions, L est contenu dans $L' = F(a_1^{1/q} , \ldots , a_r^{1/q} , x_1^{1/q} , \ldots , x_n^{1/q})$. L'anneau $B = A[a_1^{1/q} , \ldots , a_r^{1/q} , x_1^{1/q} , \ldots , x_n^{1/q}]$ est un A-module noethérien (donc entier sur A) ; si $F' = F(a_1^{1/q} , \ldots , a_r^{1/q})$, on a $B = F'[x_1^{1/q} , \ldots , x_n^{1/q}]$, ce qui montre que B est une algèbre affine pure sur le corps F' , donc intégralement fermé dans L' (lemme 3) ; B est donc la fermeture intégrale de A dans L' . Comme il contient la fermeture intégrale de A dans L , cette dernière est un A-module noethérien.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 1. Soit $\bar{L}$ une clôture algébrique de L , et soit P le plus petit sous-corps parfait de $\bar{L}$ contenant $\mathfrak{F}(A)$. L'extension $P(L)/P$ est séparable de degré fini. Si $L = (\mathfrak{F}(A))(z_1 , \ldots , z_s)$, les coefficients des polynomes minimaux des z_j

par rapport à P engendrent une extension radicielle R de degré fini de $\mathcal{F}(A)$ et $R(L)$ est séparable de degré fini sur R. L'algèbre A étant supposée pure, sa fermeture intégrale A_R dans R est un module noethérien sur A (lemme 5) ; il résulte du corollaire au lemme 4 que la fermeture intégrale C de A_R dans $L(R)$ est un A_R-module noethérien, donc aussi un A-module noethérien. Comme $A' \subset C$, A' est un A-module noethérien.

3.- Chaînes d'idéaux premiers.

Proposition 2.- *Soient* A *une algèbre affine et* $\underline{p}$ *un idéal premier* $\neq \{0\}$ *de* A. *On a alors* $\dim A/\underline{p} < \dim A$, *et* $\underline{p}$ *contient un idéal premier* $\underline{q}$ *tel que* $\dim A/\underline{q} = \dim A - 1$.

Soient $y_1, \ldots, y_s$ des éléments de A algébriquement indépendants sur le corps de base K tels que A soit entier sur $K[y_1, \ldots, y_s]$ et que, pour un certain r, $y_1, \ldots, y_r$ engendrent $\underline{p} \cap K[y_1, \ldots, y_s]$. L'anneau A étant entier sur $K[y_1, \ldots, y_s]$, on a $\dim A = s$. Si $B = K[y_1, \ldots, y_s]$, $B/(\underline{p} \cap B)$ est manifestement isomorphe à $K[y_{r+1}, \ldots, y_s]$; comme $A/\underline{p}$ est entier sur $B/(\underline{p} \cap B)$, $\dim A/\underline{p} = s - r$. Puisque $\underline{p} \neq \{0\}$ et A entier sur B, on a $\underline{p} \cap B \neq \{0\}$, d'où $r > 0$ et $\dim A/\underline{p} < \dim A$. L'idéal By_1 est premier et contenu dans $\underline{p} \cap B$; comme B est intégralement clos et A entier sur B, il y a un idéal premier $\underline{q}$ de A contenu dans $\underline{p}$ tel que $\underline{q} \cap B = By_1$; on a alors $\dim A/\underline{q} = s - 1$.

On appelle *chaîne d'idéaux premiers* d'un anneau A une suite finie $(\underline{p}_o, \ldots, \underline{p}_r)$ d'idéaux premiers de A telle que $\underline{p}_{i-1} \subset \underline{p}_i$, $\underline{p}_{i-1} \neq \underline{p}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$. Le nombre r, qui est le nombre des quotients $\underline{p}/\underline{p}_{i-1}$, s'appelle la *longueur* de la chaîne.

Théorème 2.- *Soit* A *une algèbre affine de dimension* d *sur un corps* K. *Toute chaîne d'idéaux premiers de* A *peut être incluse dans une chaîne de longueur* d. *Si* $(\underline{p}_o, \ldots, \underline{p}_d)$ *est une chaîne de longueur* d, *on a* $\dim A/\underline{p}_i = d - i \ (0 \leqslant i \leqslant d)$.

