A. Haefliger
A. Kosinski

Un théorème de Thom sur les singularités des applications différentiables

Séminaire Henri Cartan, tome 9 (1956-1957), exp. n° 8, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1956-1957__9__A6_0>

Séminaire H. CARTAN, E.N.S., 1956/57

UN THÉORÈME DE THOM SUR LES SINGULARITÉS DES APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES

(Exposé de A. HAEFLIGER et A. KOSINSKI, le 31.5.1957)

(Cet exposé fait plein usage des notions et notations introduites dans l'exposé précédent.)

1. - Soient V^n et W^p deux variétés différentiables paracompactes et soit $f : V^n \to W^p$ une application r-différentiable de V^n dans W^p. Cette application se prolonge en une application f^r de V^n dans $J^r(V^n , W^p)$. L'espace $J^r(V^n , W^p)$ sera considéré comme un fibré sur $V^n \times W^p$ de fibre $L^r_{n,p}$, de groupe $L^r_n \times L^r_p$ et de projection p.

Supposons qu'on ait fixé une "variété critique" $S \subset L^r_{n,p}$; puisque S est invariante par les opérations du groupe, on en déduit un sous-espace fibré S_J de l'espace $J^r(V^n , W^p)$. Soit Σ l'image réciproque de S_J par f^r. L'ensemble Σ sera appelé l'ensemble critique de f du type S. Dans cet exposé nous étudierons certaines propriétés homologiques de Σ dans le cas où f^r est transversale sur S_J. (Sans cette condition la question n'a guère de sens.)

Dans le cas particulier où Σ est une variété, le théorème que nous allons démontrer établira la liaison entre les classes de Stiefel-Whitney de V^n et W^p, et la classe fondamentale de Σ. Mais dans le cas général, Σ n'est pas forcément une variété, bien que ce soit toujours une collection de variétés (f^r étant transversale sur S_J). Nous poserons donc la définition suivante :

Soit Σ une collection de variétés de dimension k. On dira que Σ porte une classe fondamentale α s'il existe un élément $\alpha \in H_k(\Sigma)$ (homologie singulière mod 2 à supports fermés, non nécessairement compacts) tel que, pour chaque point régulier $x \in \Sigma$, l'image de α dans $H_k(\Sigma \bmod (\Sigma - x))$ soit le générateur de $H_k(\Sigma \bmod (\Sigma - x))$. (Par points réguliers nous entendons les points de S_1 dans la décomposition $\Sigma = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m$; voir l'exposé précédent, par. 2.)

Nous démontrerons le théorème suivant qui nous a été communiqué par R. THOM dans une lettre :

THÉORÈME. - Soit $f : V^n \longrightarrow W^p$ une application r-différentiable, soit S une variété critique et Σ l'ensemble critique de f du type S. Supposons que f^r soit transversale sur S_J et que Σ soit un ANR.

Alors Σ porte une classe fondamentale $\varkappa$ dont la classe duale $D\varkappa$ s'exprime comme un polynome par rapport aux classes de Stiefel-Whitney de V^n et aux images par f^* des classes de Stiefel-Whitney de W^p :

$$D\varkappa = P\,[W_i(V^n)\ ,\ f^*(W_j(W^p))]\ .$$

Le polynome P ne dépend pas de l'application f.

Remarquons que le théorème précédent implique :

COROLLAIRE 1. - La classe $\varkappa$ est un invariant de la classe d'homotopie de f.

COROLLAIRE 2. - Si $W^p = R^p$, $D\varkappa = P\,[W_i(V^n)\ ,\ 0]$.

Avant de passer à la démonstration du théorème, nous énoncerons un lemme dont nous aurons besoin et dont la démonstration, n'ayant rien de commun avec le sujet de cet exposé, est donnée à la fin, en annexe.

LEMME. - Soient V et V' deux variétés différentiables paracompactes, $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m$ une "collection" de sous-variétés différentiables dans V ; soit f une application différentiable de V' dans V transversale sur S, et $S' = f^{-1}(S)$ l'image réciproque de S. Supposons que S' soit un **ANR** et que S porte une classe fondamentale α.

