Weishu Shih

Ensembles simpliciaux et opérations cohomologiques

Séminaire Henri Cartan, tome 11, nº 1 (1958-1959), exp. nº 7, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1958-1959__11_1_A7_0>

18 janvier 1959

ENSEMBLES SIMPLICIAUX ET OPÉRATIONS COHOMOLOGIQUES

par SHIH Weishu

Le but de cet exposé est de montrer que la théorie des "opérations cohomologiques" dans la catégorie des espaces topologiques est équivalente (dans un sens qui sera précisé) à la théorie des opérations cohomologiques dans la catégorie des "ensembles simpliciaux" (anciennement dénommés "complexes semi-simpliciaux", ou encore "complexes C. S. S.").

1. Ensembles simpliciaux.

Il s'agit d'un bref rappel de notions maintenant classiques. Considérons la catégorie Δ définie comme suit : les objets de Δ forment une suite $\Delta_0 , \Delta_1 , \ldots , \Delta_n , \ldots$, où Δ_n désigne la suite des entiers $(0 , 1 , \ldots , n)$. Les morphismes $\Delta_p \to \Delta_q$ sont, par définition, les applications croissantes (au sens large). Tout morphisme s'obtient par composition des morphismes identiques $\Delta_n \to \Delta_n$ et des morphismes du type suivant :

$$\delta_i : \Delta_n \longrightarrow \Delta_{n+1} \quad (0 \leq i \leq n + 1) ,$$

$$\sigma_i : \Delta_{n+1} \longrightarrow \Delta_n \quad (0 \leq i \leq n) ,$$

où δ_i désigne l'application strictement croissante qui ne prend pas la valeur i , et σ_i l'application surjective qui prend deux fois la valeur i . Les applications δ_i sont les morphismes "de face", les σ_i sont les morphismes "de dégénérescence".

Soit maintenant $\mathcal{C}$ une catégorie quelconque. On lui associe la catégorie $\mathcal{C}^{\Delta}$ des foncteurs contravariants de Δ dans $\mathcal{C}$. Un objet de $\mathcal{C}^{\Delta}$ est donc défini par la donnée :

1° d'une suite d'objets $K_0 , \ldots , K_n , \ldots$ de la catégorie $\mathcal{C}$;

2° pour chaque entier $n \geq 0$, de $\mathcal{C}$-morphismes

$$\partial_i : K_{n+1} \longrightarrow K_n \quad (0 \leq i \leq n + 1)$$

$$s_i : K_n \to K_{n+1} \quad (0 \leq i \leq n)$$

qui satisfont aux relations déduites de celles qui existent entre les δ_i et les σ_i , à savoir

$$\partial_i \partial_j = \partial_{j-1} \partial_i \quad \text{pour} \quad i < j ,$$

$$s_i s_j = s_{j+1} s_i \quad \text{pour} \quad i \leq j ,$$

$$\partial_i s_j = \begin{cases} s_{j-1} \partial_i & \text{pour} \quad i < j , \\ 1 & \text{pour} \quad i = j \quad \text{ou} \quad j + 1 , \\ s_j \partial_{i-1} & \text{pour} \quad i > j + 1 . \end{cases}$$

Un <u>morphisme</u> $\{K_n\} \longrightarrow \{K'_n\}$ de la catégorie $\mathcal{C}^\Delta$ est défini par la donnée, pour chaque $n \geq 0$, d'un $\mathcal{C}$-morphisme $f_n : K_n \longrightarrow K'_n$, de manière que

$$\begin{cases} \partial_i f_{n+1} = f_n \partial_i & (0 \leq i \leq n + 1) , \\ s_i f_n = f_{n+1} s_i & (0 \leq i \leq n) . \end{cases}$$

On s'intéresse ici au cas où $\mathcal{C}$ est la catégorie $\mathcal{E}$ des ensembles et des applications ensemblistes ; on notera $\mathcal{S}$ la catégorie $\mathcal{E}^\Delta$; un objet de $\mathcal{S}$ s'appelle un <u>ensemble simplicial</u>, un morphisme de $\mathcal{S}$ s'appelle une <u>application simpliciale</u>. On a un foncteur covariant C de la catégorie $\mathcal{S}$ dans la catégorie des groupes différentiels gradués : si $K = \{K_n\}$ est un ensemble simplicial, on lui associe le groupe différentiel gradué $C(K) = \sum_{n \geq 0} C_n(K)$, où $C_n(K)$ désigne le groupe abélien libre ayant pour base l'ensemble K_n , l'opérateur différentiel $\partial : C_{n+1}(K) \longrightarrow C_n(K)$ étant défini par