Soit $(\underline{p}_o, \ldots, \underline{p}_r)$ une chaîne d'idéaux premiers de A. Alors, si $1 \leqslant i \leqslant r$, $\underline{p}_i/\underline{p}_{i-1}$ est un idéal premier de l'algèbre affine $A/\underline{p}_{i-1}$, d'où par la proposition 2, $\dim A/\underline{p}_i = \dim (A/\underline{p}_{i-1})/(\underline{p}_i/\underline{p}_{i-1}) < \dim A/\underline{p}_{i-1}$. Il en résulte que $r \leqslant d$. On déduit de là que toute chaîne peut être incluse dans une chaîne maximale (i.e. qui ne peut plus être incluse dans une chaîne de longueur strictement plus grande). Supposons maintenant la chaîne $(\underline{p}_o , \dots , \underline{p}_r)$ maximale. Alors $\underline{p}_i/\underline{p}_{i-1}$ ne contient strictement aucun idéal premier $\neq \{0\}$, et il en résulte, en vertu de la proposition 2 , que $\dim A/\underline{p}_i = \dim (A/\underline{p}_{i-1})/(\underline{p}_i/\underline{p}_{i-1}) = \dim A/\underline{p}_{i-1} - 1$. On a manifestement $\underline{p}_o = \{0\}$, d'où $\dim A/\underline{p}_o = d$ et $\dim A/\underline{p}_i = d - i$ pour tout i . L'algèbre affine $A/\underline{p}_r$ est un corps ; par ailleurs, elle admet une sous-algèbre B qui est affine pure et sur laquelle est est entière. Puisque tout idéal premier de B est l'intersection avec B d'un idéal premier de $A/\underline{p}_r$, B n'a aucun idéal premier $\neq \{0\}$ et est un corps ; comme c'est une algèbre affine pure, c'est le corps K lui-même et $A/\underline{p}_r$ est algébrique sur K , d'où $d - r = \dim A/\underline{p}_r = 0$.

Remarque : On retrouve le résultat déjà démontré dans l'exposé 3 suivant lequel, si $\underline{p}$ est un idéal premier maximal de l'algèbre affine A , le corps $A/\underline{p}$ est algébrique sur le corps de base.

Lemme 6. Soient A une algèbre affine sur K et x un élément $\neq 0$ de A . Si $\underline{p}$ est un idéal premier minimal de x (i.e. si $\underline{p}$ est minimal dans l'ensemble des idéaux premiers contenant x) , $\underline{p}$ est premier non-nul minimal.

Cela résulte du théorème 1 et du corollaire au théorème 5, exposé 2.

Proposition 3.- Soient A une algèbre affine de dimension n sur K , $x_1 , \dots , x_r$ des éléments de A et $\underline{p}$ un idéal premier minimal de l'idéal engendré par $x_1 , \dots , x_r$ (i.e. un élément minimal de l'ensemble des idéaux premiers contenant cet idéal). On a alors $\dim A/\underline{p} \geqslant n - r$.

La démonstration procède par récurrence sur r . La proposition est évidente si $r = 0$ et résulte du lemme 6 si $r = 1$. Supposons que $r > 1$ et que la proposition soit vraie pour $r - 1$. L'idéal $\underline{p}$ contient un idéal premier minimal $\underline{q}$ de l'idéal engendré par $x_1 , \dots , x_{r-1}$, et $\dim A/\underline{q} \geqslant n-r+1$. Soit $\bar{x}_r$ l'image de x_r dans $A/\underline{q}$; $\underline{p}/\underline{q}$ est alors un idéal premier minimal de l'idéal engendré par $\bar{x}_r$ dans $A/\underline{q}$. Si $\bar{x}_r = 0$, on a $\underline{p} = \underline{q}$; sinon, $\underline{p}/\underline{q}$ est minimal dans l'ensemble des idéaux premiers $\neq \{0\}$ de $A/\underline{q}$ (lemme 6) , d'où (par le théorème 2) , $\dim A/\underline{p} = \dim (A/\underline{q})/(\underline{p}/\underline{q}) = \dim A/\underline{q} - 1$; dans tous les cas, on a $\dim A/\underline{p} \geqslant n-r$.

La proposition 3 admet une réciproque :

<u>Proposition 4.- Soient</u> A <u>une algèbre affine de dimension</u> n , $\underline{p}$ <u>un idéal premier de</u> A <u>et</u> $n - r = \dim A/\underline{p}$. <u>Il existe alors</u> r <u>éléments</u> $x_1 , \ldots , x_r$ <u>de</u> $\underline{p}$ <u>tels que l'on ait</u> $\dim A/\underline{q} = n - r$ <u>pour tout idéal premier minimal</u> $\underline{q}$ <u>de l'idéal engendré par ces éléments</u> (<u>ce qui implique que</u> $\underline{p}$ <u>est l'un de ces idéaux minimaux</u>).

Il existe des éléments $x_1 , \ldots , x_n$ de A , algébriquement indépendants sur le corps de base K , tels que A soit entier sur $B = K[x_1 , \ldots , x_n]$ et que $B \cap \underline{p}$ soit engendré par $x_1 , \ldots , x_{r'}$, pour un r' convenable. Comme $A/\underline{p}$ est entier sur $B/(B \cap \underline{p})$, qui est de dimension $n - r'$, on a $r' = r$. Soit $\underline{q}$ un idéal premier minimal de l'idéal engendré par $x_1 , \ldots , x_r$. Alors $\underline{q} \cap B$ contient $\underline{p} \cap B$; comme A est entier sur B et B intégralement clos, $\underline{q}$ contient un idéal premier $\underline{q}'$ tel que $\underline{q}' \cap B = \underline{p} \cap B$. Comme $\underline{q}'$ contient $x_1 , \ldots , x_r$, on a $\underline{q}' = \underline{q}$; comme $A/\underline{q}$ est entier sur $B/(\underline{p} \cap B)$, on a $\dim A/\underline{q} = n - r$.