A. HAEFLIGER

Les singularités des applications différentiables

Séminaire Henri Cartan, tome 9 (1956-1957), exp. n° 7, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1956-1957__9__A5_0>

Séminaire H. CARTAN, E.N.S., 1956/57

Exposé n° 7

LES SINGULARITÉS DES APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES

(Exposés de A. HAEFLIGER, les 13.5.1957 et 24.5.1957)

Le but de cet exposé est de reformuler dans la terminologie des "jets" de C. Ehresmann les bases de la théorie des singularités des applications différentiables développée par H. WHITNEY et R. THOM. Ce langage nous a paru bien adapté pour préciser les définitions et les problèmes et pour dégager leurs caractères invariants par les changements de coordonnées. Ce premier exposé ne contient à peu près que des définitions destinées à énoncer le lemme de Thom et la conjecture fondamentale de la théorie (WHITNEY-THOM). L'exposé suivant sera consacré à la question de l'invariance homologique des cycles critiques.

On se reportera pour les exemples à [2] et [7] .

1. - Rappel de quelques définitions.

Nous rappellerons ici brièvement quelques notations et définitions de la théorie des jets de C. Ehresmann. Pour plus de détails, voir [1] .

Application r-différentiable signifiera application différentiable de classe r . L'espace numérique de dimension n sera désigné par R^n .

Dans l'ensemble des applications locales pointées et r-différentiables de R^n dans R^p (c'est-à-dire l'ensemble des couples (f , x) formés d'une application r-différentiable f d'un ouvert U de R^n dans R^p et d'un point $x \in U$), nous dirons que le couple (f , x) est équivalent au couple (f' , x') si et seulement si $x = x'$ et si les dérivées partielles d'ordre $\leq r$ de f et f' au point x sont égales. La classe d'équivalence du couple (f , x) sera appelée le jet d'ordre r de f au point x et sera notée $f^r(x)$ (au lieu de $j_x^r f$). Le point x sera la source du jet $f^r(x)$ et $f(x)$ son but. Si V^n et V^p sont des variétés r-différentiables, on a également la notion de jet d'ordre r en un point x de V^n d'une application r-différentiable locale de V^n dans V^p .

L'ensemble $J^r(R^n , R^p)$ des jets d'ordre r (des applications r-différentiables) de R^n dans R^p est muni d'une structure topologique qui en fait une variété homéomorphe à un espace numérique : les coordonnées d'un jet $f^r(x)$ sont les valeurs des coordonnées de sa source x et de son but et des dérivées partielles jusqu'à l'ordre r de f au point x . L'espace des jets d'ordre r de

R^n dans R^p de source et but les origines de R^n et R^p resp. sera désigné par $L^r_{n,p}$. L'espace $J^r(R^n , R^p)$ est canoniquement isomorphe au produit $R^n \times R^p \times L^r_{n,p}$.

La loi de composition partiellement définie entre les applications locales pointées de R^n dans R^p et R^p dans R^m définit par passage aux quotients une loi de composition partiellement définie entre $J^r(R^n , R^p)$ et $J^r(R^p , R^m)$ et continue. Le composé YX de $X \in J^r(R^n , R^p)$ et $Y \in J^r(R^p , R^m)$ est défini si la source de Y est le but de X .

L'ensemble des jets d'ordre r inversibles de R^n dans R^n de source et but l'origine forme un groupe algébrique noté L^r_n . Le groupe produit $L^r_n \times L^r_p$ agit comme groupe de transformations algébrique de $L^r_{n,p}$: le transformé d'un élément $X \in L^r_{n,p}$ par le couple $(Z , Z') \in L^r_n \times L^r_p$ sera l'élément $Z'XZ^{-1}$.

Toutes les notions précédentes se généralisent immédiatement si l'on remplace R^n et R^p par des variétés r-différentiables V^n et V^p (de dimension n et p resp.). L'espace $J^r(V^n , V^p)$ des jets d'ordre r de V^n dans V^p est muni d'une structure de variété ; l'application qui fait correspondre à tout élément de $J^r(V^n , V^p)$ le couple formé de sa source et de son but est la projection d'une fibration de base $V^n \times V^p$, de fibre $L^r_{n,p}$ et de groupe structural $L^r_n \times L^r_p$.

Toute application r-différentiable f de V^n dans V^p se prolonge en une application f^r de V^n dans $J^r(V^n , V^p)$ qui fait correspondre à tout point x de V^n le jet d'ordre r $f^r(x)$ de f au point x .