$$\partial = \sum_{0 \leq i \leq n+1} (-1)^i \partial_i \quad .$$

A une application simpliciale $f : K \longrightarrow K'$ correspond de manière évidente un homomorphisme $C(f) : C(K) \longrightarrow C(K')$ qui conserve les degrés et est compatible avec les différentielles. On a aussi un autre foncteur C^N : le groupe différentiel gradué $C^N(K)$ est le quotient de $C(K)$ par le sous-groupe engendré par les "simplexes dégénérés" de K , c'est-à-dire les élements de la forme $s_i u$, où u appartient à un K_n ; la différentielle de $C^N(K)$ est induite par passage au quotient à partir de celle de $C(K)$. Il est classique [1] que l'application

(1) Cela résulte par exemple du Corollaire de la p. 58 de [2], et de la proposition 1 de [1] .

naturelle $C(K) \to C^N(K)$ induit un <u>isomorphisme</u> des groupes d'homologie (gradués) $H_*(C(K)) \approx H_*(C^N(K))$. On notera simplement H_* le foncteur composé $H_* C$, ou $H_* C^N$: c'est un foncteur covariant de la catégorie $\mathcal{S}$ des ensembles simpliciaux dans la catégorie $\mathcal{G}$ des groupes abéliens gradués. On a de même le foncteur <u>cohomologie</u> H^* , qui est un foncteur contravariant de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{G}$. En réalité il y a beaucoup de foncteurs H_* et H^* , car on dispose librement du groupe abélien de coefficients choisi pour l'homologie ou la cohomologie.

2. Ensembles simpliciaux et espaces topologiques.

On note $\mathcal{C}$ la catégorie des espaces topologiques (non nécessairement séparés) et des applications continues. Soit

$$S : \mathcal{C} \to \mathcal{S}$$

le foncteur covariant qui associe à chaque espace X son "complexe singulier" $S(X)$, et à chaque application continue $f : X \to Y$ l'application simpliciale $S(f) : S(X) \to S(Y)$. Rappelons la définition du complexe singulier $S(X)$: soit A_n le simplexe affine-type de dimension n , c'est-à-dire l'ensemble des points $(t_0 , \dots , t_n) \in R^{n+1}$ tels que $t_k \geq 0$ et $\sum_{0 \leq k \leq n} t_k = 1$. Définissons les applications continues

$$\delta_i : A_n \to A_{n+1} \qquad (0 \leq i \leq n + 1) ,$$

$$\sigma_i : A_{n+1} \to A_n \qquad (0 \leq i \leq n)$$

que voici :

$$\delta_i(t_0 , \dots , t_n) = (t_0 , \dots , t_{i-1} , 0 , t_i , \dots , t_n)$$

$$\sigma_i(t_0 , \dots , t_{n+1}) = (t_0 , \dots , t_{i-1} , t_i + t_{i+1} , \dots , t_{n+1}) .$$

Un élément de $S_n(X)$ est une application continue $\varphi : A_n \to X$, et s'appelle un n-<u>simplexe singulier</u> de X . Pour $\varphi \in S_{n+1}(X)$, on définit $\partial_i \varphi = \varphi\, \delta_i$; pour $\varphi \in S_n(X)$, on définit $s_i \varphi = \varphi \sigma_i$. La collection $S(X)$ des $S_n(X)$, munie des opérateurs ∂_i et s_i , est bien un ensemble simplical.

En sens inverse, on définit un foncteur covariant

$$T : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$$

qui, à chaque ensemble simplicial K, associe un espace topologique $T(K)$, appelé la "réalisation géométrique" de K, et à chaque application simpliciale $f : K \to K'$, associe une application continue $T(f) : T(K) \to T(K')$. Précisons comment (cf. [4]). Soit K un ensemble simplicial ; considérons la somme topologique

$$\overline{K} = \sum_{n \geq 0} K_n \times A_n ,$$

où l'ensemble K_n est muni de la topologie discrète ; introduisons la relation d'équivalence $\sim$ engendrée par

$$(\partial_i k_{n+1} , a_n) \sim (k_{n+1} , \delta_i a_n) , k_{n+1} \in K_{n+1} , a_n \in A_n ,$$

$$(s_i k_n , a_{n+1}) \sim (k_n , \sigma_i a_{n+1}) , k_n \in K_n , a_{n+1} \in A_{n+1} .$$

Par définition, l'espace $T(K)$ est le quotient de $\overline{K}$ par la relation $\sim$. Si $f : K \to K'$ est une application simpliciale, f induit une application continue $\overline{f} : \overline{K} \to \overline{K}'$ compatible avec les relations d'équivalence, d'où $T(f) : T(K) \to T(K')$.

