ADRIEN DOUADY

Applications de la suite spectrale des espaces fibrés

Séminaire Henri Cartan, tome 11, n° 1 (1958-1959), exp. n° 3, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1958-1959__11_1_A3_0>

APPLICATIONS DE LA SUITE SPECTRALE DES ESPACES FIBRÉS

par Adrien DOUADY

NOTATIONS. - Dans tout exposé, A est un anneau principal. $P : X \to B$ est un espace fibré au sens de SERRE tel que le système local d'homologie de la fibre F à coefficients dans A soit constant, de sorte qu'on pourra appliquer la formule des coefficients universels :

$$E^2_{p,q} \approx H_p(B , A) \otimes H_q(F , A) \oplus \mathrm{Tor}(H_{p-1}(B , A) , H_q(B , A)) .$$

E étant un espace, on écrira $H(E)$ ou $H_p(E)$ au lieu de $H(E , A)$ ou $H_p(E , A)$.

Le premier problème qu'on peut chercher à résoudre est de calculer $H(X)$ connaissant $H(B)$ et $H(F)$ par l'intermédiaire de son gradué associé E^∞ .

Il est malheureusement très difficile dans le cas général de déterminer les d^r . On peut cependant tirer de leur existence et de leurs propriétés certaines informations et, dans certains cas, les déterminer.

On pourra aussi chercher à calculer $H(F)$ connaissant $H(X)$ et $H(B)$, ou $H(B)$ connaissant $H(F)$ et $H(X)$. C'est notamment le cas lorsqu'on recherche l'homologie de l'espace des lacets d'un espace B simplement connexe, fibre de l'espace contractile X des chemins d'origine b , ou lorsqu'on recherche l'homologie de l'espace classifiant d'un groupe topologique connexe, base d'un fibré principal universel (donc acyclique).

1. Informations partielles dans le cas général.

Tout d'abord, les E^r vont, si l'on peut dire, en décroissant avec r ; plus précisément, pour $r' \geqslant r$, $E^{r'}_{p,q}$ est un quotient d'un sous-module de $E^r_{p,q}$. En particulier le nombre d'éléments de $E^r_{p,q}$, sa dimension si A est un corps, son nombre minimum de générateurs si A est un anneau principal quelconque, vont en décroissant avec r . Si $E^r_{p,q} = 0$, $E^{r'}_{p,q} = 0$.

Si A est un corps, on a $E^2_{p,q} = H_p(B) \otimes H_q(F)$, d'où

$$\dim E^2_{p,q} = \dim H_p(B) . \dim H_q(F)$$

et $\dim H_n(X) = \sum_p E^\infty_{p,n-p} \leq \sum_p (\dim H_p(B) . \dim H_{n-p}(F))$.

En particulier, si $H_n(B)$ et $H_n(F)$ sont de dimension finie pour tout n, $H_n(X)$ sera de dimension finie pour tout n. (Nous donnerons au n° 3 (C) un énoncé englobant celui-ci).

Si de plus $H_n(B)$ et $H_n(F)$ sont nuls sauf pour un nombre fini de valeurs de n, on peut définir les caractéristiques d'Euler-Poincaré

$$\chi(B) = \sum (-1)^n \dim H_n(B)$$

et $\chi(F)$, ainsi que $\chi(E^r) = \sum (-1)^{p+q} \dim E^r_{p,q}$, car cette somme est également finie. Alors $\chi(X)$ est aussi définie et on a :

$$\chi(X) = \chi(E^\infty) = \chi(E^r) \quad \text{pour } r \text{ suffisamment grand .}$$

D'autre part $\chi(E^{r+1}) = \chi(E^r)$, puisque E^{r+1} est l'homologie de E^r pour une différentielle de degré total impair.

On en déduit

$$\chi(X) = \chi(E^2) = \chi(B).\chi(F)$$

REMARQUE. - L'hypothèse que le système local $\mathcal{H}(\mathcal{F}, A)$ est constant est essentielle.

Cependant elle est superflue lorsque B est un polyèdre fini. Voici un contre-exemple quand B n'est pas un polyèdre fini.