Un jet $X \in J^r(V^n , V^p)$ sera dit équivalent à un jet $X' \in J^r(V'^n , V'^p)$ (et on écrira $X \sim X'$) s'il existe des jets inversibles $Z_1 \in J^r(V^n , V'^n)$ et $Z_2 \in J^r(V^p , V'^p)$ tels que $X' = Z_2 X Z_1^{-1}$. En particulier, deux jets X et X' appartenant à $L^r_{n,p}$ seront équivalents si et seulement s'il existe un élément du groupe $L^r_n \times L^r_p$ appliquant X sur X' .

Remarquons enfin que l'espace $J^{r+k}(V^n , V^p)$ s'identifie à une sous-variété de l'espace des jets d'ordre k de V^n dans $J^r(V^n , V^p)$. C'est une conséquence directe du fait que les dérivées partielles d'ordre $\leq r + k$ d'une application $r + k$-différentiable de R^n dans R^p sont les dérivées partielles d'ordre $\leq k$ des dérivées partielles d'ordre $\leq r$ de f .

2. - Le lemme de Thom.

La notion d'application transversale sur une sous-variété.

Une <u>sous-variété</u> <u>r-différentiable</u> S <u>de codimension</u> q d'une variété r-différentiable V^p est un sous-ensemble S de V^p tel que, pour chaque point y de S, il existe un voisinage U_y de y et une application r-différentiable g_y de U_y sur R^q de rang q et telle que $U_y \cap S$ soit l'image réciproque par g_y de l'origine 0 de R^q.

Une application différentiable f d'une variété différentiable V^n dans V^p sera dite <u>transversale sur la sous-variété</u> S <u>au point</u> x de V^n si : ou

1° $f(x) \notin S$, ou

2° $f(x) \in S$ et l'image par f de l'espace tangent à V^n au point x et l'espace tangent à S au point $f(x)$ engendrent l'espace tangent à V^p au point $f(x) = y$. Cela revient à dire que $g_y \circ f$ est une application différentiable de rang q au point x. C'est une propriété concernant le jet du premier ordre de f au point x.

Si f est transversale sur S en tout point de V^n, alors $f^{-1}(S)$ <u>est une sous-variété</u> <u>r-différentiable de</u> V_n (en supposant f r-différentiable) de <u>codimension</u> q. En effet, dans $f^{-1}(U_y)$, $f^{-1}(S)$ est définie par $g_y \circ f = 0$.

Une <u>collection de sous-variétés</u> <u>r-différentiables</u> dans V^p est une réunion $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m$ d'un nombre fini $(\leq p)$ de sous-variétés r-différentiables disjointes de V^p : $S_1, S_2, \dots, S_m$ telles que :

1° dimension $S_k >$ dimension S_{k+1},

2° $S_k \cup S_{k+1} \cup \dots \cup S_m$ soit fermé dans V^p $(k = 1, 2 \dots, m)$. Les points de S_1 seront les points <u>réguliers</u> de S.

Une application r-différentiable f de V^n dans V^p est transversale en un point x de V^n sur la collection de variétés S, si f est transversale au point x sur la sous-variété S_k de la décomposition de S contenant $f(x)$. Si f est transversale sur S en tout point de V^n, $f^{-1}(S)$ est une collection de variétés r-différentiables dans V^n : $f^{-1}(S) = f^{-1}(S_1) \cup \dots \cup f^{-1}(S_m)$.

Toute variété algébrique peut s'exprimer (en général de plusieurs manières) comme une collection de variétés partielles (cf. [8]).

$L(R^n, R^p, q)$ désignera l'espace fonctionnel des applications q-différentiables de R^n dans R^p muni de la topologie définie par l'écart sur les dérivées partielles d'ordre $\leq q$ sur les compacts de R^n.

<u>Enoncé du lemme de Thom</u> : Soit S une sous-variété s-différentiable fermée de $J^r(R^n, R^p)$ $(s \geq n)$. Les applications q-différentiables $(q \geq r + n)$ de R^n

dans R^p telles que le prolongement f^r d'ordre r de f soit transversal sur S en tout point d'un compact de R^n forment un ouvert partout dense de $L(R^n , R^p , q)$.

Pour la démonstration, voir [3] .

REMARQUES. - Comme $L(R^n , R^p , q)$ est un espace de Baire, les applications q-différentiables qui ne sont pas transversales sur S en au moins un point de R^n forment un sous-ensemble dont le complémentaire est partout dense dans $L(R^n , R^p , q)$; autrement dit, toute application r-différentiable f de R^n dans R^p peut être approchée d'aussi près qu'on veut, ainsi que ses dérivées partielles d'ordre $\leqslant q$, par une application r-différentiable g transversale sur S en tout point de R^n . Ceci est encore vrai si S est une sous-variété non fermée ou si S est une collection de sous-variétés de $J^r(R^n , R^p)$.