Dans ces conditions S' porte une classe fondamentale β et l'image par $f^* : H^*(V) \longrightarrow H^*(V')$ de la classe duale à α est la classe duale à β.

Plus précisément, au lieu de α il faudrait parler de l'image de α dans $H_*(V)$, et de même pour β. En désignant les homomorphismes d'inclusion correspondants par i_*, i'_*, le lemme s'exprime par la formule $f^*\,Di_*\alpha = Di'_*\beta$.

DÉMONSTRATION du théorème. - Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & J^r(V^n\ ,\ W^p) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "p"] & E \arrow[d, "\varphi"] \\
V^n \arrow[ur, "f^r"] \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] & V^n \times W^p \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p_2"] & H \\
 & W^p &
\end{tikzcd}$$

où g est défini par $g(x) = (x , f(x))$; p , p_2 sont les projections canoniques et $E \longrightarrow H$ est l'espace fibré de fibre $L^r_{n,p}$ associé à l'espace fibré universel relatif au groupe $L^r_n \times L^r_p$. Le groupe L^r_n étant (topologiquement) le produit **d'un groupe** orthogonal par un espace euclidien, alors on peut, d'après les théorèmes connus (voir par exemple [1] , 10-04), choisir comme espace classifiant H relatif au produit $L^r_n \times L^r_p$, le produit de deux grassmanniennes, soit $G_n \times G_p$. En plus, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
V^n & \xrightarrow{\pi_2} & G_n \\
\uparrow{\scriptstyle p_1} & & \uparrow{\scriptstyle \bar{p}_1} \\
V^n \times W^p & \xrightarrow{h} & G_n \times G_p \\
\downarrow{\scriptstyle p_2} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{p}_2} \\
W^p & \xrightarrow{\pi_1} & G_p
\end{array}$$

où p_i , $\bar{p}_i$ $(i = 1,2)$ sont les projections et π_i $(i = 1,2)$ sont les applications qui induisent les fibrés tangents. Soient $W_i(V^n)$, $W_j(W^p)$ les classes de Stiefel-Whitney de V^n , W^p resp. . Nous démontrerons d'abord que

(i) si $\zeta \in H^*(G_n \times G_p)$, alors $h^* \zeta$ est un polynôme en $p_1^* W_i(V^n)$, $p_2^* W_j(W^p)$.

$$h^* \zeta = P [p_1^* W_i(V^n) , p_2^* W_j(W^p)] .$$

Soient $W_i^!$ et $W_j^!$ les classes de Stiefek-Whitney de G_n , G_p resp.. D'après le théorème classique de Chern, les $W_i^!$ engendrent l'anneau $H^*(G_n)$ et les $W_j^!$ engendrent l'anneau $H^*(G_p)$ (voir [6], et [1], Exposé 17 de WU WEN-TSÜN). Donc

$$\zeta = P [\bar{p}_1^* W_i^! , \bar{p}_2^* W_j^!] ,$$

d'où

$$h^* \zeta = P [h^* \bar{p}_1^* W_i^! , H^* \bar{p}_2^* W_j^!] = P [p_1^* W_i(V^n) , p_2^* W_j(V^p)]$$

par commutativité du diagramme précédent.

Ceci étant établi, retournons à la situation du premier diagramme. Soit S_E le sous-espace fibré associé à E de fibre S ; on a $S_j = \psi^{-1}(S_E)$. D'après un raisonnement de THOM [5] , S porte une et une seule classe fondamentale. Ce raisonnement tient à une propriété locale qui est invariante par rapport à la multiplication par un espace euclidien. Il en résulte que :

(ii) S_j et S_E portent des classes fondamentales γ et δ resp.. Ces classes sont uniques.