CONTRE-EXEMPLE. - Soit X l'espace obtenu en identifiant, dans $S_\infty \times S_{2n}$, le point (x, y) à $(-x, -y)$; S_∞ désigne l'espace des vecteurs de norme 1 de l'espace de Hilbert ; X est fibré sur $P_{2n}(R)$ de fibre S_∞ contractile : on a donc, pour $A = R$,

$$\chi(X) = \chi(P_{2n}(R), R) = 1 \quad .$$

D'autre part X est fibré sur $B' = P_\infty(R)$ de fibre $F' = S_{2n}$. Mais $H_i(B', R) = R$ pour $i = 0$, 0 pour $i \neq 0$, d'où $\chi(B') = 1$, ce qui, avec $\chi(F') = 2$, $\chi(X) = 1$ donne le contre-exemple.

2. Exemples où la suite spectrale est triviale.

Nous dirons que la suite spectrale est triviale si tous les d^r sont nuls, c'est-à-dire $E^\infty = E^2 = H(B \times F)$. Ce n'est pas une condition suffisante pour que X soit homéomorphe à $B \times F$.

A. Espace fibré par des sphères sur une sphère. - Supposons $F = S_q$, $B = S_p$, $p > 1$, de sorte que B est simplement connexe.

$E^2_{i,j} = 0$ sauf pour $i = 0$ ou p, $j = 0$ ou q, donc $E^r_{i,j}$ de même. Pour que d^r ne soit pas nul, il faut simultanément $r = p$ et $r = q + 1$. D'où :

PROPOSITION. - Si $q \neq p - 1$, la suite spectrale est triviale.

B. Variétés de Stiefel complexes. - Soit $V(n , m , C)$ la variété des suites de m vecteurs orthonormaux de l'espace C^n ; $V(n , 2 , C)$ est fibré de base S_{2n-1} et de fibre S_{2n-3}. La suite spectrale est donc triviale d'après (A), et l'homologie est la même que celle de $S_{2n-1} \times S_{2n-3}$.

Dans le cas m quelconque, regardons la cohomologie et utilisons la structure multiplicative. On a alors par récurrence sur m, pour tout n :

PROPOSITION. - L'algèbre de cohomologie $H^*(V(n , m , C))$ est isomorphe à celle de $S_{2n-1} \times S_{2n-3} \times \dots \times S_{2n-2m+1}$: c'est l'algèbre extérieure d'un A-module libre dont la base se compose d'un élément dans chacune des dimensions impaires de $2n - 1$ à $2n - 2m + 1$.

Supposons ceci vrai pour m et démontrons-le pour $m + 1$, dans le cas $A = Z$. L'espace $V(n , m + 1 , C)$ est fibré de fibre $V(n - 1 , m , C)$ sur S_{2n-1}. Seule d_{2n-1} pourrait ne pas être nulle, puisque $E_2^{p,q} = 0$ sauf pour $p = 0$ ou $2n - 1$; mais elle est nulle sur les générateurs de l'algèbre $E_2^{0,*} = H^*(F)$ qu'elle envoie dans des modules de $q < 0$. Puisque c'est une antidérivation, elle est nulle identiquement. E_∞ est bien du type annoncé. $H^p(X)$ est libre puisque son gradué associé l'est.

On peut relever les générateurs de $H^*(F)$ en des éléments homogènes de $H^*(X)$: ces éléments seront de carré nul puisque de dimension impaire dans une algèbre anticommutative sans élément d'ordre 2, et ils définiront un relèvement multiplicatif de $H^*(F)$ dans $H^*(X)$. On en déduit la proposition quand $A = Z$. Le cas de A quelconque s'y ramène en considérant l'application canonique :

$$H^*(X , Z) \to H^*(X , A) .$$

La différentielle d^r, transposée de d_r, est aussi nulle, et la suite spectrale d'homologie est aussi triviale.

On obtiendrait des résultats semblables, par la même méthode, en remplaçant le corps complexe C par le corps des quaternions.