On démontre par passage du local au global le

Lemme de Thom global : Soient V^n et V^p des variétés différentiables (paracompactes) et S une sous-variété s-différentiable de $J^r(V^n , V^p)$ $(s \geqslant n)$. Les applications q-différentiables $(q \geqslant r + n)$ de V^n dans V^p telles que le prolongement f^r de f soit transversal sur S en tout point d'un compact de V^n , forment un ouvert partout dense de $L(V^n , V^p , q)$.

3. - Variété critique.

On appellera variété critique dans $L^r_{n,p}$ une sous-variété algébrique S de $L^r_{n,p}$ invariante par les opérations du groupe $L^r_n \times L^r_p$ (ou ce qui revient au même, S est l'ensemble des zéros communs aux polynomes d'un idéal invariant par $L^r_n \times L^r_p$) .

Les jets d'ordre r de V^n dans V^p équivalents aux jets appartenant à S forment un sous-espace fibré S_J de $J^r(V^n , V^p)$ dont la fibre est isomorphe à S . Si f est une application r-différentiable de V^n dans V^p , l'ensemble S^f des points de V^n où l'application f présente des singularités du type S est l'image réciproque de S_J par le prolongement f^r de f .

Toute décomposition de S en une collection de variétés algébriques partielles invariantes par $L^r_n \times L^r_p$ (par exemple la deuxième décomposition définie par W.WHITNEY dans [8] ; il y en a d'autres) induit une décomposition correspondante de S_J . Si f^r est transversale sur S_J en tout point de V^n relativement à cette décomposition en sous-variétés, l'ensemble S^f est aussi une collection de variétés (f étant différentible de classe $> r$). D'après le lemme de Thom, on peut toujours approcher à l'ordre r une application donnée par une telle application. En particulier, si la codimension de S est $> n$, on peut approcher à l'ordre r l'application donnée par une application ne présentant aucune singularité du type S.

L'<u>ordre</u> d'une variété critique S dans $L^r_{n,p}$ sera le plus petit entier $r' \leqslant r$ tel que S soit l'image réciproque par la projection naturelle de $L^r_{n,p}$ sur $L^{r'}_{n,p}$ d'une variété critique S' dans $L^{r'}_{n,p}$.

EXEMPLE. - Le sous-ensemble de $L^r_{n,p}$ formé des jets d'applications dont le rang n'est pas maximum est une variété critique d'ordre 1 de $L^r_{n,p}$. De nombreux exemples sont donnés dans [7].

La variété critique minimale contenant un point $X \in L^r_{n,p}$ contient évidemment l'orbite de X suivant le groupe $L^r_n \times L^r_p$.

PROPOSITION. - <u>Pour tout $X \in L^r_{n,p}$, l'orbite de X suivant le groupe $L^r_n \times L^r_p$ est un ouvert dans la variété critique minimale contenant X.</u>

DÉMONSTRATION. - Soit C^n l'espace numérique complexe de dimension n. L'espace $\tilde{L}^r_{n,p}$ des jets d'ordre r des applications analytiques complexes de C^n dans C^p de source et but les origines de C^n et C^p resp. est le complexifié de $L^r_{n,p}$; le groupe $\tilde{L}^r_n$ des jets complexes d'ordre r inversibles de C^n dans C^n de source et but l'origine est le complexifié du groupe L^r_n. Considérons l'application algébrique de $\tilde{L}^r_n \times \tilde{L}^r_p \times \tilde{L}^r_{n,p}$ sur $\tilde{L}^r_{n,p}$ qui définit l'action du groupe $\tilde{L}^r_n \times \tilde{L}^r_p$ sur $\tilde{L}^r_{n,p}$; sa restriction au sous-espace réel $L^r_n \times L^r_p \times L^r_{n,p}$ définit l'action du groupe réel $L^r_n \times L^r_p$ sur $L^r_{n,p}$. Ainsi l'espace tangent à l'orbite complexe $\tilde{O}$ d'un point $X \in L^r_{n,p} \subset \tilde{L}^r_{n,p}$ est le complexifié de l'espace tangent à l'orbite réelle O de X. De plus, comme $\tilde{L}^r_n \times \tilde{L}^r_p$ est un groupe algébrique de transformations de $\tilde{L}^r_{n,p}$, l'orbite $\tilde{O}$ est un ouvert dans son adhérence A au sens de la toplogie de Zariski (CHEVALLEY). Il résulte de ces deux faits que O est un ouvert dans $A \cap L^r_{n,p}$, c'est-à-dire dans la variété critique minimale contenant X.

C.Q.F.D.

Il résulte de cette démonstration que les points réguliers de la variété critique minimale contenant X sont tous les jets d'ordre r équivalents à X par des transformations complexes.

4.- Singularités génériques.