En appliquant maintenant le lemme à la classe γ , on voit que Σ porte une classe fondamentale $\varkappa$ et que $D\varkappa = f^{r*} D\gamma$. En appliquant de nouveau le lemme à δ on obtient $D\gamma = \psi^* D\delta$, car la classe γ est l'unique classe fondamentale de S_J . Finalement

(iii) $$D\varkappa = f^{r*}\psi^* D\delta \ .$$

Puisque la fibre du fibré $E \longrightarrow H$ est homéomorphe à un espace euclidien, l'homomorphisme φ^* est un isomorphisme, et il existe un $\zeta \in H^*(G_n \times G_p)$ tel que $D\delta = \varphi^* \zeta$. Donc d'après (iii), la commutativité du diagramme et (i), on a

$$D\varkappa = f^{r*}\psi^* \varphi^* \zeta = g^* h^* \zeta = P\,[g^* p_1^* W_i(V^n) \ , \ g^* p_2^* W_j(W^p)\,] = P\,[W_i(V^n) \ , \ f^* W_j(W^p)\,] \ ,$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

REMARQUE. - Supposons que les groupes structuraux L_n^r et L_p^r des espaces fibrés des repères d'ordre r de V^n et W^p aient été réduits aux sous-groupes L et L' resp.. Alors le théorème reste encore vrai, si l'on remplace $L_n^r \times L_n^p$ par $L \times L'$ dans le définition de S , et les classes de Stiefel-Whitney par les classes caractéristiques relatives à L et L' . Par exemple, dans le cas des applications analytiques des variétés analytiques complexes, au lieu des classes de Stiefel-Whitney, on aura les classes de Chern.

ANNEXE

Nous donnerons maintenant la démonstration du lemme dont nous conservons les notations. Nous supposons que $\dim V = n$, $\dim V' = n'$, $\dim S = k$ et $\dim S' = k'$. Puisque les codimensions de S et de S' sont égales, on a $n - k = n' - k' = q$, (voir [4]).

α étant la classe fondamentale de S , nous démontrerons d'abord ceci :

(i) il existe une classe $\beta \in H_{k'}(S')$ telle que sa classe duale dans V' soit l'image par f^* de la classe duale dans V à α .

Soit W'_i un système fondamental de voisinages de S' dans V' , et soit f_i la restriction de f à W'_i . On a le diagramme commutatif ([2] , 20-04) :

$$\begin{tikzcd}
H_{k'}(V') \arrow[r, leftrightarrow, "D'"] & H^{n'-k'}(V') & & & \\
& & H^{n-k}(V) \arrow[ul, "f^*"'] \arrow[dl, "f_i^*"] \arrow[r, leftrightarrow, "D"] & H_k(V) & H_k(S) \arrow[l, "i_*"'] \\
H_{k'}(W'_i) \arrow[uu] \arrow[r, leftrightarrow, "D'_i"] & H^{n'-k'}(W'_i) \arrow[uu] & & &
\end{tikzcd}$$

où les supports de l'homologie de V , V' sont <u>tous les fermés</u>, et, dans W'_i , les fermés de V' qui sont contenus dans W'_i ; les signes $\leftrightarrow$ désignent les isomorphismes de dualité ([2] , ℓ.c.) et i_* l'homomorphisme d'inclusion. Observons maintenant que les éléments $D'_i\, f^*_i\, D i_* \alpha$ de $H_{k'}(W'_i)$ déterminent un élément de la limite projective $\varprojlim H_{k'}(W'_i)$, donc un élément β de $H_{k'}(S')$ car l'homomorphisme $H_{k'}(S') \to \varprojlim H_{k'}(W'_i)$ est un isomorphisme : S' a été supposé ANR (voir [3] , théorème 3 , 4.).

La commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_{k'}(S') & \xrightarrow{i'_*} & H_{k'}(V') \\ \downarrow \approx & & \uparrow \\ \varprojlim H_{k'}(W'_i) & \longrightarrow & H_{k'}(W'_i) \end{array}$$

où i'_* est l'homomorphisme d'inclusion, jointe à celle du diagramme précédent, montre que β satisfait aux conditions de (i) : $D' i'_* \beta = f^* D i_* \alpha$.

Pour achever la démonstration, il suffit donc de démontrer que la classe β obtenue dans (i) est bien la classe fondamentale de S' .

Soit x' un point régulier de S' et soit $x = f(x')$. On peut trouver un système de coordonnées $x_1 , x_2 , \dots , x_n$ dans un voisinage W de x homéomorphe à $R^{n-q} \times R^q$, tel que les coordonnées $x_1 , x_2 , \dots , x_n$ soient nulles au point x , et que $W \cap S$ soit défini par $x_n = \dots = x_{n-q+1} = 0$. Soit B le sous-espace de W défini par $x_1 = 0 , \dots , x_{n-q} = 0$, $|x_{n-q+1}| < 1, \dots, |x_n| < 1$. Soit T un voisinage ouvert de S dans V qui contienne B comme fermé.