C. <u>Variété de Stiefel réelle</u> $V(n\ ,\ 2\ ,\ R)$. - Cette variété est fibrée sur S_{n-1} de fibre S_{n-2} . C'est justement le cas où la suite spectrale peut ne pas être triviale. Elle l'est cependant pour n pair : on peut alors, en effet, munir R^n d'une structure complexe, et, en associant à tout vecteur unitaire u le vecteur iu , on obtient une section du fibré. Dans ce cas B s'identifie à un rétracte de X , et $P_* : H_p(X) \longrightarrow H_p(B)$ est surjective. Or son image n'est autre que $E^{\infty}_{p,0}$. On en déduit que $d^r_{p,0} = 0$ pour tout $r \geqslant 2$ et tout p . Ici, cela entraîne que la suite spectrale est triviale.

3. <u>Utilisation des coins</u>.

Trois exemples suffiront.

A. <u>Fibré sur une variété</u>.

PROPOSITION. - Considérons le cas où B est une variété compacte connexe de dimension p. Supposons de plus que B soit orientable ou que A soit de caractéristique 2. Si $H_j(F) = 0$ pour $j > q$, alors

a. $H_n(X) = 0$ pour $n > p + q$

b. $H_{p+q}(X) = H_q(F)$

c. $H_{p+q-1}(X)$ contient $H_{p-1}(B) \otimes H_q(F)$ comme sous-module.

DÉMONSTRATION. On a évidemment $E^2_{i,j} = H_i(B\ ,\ H_j(F)) = 0$ pour $j > q$; il en est de même pour $i > p + 1$ et aussi pour $i = p + 1$, puisque $\mathrm{Tor}(H_p(B)\ ,\ H_j(F)) = 0$, $H_p(B)$ étant libre. On a donc $E^2_{i,j} = 0$ pour $i + j > p + q$, d'où (a). D'autre part $H_{p-1}(B) = H^1(B) = \mathrm{Hom}\ H_1(B), A)$ est sans torsion, et $\mathrm{Tor}(H_{p-1}(B)\ ,\ H_j(F)) = 0$, donc $E^2_{p,q} = H_q(F)$. Les d^r qui arrivent en $E^r_{p,q}$ et $E^r_{p-1,q}$ ou qui en partent sont nulles, car elles viennent d'un module nul ou y vont. On a donc $E^{\infty}_{p,q} = E^2_{p,q}$; mais $E^{\infty}_{p,q}$ est le seul non nul de degré total $p + q$, donc $E^{\infty}_{p,q} = H_{p+q}(X)$, d'où (b). De même $E^{\infty}_{p-1,q} = E^2_{p-1,q}$; mais $E^{\infty}_{p-1,q}$ est le premier terme non nul du gradué associé à $H_{p+q-1}(X)$: c'en est donc un sous-module. Or $H_{p-1}(B) \otimes H_q(F)$ s'injecte dans $E^2_{p-1,q}$ d'où (c).

COROLLAIRE. - L'espace Ω des lacets d'une variété B connexe, compacte et simplement connexe de dimension $p > 0$ a une infinité de modules d'homologie non nuls.

Sinon il y aurait un plus grand q avec $H_q(\Omega) \neq 0$ et on aurait, X étant l'espace contractile des chemins d'origine b, $H_{p+q}(X) = H_q(\Omega) \neq 0$.

EXERCICE. - Si A est un corps, $H_i(B) = 0$ pour $i > p$, $H_j(F) = 0$ pour $j > q$, alors : $H_n(X) = 0$ pour $n > p + q$, $H_{p+q}(X) = H_p(B) \otimes H_q(F)$, $H_{p+q-1}(X) \supset H_{p-1}(B) \otimes H_q(F)$.

B. <u>Homologie relative</u>. - Soient $B' \subset B$, $X' = \bar{P}^1(B')$, et supposons F connexe.

PROPOSITION. - Si $H_i(B \bmod B') = 0$ pour $i < p$ (ce qui implique B' non vide si $p > 0$), on a :

a. $H_i(X \bmod X') = 0$ pour $i < p$;

b. $H_p(X \bmod X') \to H_p(B \bmod B')$ est un isomorphisme ;

c. $P_* : H_{p+1}(X \bmod X') \to H_{p+1}(B \bmod B')$ est surjective (rappelons que le système local des groupes d'homotopie de la fibre est supposé constant).