$J^r(R^n, R^p)$ est canoniquement isomorphe à $R^n \times R^p \times L^r_{n,p}$; si f est une application r-différentiable de R^n dans R^p, on désignera par f^r_o le composé du prolongement f^r d'ordre r de f avec la projection canonique de $J^r(R^n, R^p)$ sur $L^r_{n,p}$.

Une variété critique S dans $L^r_{n,p}$ sera dite générique s'il existe une application différentiable f de R^n dans R^p qui présente en un point x de R^n un point singulier de type S et telle que f^r_o soit transversale en x sur S (relativement à une certaine décomposition de S en une collection de variétés critiques ; cette définition est indépendante de la décomposition choisie).

La dénomination "générique" est justifiée par la remarque suivante : pour toute application g suffisamment proche de f dans $L(R^n, R^p, r+1)$ il existe un point x' proche de x où g présente aussi une singularité de type S ; on ne peut donc en général faire disparaître les singularités de type S par de petites déformations.

Si S est une variété critique générique, alors codimension de $S \leq n$. Cette condition nécessaire est-elle aussi suffisante ?

Soient des entiers $s > r$; une application s-différentiable f de R^n dans R^p sera dite r-générique au point x de R^n, si f^r_o est transversale en x sur l'orbite de $f^r_o(x)$. Il en résulte que f^r_o est transversale en x sur toute variété critique contenant $f^r_o(x)$, et en particulier que la variété critique minimale contenant $f^r_o(x)$ est générique. Si f est r-générique en x, elle est aussi r'-générique en x pour tout $r' \leq r$.

Une application f r-générique en x est stable à l'ordre r, c'est-à-dire que pour tout voisinage U de x, il existe un voisinage W de f dans $L(R^n, R^p, r+1)$ tel que pour tout $g \in W$, il existe un point $x' \in U$ où le jet d'ordre r de g est équivalent au jet d'ordre r de f au point x.

PROPOSITION. - Les applications r-génériques en tout point d'un compact K de R^n forment un ouvert dans $L(R^n, R^p, r+1)$.

Il suffit de remarquer que les jets d'ordre $r+1$ des applications qui ne sont pas r-génériques sont les points d'une variété critique M dans $L^{r+1}_{n,p}$.

En effet, $L^{r+1}_{n,p}$ s'identifie à une sous-variété de l'espace V des jets d'ordre 1 de R^n dans $L^r_{n,p}$ de source l'origine 0 de R^n ; l'espace tangent à l'orbite d'un point $x \in L^r_{n,p}$ est l'image par l'application algébrique $L^r_n \times L^r_p \times L^r_{p,n} \longrightarrow L^r_{p,n}$ de l'espace tangent au sous-espace $L^r_n \times L^r_p \times \{x\}$ au point $(e\ ,\ e\ ,\ x)$. Pour exprimer que cet espace et l'espace image de l'espace tangent à R_n par un jet z de but x n'engendrent pas tout l'espace tangent à $L^r_{n,p}$ au point x , on doit écrire que le rang d'une matrice dont les coefficients sont des polynomes est plus petit que la dimension de $L^r_{n,p}$. Ainsi les jets V d'applications non transverses sur les orbites de $L^r_{n,p}$ forment une sous-variété algébrique M' de V , et $M = M' \cap V$ est une variété critique de $L^{r+1}_{n,p}$.

COROLLAIRE. - Si f est r-générique en un point x , alors f est r-générique en tout point d'un voisinage de x .

5. - Questions et conjecture fondamentale.

Question 1 : Les applications r-génériques en tout point d'un compact de R^n forment-elles un ouvert partout dense dans $L(R^n\ ,\ R^p\ ,\ r+1)$?

Autrement dit, toute application peut-elle être approchée à l'ordre $r+1$ par une application r-générique en tout point de R^n ?

Pour répondre affirmativement à cette question, il suffirait de vérifier par exemple que la codimension de la variété critique M dans $L^{r+1}_{n,p}$ formée des jets d'ordre $r+1$ des applications non r-génériques est strictement plus grande que n ; en vertu du lemme de Thom, on pourrait toujours en effet approcher une application donnée f par une application g telle que g^{r+1}_0 ne rencontre pas M .

Soient f et f' des applications de R^n dans R^p définies au voisinage des points x et x' resp. . On dira que f au point x est localement équivalente (de classe r) à f' au point x' s'il existe des homéomorphismes locaux h_1 et h_2 (de classe r) de R^n et R^p resp. tels que $f = h_2 f' h_1^{-1}$ dans un voisinage assez petit de x .

Question 2 : n et p étant fixés, existe-t-il un entier r tel que si f et f' sont deux applications s-différentiables de R^n dans R^p (s suffisamment grand) et r-génériques en un point $x \in R^n$, l'équivalence des jets d'ordre $r+1$ de f et f' au point x entraîne l'équivalence locale de f et f' au point x ?