Soit maintenant W' un voisinage de x' dans V' contenu dans $f^{-1}(W)$. Puisque l'application f est transversale au point x' sur S , on peut trouver dans W' un système de coordonnées $x'_1 , \dots , x'_{n'}$ nulles au point x' et tel que la restriction de f à W' composée avec la projection de W sur R^q soit donnée par les équations $x'_{n'} = x_n , \dots , x'_{n'-q+1} = x_{n-q+1}$. Soit B' le sous-ensemble de W' défini par $x'_1 = 0 , \dots , x'_{n'-q} = 0$, $|x'_{n'-q+1}| < \varepsilon , \dots , |x'_{n'}| < \varepsilon$, ε étant assez petit pour que $f(B') \subset B$. Soit enfin T' un voisinage de S' contenant B' comme fermé et contenu dans $f^{-1}(T)$.

On a le diagramme suivant qui est commutatif, en vertu de ([2] , ℓ.c.)

$$\begin{array}{ccccccccccc} H_{k'}(S' \operatorname{mod}(S'-x)) & \xrightarrow{j'_*} & H_{k'}(T' \operatorname{mod}(T'-B')) & \xleftrightarrow{D'} & H^q(B') & \xleftarrow{f^*_B} & H^q(B) & \xleftrightarrow{D} & H_k(T \operatorname{mod}(T-B)) & \xleftarrow{j_*} & H_k(S \operatorname{mod}(S-x)) \\ \uparrow m'_* & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow m_* \\ H_{k'}(S') & \xrightarrow{i'_*} & H_{k'}(T') & \xleftrightarrow{D'} & H^q(T') & \xleftarrow{f^*_T} & H^q(T) & \xleftrightarrow{D} & H_k(T) & \xleftarrow{i_*} & H_k(S) \end{array}$$

où f_B et f_T sont les restrictions de f à B' et T' resp. ; D et D' sont les isomorphismes de dualité ; i , i' , j , j' sont les inclusions. L'homologie de T et T' a pour supports les fermés de V , V' resp. qui sont contenus dans T , T' resp. ; la cohomologie de B et B' est à supports compacts.

Maintenant, comme conséquence directe de (i), nous avons $f_T^* Di_* \alpha = D'i'_* \beta$ ce qui implique, par commutativité du diagramme,

(ii) $$D'j'_* m'_* \beta = f_B^* Dj_* m_* \alpha \quad .$$

Nous allons déterminer cet élément de $H^q(B)$. D'après la définition de la classe fondamentale, $m_* \alpha$ est le générateur de $H_k(S \bmod S - x)$. Donc $Dj_* m_* \alpha$ est le générateur de $H^q(B)$ et de même $f_B^* Dj_* m_* \alpha$ celui de $H^q(B')$, car f_B est une application homéomorphe de B' dans B . Ceci implique évidemment que $m'_* \beta$ est le générateur de $H_{k'}(S' \bmod (S' - x))$, c'est-à-dire que β est une classe fondamentale de S' .

C.Q.F.D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Séminaire CARTAN, Espaces fibrés et homotopie, t. 2, 1949/50.

[2] Séminaire CARTAN, Cohomologie des groupes, suite spectrale, faisceaux, t. 3, 1950/51.

[3] THOM (René). - Espacesfibrés en sphères et carrés de Steenrod, Ann. sc. Ec. Norm. Sup., Série 3, t. 69, 1952, p. 109-182 (Thèse Sc. math. Paris. 1951).

[4] THOM (René). - Les singularités des applications différentiables, Ann. Inst. Fourier, t. 6, 1955-56, p. 43-87.

[5] THOM (René). - Un lemme sur les applications différentiables, Bol. Soc. mat. Mexic., Segunda Serie, t. 1, 1956, p. 59-71.

[6] CHERN (Shiing-Shen). - On the multiplication in the characteristic ring of a sphere bundle, Annals of Math., t. 49, 1948, p. 362-372.