DÉMONSTRATION. - On a encore $E^2_{i,j} = 0$ pour $i < p$, d'où (a). Les d^r qui partent de $E^r_{p,0}$ et $E^r_{p+1,0}$ sont nulles ; on a donc $E^\infty_{p,0} = E^2_{p,0} = H_p(B \bmod B')$, d'où (b) puisque $E^\infty_{p,0}$ est le seul terme non nul de son degré total. De même $E^\infty_{p+1,0} = E^2_{p+1,0} = H_{p+1}(B \bmod B')$, d'où (c) puisque $E^\infty_{p+1,0}$ est le dernier terme du gradué associé à $H_{p+1}(X)$.

C. Soit $\mathcal{C}$ une classe de A-modules vérifiant les conditions suivantes :

c. 1° Si $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ est une suite exacte de A-modules,

$$M \in \mathcal{C} \iff (M' \in \mathcal{C} \text{ et } M'' \in \mathcal{C}) \ ;$$

c. 2° $\mathcal{C}$ est stable pour $\otimes$ et Tor.

EXEMPLES. - $A = \mathbf{Z}$, $\mathcal{C}$ étant la classe des groupes abéliens finis ; A anneau principal, $\mathcal{C}$ étant la classe des modules de type fini ; $\mathcal{C}$ est la classe des modules admettant une famille de générateurs dont le cardinal est inférieur ou égal à un cardinal (infini) donné.

Disons qu'un espace E est de type $\mathcal{C}$ si E est connexe, non vide, avec $H_n(E) \in \mathcal{C}$ pour tout $n > 0$.

PROPOSITION. - Si deux des espaces F , X , B sont de type $\mathcal{C}$, le troisième l'est aussi.

Tout d'abord il résulte de (c. 1°) que $H_n(X) \in \mathcal{C}$ si et seulement si $E^{\infty}_{p,q} \in \mathcal{C}$ chaque fois que $p + q = n$.

Si les deux espaces de type $\mathcal{C}$ sont B et F , chaque module $E^2_{p,q}$ est dans $\mathcal{C}$ pour $p + q > 0$: cela résulte de la formule des coefficients universels pour $p > 0$, $q > 0$; si $q = 0$, $E^2_{p,0} = H_p(B)$; si $p = 0$, $E^2_{0,q} = H_q(F)$.

Alors $E^{\infty}_{p,q}$, quotient d'un sous-module de $E^2_{p,q}$, sera aussi dans $\mathcal{C}$ pour $p + q > 0$. Si les deux espaces de type $\mathcal{C}$ sont X et B , F est connexe, car le système local $\mathcal{H}_0(\mathcal{F})$ est constant et X connexe (On peut aussi regarder le coin $E_{0,0}$). Raisonnons par l'absurde : soit q le plus petit entier > 0 tel que $E^2_{0,q} = H_q(F) \notin \mathcal{C}$; $E^2_{i,j}$ est dans $\mathcal{C}$ pour $0 < j < q$ ou $i > 0$, $j = 0$, donc aussi $E^r_{i,j}$ pour tout r et les mêmes i , j ; $E^{r+1}_{0,q}$, quotient de $E^r_{0,q}$ par l'image d'un module de $\mathcal{C}$, refusera par récurrence sur r d'être dans $\mathcal{C}$, ainsi que $E^{\infty}_{0,q} = E^{q+2}_{0,q}$. Donc $H_q(X) \notin \mathcal{C}$, d'où contradiction.

En particulier, si B simplement connexe est de type $\mathcal{C}$, l'espace des lacets $\Omega(B)$ est de type $\mathcal{C}$.

Le cas où les espaces de type $\mathcal{C}$ sont X et F est laissé au lecteur comme exercice. Quand X est simplement connexe, on peut aussi le ramener au cas précédent en utilisant la fibration de F' sur B de fibre $\Omega(B)$, F' se rétractant par déformation sur F .