Pour chaque $k \in K_n$, l'injection de A_n dans $\overline{K}$ définie par $a \to (k , a)$ induit une application continue $A_n \to T(K)$, qu'on notera $|k|$; c'est un n-simplexe singulier de $T(K)$. L'espace $T(K)$ est réunion des images des applications $|k|$ relatives aux k non dégénérés ; et si k est non dégénéré, l'application $|k|$ induit un homéomorphisme de l'intérieur de A_n sur son image dans $T(K)$ (par contre, $|k|$ n'induit pas, en général, un homéomorphisme du bord de A_n sur son image). La structure simpliciale de K définit donc une "décomposition cellulaire" de l'espace $T(K)$.

A chaque k associons le simplexe singulier $|k|$; ceci est une application simpliciale $K \to ST(K)$, qui est évidemment "naturelle" ; autrement dit, on vient de définir un morphisme Ψ du foncteur $1_{\mathcal{S}}$ dans le foncteur ST. Le morphisme

$$H_* \Psi(K) : H_*(K) \to H_*(ST(K))$$

est un isomorphisme : cela résulte du calcul (classique) des groupes d'homologie d'un espace muni d'une décomposition cellulaire (voir par exemple [4]). De même,

$$H^* \Psi(K) : H^*(ST(K)) \to H^*(K)$$

est un isomorphisme.

On va maintenant définir, pour tout couple (K , X) formé d'un ensemble simplicial K et d'un espace topologique X, une bijection naturelle

(1) $$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(K , S(X)) \leftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}}(T(K) , X) .$$

Soit en effet $g : K \to S(X)$ une application simpliciale ; définissons $\overline{g} : \overline{K} \to X$ par la formule

$$\overline{g}(k , a) = g(k)(a) ,$$

le second membre désignant l'image de $a \in A_n$ par le simplexe singulier $g(k)$; $\overline{g}$ est bien une application continue, et comme g est simpliciale, $\overline{g}$ est compatible avec la relation d'équivalence $\sim$ dans $\overline{K}$ et induit donc une application continue $g^{\star} : T(K) \to X$. Inversement, soit $f : T(K) \to X$ une application continue ; pour chaque $k \in K_n$ l'application composée

$$A_n \xrightarrow{|k|} T(K) \xrightarrow{f} X$$

est un simplexe singulier de X ; d'où une application $f^{\#} : K \to S(X)$ dont on vérifie aussotôt qu'elle est simpliciale. On vérifie que

$$(g^{\star})^{\#} = g \quad \text{et} \quad (f^{\#})^{\star} = f ,$$

ce qui prouve que les deux applications $g \to g^{\star}$ et $f \to f^{\#}$ sont des bijections, réciproques l'une de l'autre. D'où (1).

La bijection (1) est évidemment "naturelle". Par cette bijection les deux foncteurs S et T deviennent <u>adjoints</u>, au sens de KAN [3]. On va maintenant développer quelques considérations générales relatives aux foncteurs adjoints, qu'on appliquera ensuite à la présente situation.

3. Foncteurs adjoints.

DÉFINITION. - Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories, et soient $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ et $S : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ des foncteurs covariants. On dit qu'ils sont adjoints si l'on s'est donné, pour tout couple formé d'un $A \in \mathcal{A}$ et d'un $B \in \mathcal{B}$, deux applications naturelles

$$\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A , S(B)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T(A) , B))$$

et

$$\psi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T(A) , B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A , S(B)) ,$$

et si ces applications sont des bijections, réciproques l'une de l'autre.

EXEMPLE. - Le lecteur observera que, au début de l'exposé 5, le foncteur "suspension" et le foncteur "espace des lacets" ont été définis comme foncteurs adjoints.