EXERCICE. - Disons que E est de type $\mathcal{C}$ jusqu'à n si E est connexe, non vide, avec $H_i(E) \in \mathcal{C}$ pour $0 < i \leq n$. Si B et F (resp. X et F) sont de type $\mathcal{C}$ jusqu'à n , alors X (resp. B) l'est aussi. Si B et X sont de type $\mathcal{C}$ jusqu'à n , F l'est jusqu'à $n - 1$.

4. <u>Transgression</u>.

On appelle transgression la différentielle :

$$\theta = d^r_{r,0} : E^r_{r,0} \to E^r_{0,r-1} .$$

On a :

$$E^{\infty}_{r,0} = E^{r+1}_{r,0} = \operatorname{Ker} \theta , \text{ et } E^{\infty}_{0,r-1} = E^{r+1}_{0,r-1} = \operatorname{Coker} \theta ,$$

d'où la suite exacte

$$0 \to E^\infty_{r,0} \to E^r_{r,0} \xrightarrow{\theta} E^r_{0,r-1} \to E^\infty_{0,r-1} \quad .$$

PROPOSITION. - <u>Si</u> B <u>et</u> F <u>sont connexes, et si</u> $E^2_{p,q} = 0$ <u>pour</u> $p > 0$, $q > 0$, $p + q = r$ <u>ou</u> $r - 1$, <u>on a une suite exacte</u> :

$$H_r(X) \to H_r(B) \xrightarrow{\theta} H_{r-1}(F) \to H_{r-1}(X) \ .$$

En effet les différentielles $d^{r'}$ qui partent de $E^{r'}_{r,0}$ ou arrivent en $E^{r'}_{0,r-1}$ sont nulles pour $r' < r$. On a donc

$$E^r_{r,0} = E^2_{r,0} = H_r(B) \quad ; \quad E^r_{0,r-1} = E^2_{0,r-1} = H_{r-1}(F) \quad ,$$

$$\begin{tikzcd}
 & H_r(X) \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & E^\infty_{r,0} \arrow[r] \arrow[d] & H_r(B) \arrow[r] & H_{r-1}(F) \arrow[r] & E^\infty_{0,r-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & & H_{r-1}(X) &
\end{tikzcd}$$

C. Q. F. D.

Enonçons sans la démontrer, et en anticipant sur l'exposé 4, une propriété qui permet parfois de déterminer la transgression :

On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\pi_r(B) \arrow[rrr, "\partial"] \arrow[dr, "h'_r"] \arrow[dd, "h_r"'] & & & \pi_{r-1}(F) \arrow[dd, "h_{r-1}"] \\
 & E^\infty_{r,0} \arrow[dl] \arrow[ddr, "\theta"] & 0 \arrow[l] & \\
H_r(B) = E^2_{r,0} & & & E^2_{0,p-1} = H_{r-1}(F) \arrow[dl] \\
 & & E^\infty_{0,p-1} \arrow[dl] & \\
 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

où ∂ est l'opérateur bord de la suite exacte d'homotopie du fibré, et h_r et h_{r-1} sont les homomorphismes de Hurewicz.

5. Trois suites exactes.

Si pour un certain n et un certain r, $E^r_{p,n-p}$ est nul sauf pour deux valeurs p' et p'' $(p' < p'')$ de p, il en est de même de $E^{\infty}_{p,n-p}$, et le gradué associé à $H_n(X)$ n'a que deux termes non nuls : on a une suite exacte

$$0 \to E^{\infty}_{p',n-p'} \to H_n(X) \to E^{\infty}_{p'',n-p''} \to 0 .$$

En supposant B et F connexes, nous allons conclure dans les trois cas suivants.