PROPOSITION 1. - La donnée d'une application naturelle φ équivaut à celle d'un morphisme de foncteurs

$$\Phi : TS \to 1_{\mathcal{B}} .$$

En effet, supposons l'application φ donnée ; soit $i_{S(B)}$ le morphisme identique de $S(B)$; $\varphi(i_{S(B)})$ est un morphisme $TS(B) \to B$, et ce morphisme est naturel vis-à-vis de B. On obtient donc un morphisme Φ du foncteur TS dans le foncteur $1_{\mathcal{B}}$. Réciproquement, soit donné un tel morphisme Φ ; et soit f un $\mathcal{A}$-morphisme $A \to S(B)$; soit g le morphisme composé

$$T(A) \xrightarrow{T(f)} TS(B) \xrightarrow{\Phi(B)} B \quad ;$$

posons $g = \varphi(f)$. On definit ainsi une application

$$\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A , S(B)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T(A) , B) ,$$

et elle est "naturelle". On laisse au lecteur le soin de vérifier que la correspondance ainsi définie entre applications φ et morphismes Φ est bijective.

On prouve de même :

PROPOSITION 1 bis. - La donnée d'une application naturelle ψ équivaut à celle d'un morphisme de foncteurs

$$\Psi : 1_{\mathcal{A}} \to ST .$$

PROPOSITION 2. - Soient données des applications naturelles φ et ψ, et soient $\Phi : TS \to 1_{\mathcal{B}}$ et $\Psi : 1_{\mathcal{A}} \to ST$ les morphismes de foncteurs correspondants. Pour que l'application composée $\psi \circ \varphi$ soit l'identité, il faut et il suffit que le morphisme composé

$$S \xrightarrow{\Psi S} STS \xrightarrow{S\Phi} S$$

soit le morphisme identique du foncteur S.

DÉMONSTRATION. - Partons de $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, S(B))$; soit $g = \varphi(f)$; alors $\psi(g)$ est le mrophisme composé

$$A \xrightarrow{\Psi(A)} ST(A) \xrightarrow{S(g)} S(B) \quad ,$$

c'est-à-dire, en explicitant, le morphisme composé

$$(2) \qquad A \xrightarrow{\Psi(A)} ST(A) \xrightarrow{ST(f)} STS(B) \xrightarrow{S\Phi(B)} S(B) .$$

Pour que $\psi(\varphi(f)) = f$ pour tout f, il faut qu'il en soit ainsi lorsque f est $i_{S(B)}$; donc le composé

$$S(B) \xrightarrow{\Psi S(B)} STS(B) \xrightarrow{S\Phi(B)} S(B)$$

doit être l'identité, autrement dit le morphisme $(S\Phi) \circ (\Psi S)$ est l'identité. Cette condition nécessaire est aussi suffisante : car le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Psi(A)} & ST(A) \\ \downarrow f & & \downarrow ST(f) \\ S(B) & \xrightarrow{\Psi S(B)} & STS(B) \end{array}$$

et alors le composé des morphismes (2) sera bien f .

Par dualité, on a la

PROPOSITION 2 bis. - Pour que l'application composée $\varphi \circ \psi$ soit l'identité, il faut et il suffit que le morphisme composé

$$T \xrightarrow{T\Psi} TST \xrightarrow{\Phi T} T$$

soit le morphisme identique du foncteur T .

Nous pouvons maintenant conclure : se donner S et T comme foncteurs adjoints revient à se donner deux morphismes de foncteurs

$$\Phi : TS \to 1_{\mathcal{B}} \quad , \quad \Psi : 1_{\mathcal{A}} \to ST \quad ,$$

de manière que le morphisme composé $(S\Phi) \circ (\Psi S)$ soit l'identité et que le morphisme composé $(\Phi T) \circ (T\Psi)$ soit l'identité.

Si maintenant nous revenons aux deux foncteurs S et T du paragraphe 2, le morphisme $\Psi : 1_{\mathcal{S}} \to ST$ n'est autre que celui qui a déjà été explicité, et qui associe à chaque $k \in K_n$ le n-simplexe singulier $|k|$ de l'espace $T(K)$. A titre d'exercice, le lecteur explicitera le morphisme $\Phi : TS \to 1_{\mathcal{C}}$.