A. PROPOSITION. - Supposons que

$$\begin{cases} H_i(B) = 0 & \text{pour } 0 < i < p , \\ H_j(F) = 0 & \text{pour } 0 < j < q . \end{cases}$$

Alors on a une suite exacte

$$H_{p+q-1}(F) \to H_{p+q-1}(X) \to H_{p+q-1}(B) \xrightarrow{\theta} H_{p+q-2}(F) \to \dots$$

$$\dots \to H_2(B) \xrightarrow{\theta} H_1(F) \to H_1(X) \to H_1(B) \to 0 .$$

De plus, dans le cas où $p = 1$ (donc sans aucune hypothèse sur les $H_i(B)$ pour $i > 0$), on a une suite exacte

$$H_{q+1}(X) \to H_{q+1}(B) \xrightarrow{\theta} H_q(F) \to H_q(X) \to H_q(B) \to 0$$

et des isomorphismes

$$H_n(X) \approx H_n(B) \quad \text{pour } 0 < n < q .$$

DÉMONSTRATION. - On a évidemment $E^2_{i,j} = 0$ pour $i > 0$, $j > 0$, $i + j < p + q$. Pour $2 \leq n < p + q$, on a un diagramme de suites exactes

$$
\begin{tikzcd}
H_n(F) \arrow[d, equal] & 0 \arrow[d] & & & & \\
E^2_{0,n} \arrow[r] & E^\infty_{0,n} \arrow[r] \arrow[d] & 0 & & & \\
& H_n(X) \arrow[d] & H_n(B) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, equal] & H_{n-1}(F) \arrow[d, equal] & & \\
0 \arrow[r] & E^\infty_{n,0} \arrow[r] \arrow[d] & E^n_{n,0} \arrow[r, "d^n"] & E^n_{0,n-1} \arrow[r] & E^\infty_{0,n-1} \arrow[r] & 0 \\
& 0 & & & &
\end{tikzcd}
$$

Le cas $n = 1$ se traite d'une manière évidente.

De plus, si $p = 1$, on a le diagramme de suites exactes

$$
\begin{tikzcd}
& H_{q+1}(X) \arrow[d] & H_{q+1}(B) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, equal] & H_q(F) \arrow[d, equal] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & E^\infty_{q+1,0} \arrow[r] \arrow[d] & E^{q+1}_{q+1,0} \arrow[r, "d^{q+1}"] & E^{q+1}_{0,q} \arrow[r] & E^\infty_{0,q} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & & & H_q(X) &
\end{tikzcd}
$$

D'où les assertions de l'énoncé.

REMARQUE. - Pour $q = 1$, on obtient (sans hypothèse sur $H_i(B)$ ni sur $H_j(F)$ pour $i > 0$, $j > 0$) une suite exacte

$$H_2(X) \longrightarrow H_2(B) \xrightarrow{\theta} H_1(F) \longrightarrow H_1(X) \longrightarrow H_1(B) \longrightarrow 0$$

B. Suite exacte de Wang.

PROPOSITION. - Si la base B est une sphère S_k (quant à l'homologie à coefficients dans A), avec $k \geqslant 2$, on a une suite exacte illimitée

$$\cdots \longrightarrow H_n(F) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_{n-k}(F) \xrightarrow{\theta} H_{n-1}(F) \longrightarrow \cdots$$

Si de plus la fibre F_0 est un H-espace qui opère sur chaque fibre de X (et opère sur elle-même par translation à gauche), alors θ est, à un facteur ± 1 près, la multiplication (à droite) par un élément $g \in H_{k-1}(F)$.

DÉMONSTRATION. - On a $E^2_{i,j} = 0$ pour $i \neq 0$, k. D'où le diagramme de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
H_n(F) \arrow[d, equal] & 0 \arrow[d] \\
E^2_{0,n} \arrow[r] & E^\infty_{0,n} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& H_n(X) \arrow[d] & & & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & E^\infty_{k,n-k} \arrow[r] \arrow[d] & E^k_{k,n-k} \arrow[r, "d^k"] \arrow[d, equal] & E^k_{0,n-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & E^\infty_{0,n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & E^2_{k,n-k} \arrow[d, equal] & E^2_{0,n-1} \arrow[d, equal] & H_{n-1}(X) \\
& & H_k(B\,,\,H_{n-k}(F)) & H_{n-1}(F)
\end{tikzcd}$$

Il suffit de remarquer que $H_{n-k}(F) \approx H_k(B\,,\,H_{n-k}(F))$, ce qui est d'ailleurs nul pour $n < k$. Si en outre F_0 est un H-espace comme dans l'énoncé, et si ε désigne le générateur de $H_k(B)$, l'isomorphisme précédent est celui qui associe à $h \in H_{n-k}(F)$ le produit $h.\varepsilon \in H_k(B\,,\,H_{n-k}(F))$; donc

$$\Theta(h) = d^k(h.\varepsilon) = (-1)^{n-k}\, h.(d^k \varepsilon) \quad ,$$

et par suite Θ est, au facteur $(-1)^{n-k}$ près, la multiplication à droite par $g = d^k \varepsilon \in H_{k-1}(F)$.

(N. B. - La notation $h.\varepsilon$ est celle explicitée dans l'Exposé 2, page 2-09, c. ; page 2-09, a., il est entendu que les d^r sont L-linéaires <u>au sens gradué</u>, c'est-à-dire

$$d^r(\ell.a) = (-1)^\lambda\, \ell.(d^r a) \quad ,$$

λ désignant le degré de ℓ.)

APPLICATION. - Soit $B = S_k$, $k > 1$, X l'espace des chemins d'origine b, $F = \Omega(S_k)$ l'espace des lacets. Comme $H_n(X) = 0$ sauf pour $n = 0$, la multiplication par g définit un isomorphisme $H_{n-k+1}(F) \longrightarrow H_n(F)$, sauf pour $n = 0$. Comme $H_n = 0$ pour $n < 0$, on en déduit que l'algèbre $H_*(F)$ est l'algèbre des polynômes $A[g]$, où g est de degré $k-1$.

REMARQUE. - On a une suite exacte analogue en cohomologie ; θ est une dérivation ou une antidérivation suivant la parité de k, sans qu'il soit besoin de supposer que la fibre soit un H-espace. Lorsque $F = \Omega(S_k)$, on se gardera bien de croire que $H^*(F)$ soit une algèbre de polynômes à un générateur de degré $k-1$.

C. <u>Suite exacte de Gysin</u>.

PROPOSITION. - Si F est une sphère S_k (quant à l'homologie à coefficients dans Λ) et si $k \geqslant 1$, on a la suite exacte :

$$\ldots \longrightarrow H_{n+1}(B) \xrightarrow{\theta} H_{n-k}(B) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(B) \rightarrow \ldots .$$

En cohomologie, on a la suite exacte

$$\ldots \longrightarrow H^n(B) \longrightarrow H^n(X) \longrightarrow H^{n-k}(B) \xrightarrow{\theta'} H^{n+1}(B) \longrightarrow \ldots ,$$

θ' est alors la multiplication par un élément g de $H^{k+1}(B)$, d'ordre 2 si k est pair, appelé classe caractéristique du fibré.

La démonstration de la suite exacte est analogue à celle de la suite exacte de Wang. Si ε est un générateur de $H^k(F)$, il définit un isomorphisme

$$H^i(B) \longrightarrow E_2^{i,k} \qquad \text{par} \qquad h \longrightarrow \varepsilon.h .$$

On a

$$\theta(h) = d(\varepsilon.h) = (d\,\varepsilon).h + (-1)^k\,\varepsilon.(dh) .$$

Le deuxième terme est nul, d'où $\theta(h) = gh$.

Si k est pair, on a dans l'algèbre E_2,

$$0 = d(\varepsilon^2) = \varepsilon g + g\varepsilon = 2\,\varepsilon g \quad , \quad \text{d'où} \quad 2g = 0 .$$

EXEMPLE. - Soit B une variété compacte orientable de dimension $k \geqslant 2$, X l'espace des vecteurs non nuls tangents à B, et $\Lambda = Z$; F se rétracte par déformation sur S_{k-1}. La seule différentielle d^r qui puisse être non nulle est $d^k : H_k(B) \rightarrow H_{k-1}(F)$. Si k est impair, la transposée d_k de d^k est nulle car $H^k(B) = Z$ ne contient pas d'élément d'ordre 2, donc d_k est nulle et la suite spectrale est triviale. On peut d'ailleurs voir dans ce cas, en triangulant B et en utilisant la théorie des obstructions, que X admet une section.