4. Opérations cohomologiques.

Soient donnés deux entiers n et q, et deux groupes abéliens G et G'. Une opération cohomologique de type (n, q, G, G') consiste dans la donnée, pour chaque ensemble simplicial K, d'une application $U(K) : H^n(K;G) \to H^q(K;G')$, de manière que si $f : K \to K'$ est une application simpliciale, le diagramme

$$\begin{tikzcd} H^n(K' ; G) \arrow[r, "U(K')"] \arrow[d, "H^n(f;G)"] & H^q(K' ; G') \arrow[d, "H^q(f;G')"] \\ H^n(K ; G) \arrow[r, "H(K)"] & H^q(K ; G') \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Si de plus $U(K)$ est un homomorphisme de groupes abéliens pour chaque K, on dit que l'opération cohomologique U est additive.

Considérons $H^n(K ; G)$ et $H^q(K ; G')$ comme des foncteurs (contravariants) de la catégorie $\mathcal{S}$ dans la catégorie des ensembles. On voit qu'une opération cohomologique n'est pas autre chose qu'un morphisme du premier foncteur dans le second. Si on considère ces deux foncteurs comme prenant leurs valeurs dans la catégorie des groupes abéliens (et non plus des ensembles), alors un morphisme est une opération cohomologique additive. Ce qui va suivre s'appliquera aussi bien aux opérations cohomologiques générales qu'aux opérations cohomologiques additives.

Ce qu'on vient de définir, ce sont les opérations cohomologiques pour la catégorie des ensembles simpliciaux. Mais on a aussi une notion d'opération cohomologique pour la catégorie des espaces topologiques : pour chaque espace topologique X, on se donne une application $V(X) : H^n(S(X) ; G) \to H^q(S(X) ; G')$, de manière que si $g : X \to X'$ est une application continue, un diagramme évident soit commutatif. Autrement dit, V est un morphisme du foncteur $H^n S$ dans le foncteur $H^q S$ (le premier étant pris à coefficients dans G, le second à coefficients dans G').

On se propose d'établir une correspondance bijective naturelle entre opérations cohomologiques de type (n, q, G, G') sur les ensembles simpliciaux, et opérations cohomologiques de type (n, q, G, G') sur les espaces topologiques. Cette correspondance doit évidemment associer à chaque morphisme $U : H^n \to H^q$ le morphisme $US : H^nS \to H^qS$.

THÉORÈME. - L'application qui, à chaque morphisme $U : H^n \to H^q$, associe le morphisme $US : H^nS \to H^qS$, est bijective.

DÉMONSTRATION. - Notons S^* l'application qui, à chaque morphisme de foncteurs U, associe le morphisme de foncteurs US. Et notons $\mathrm{Hom}(H^n, H^q)$ l'ensemble des morphismes du foncteur H^n dans le foncteur H^q. On a évidemment un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(H^n, H^q) \arrow[r, "(ST)^*"] \arrow[d, "S^*"] & \mathrm{Hom}(H^n ST, H^q ST) \arrow[d, "S^*"] \\
\mathrm{Hom}(H^n S, H^q S) \arrow[r, "(TS)^*"] \arrow[ur, "T^*"] & \mathrm{Hom}(H^n STS, H^q STS)
\end{tikzcd}$$

On veut montrer que l'application S^* de gauche est une bijection. Pour cela, il suffit de montrer que $(ST)^*$ et $(TS)^*$ sont des bijections (alors toutes les applications du diagramme seront des bijections).

1° L'application $(ST)^*$ est bijective. - En effet, considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H^n ST(K) \arrow[r, "UST(K)"] \arrow[d, "H^n \Psi(K)"] & H^q ST(K) \arrow[d, "H^q \Psi(K)"] \\
H^n(K) \arrow[r, "U(K)"] & H^q(K)
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont des isomorphismes (cf. paragraphe 2, calcul de la cohomologie d'un espace $T(K)$ muni d'une décomposition cellulaire). Ce diagramme montre que tout morphisme $V : H^n ST \to H^q ST$ définit un morphisme $U : H^n \to H^q$, par

$$U(K) = (H^q \Psi(K)) \circ (V(K)) \circ (H^n \Psi(K))^{-1} ,$$

et que l'on a alors $V = UST$.

2° L'application $(TS)^*$ est bijective. - Par un raisonnement analogue, il suffit de montrer que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
H^n STS(X) \arrow[r, "VTS(X)"] \arrow[d, "H^n \Psi S(X)"] & H^q STS(X) \arrow[d, "H^q \Psi S(X)"] \\
H^n S(X) \arrow[r, "V(X)"] & H^q S(X)
\end{tikzcd}$$