Adrien Douady

Les complexes d'Eilenberg-MacLane

Séminaire Henri Cartan, tome 11, nº 1 (1958-1959), exp. nº 8, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1958-1959__11_1_A8_0>

LES COMPLEXES D'EILENBERG-MACLANE

par Adrien DOUADY

1. Rappel.

Les notations sont celles de l'exposé 7, n° 1 .

Si $X = (X_n)$ est un ensemble simplicial, on notera $S_n(X)$ l'ensemble X_n , pour se permettre de mettre des indices à X , et on appellera ses éléments n-simplexes de X .

On dit qu'un ensemble simplicial Y est un sous-ensemble simplicial de X , et on écrit $Y \subset X$, si $S_n(Y) \subset S_n(X)$, les ∂_i et les s_i étant induits par ceux de X . On définit alors l'ensemble simplicial quotient X/Y : on obtient $S_n(X/Y)$ à partir de $S_n(X)$ en identifiant entre eux les éléments de $S_n(Y)$.

Si X et Y sont deux ensembles simpliciaux, on définit l'ensemble simplicial produit $X \times Y$ par

$$S_n(X \times Y) = S_n(X) \times S_n(Y)$$

$$\partial_i(x , y) = (\partial_i(x) , \partial_i(y))$$

$$s_i(x , y) = (s_i(x) , s_i(y)) \quad .$$

Le n-modèle $\underset{\sim}{\Delta}_n$ est l'ensemble simplicial défini par :

$$S_q(\underset{\sim}{\Delta}_n) = \mathrm{Hom}(\Delta_q , \Delta_n)$$

avec, si $a \in S_q(\underset{\sim}{\Delta}_n)$

$$\partial_i(a) = a . \delta_i$$

$$s_i(a) = a . \sigma_i$$

L'identité $x \in \mathrm{Hom}(\Delta_n , \Delta_n)$ est appelée n-simplexe fondamental de $\underset{\sim}{\Delta}_n$. Pour tout n-simplexe a d'un ensemble simplicial X , il existe une application simpliciale $\tilde{a}$ et une seule de $\underset{\sim}{\Delta}_n$ dans X telle que $\tilde{a}(x) = a$.

En posant $\tilde{\delta}_i = \widetilde{\partial_i(x)}$ et $\tilde{\sigma}_i = \widetilde{s_i(x)}$, on a

$$\widetilde{\partial_i(a)} = \tilde{a} \circ \tilde{\delta}_i \ , \quad \widetilde{s_i(a)} = \tilde{a} \circ \tilde{\sigma}_i \quad ,$$

$$\widetilde{f(a)} = f \circ \tilde{a}$$

pour toute application simpliciale f .

Deux applications simpliciales f_o et f_1 de X dans X' sont dites homotopes s'il existe une application simpliciale h du produit $(X \times \underset{\sim}{\Delta}_1)$ dans X' telle que $h \circ i_o = f_o$, $h \circ i_1 = f_1$, i_o et i_1 désignant les deux injections $(I , \tilde{\delta}_1)$ et $(I , \tilde{\delta}_o)$ de $X = X \times \underset{\sim}{\Delta}_o$ dans $X \times \underset{\sim}{\Delta}_1$.

Soit (X , Y) , où $Y \subset X$, une paire d'ensembles simpliciaux, et soit π un groupe abélien. Le groupe de cochaînes $C^n(X , Y ; \pi)$ est le groupe abélien des fonctions $S_n(X) \to \pi$, nulles sur $S_n(Y)$. On pose

$$C^*(X , Y ; \pi) = \oplus_n C^n(X , Y ; \pi) \quad .$$

On note $C^n(X ; \pi)$, $C^*(X ; \pi)$ si Y est vide.

Le groupe des cochaînes normalisées $C^*_N(X , Y ; \pi)$ est formé des cochaînes nulles sur les simplexes de la forme $s_i(a)$, dits simplexes dégénérés. Pour $\gamma \in C^n(X , Y ; \pi)$, on définit $\delta^i(\gamma) = \gamma \circ \partial_i$, et

$$\delta\gamma = \sum_i (-1)^i \ \delta^i(\gamma) \in C^{n+1}(X , Y ; \pi) \quad .$$

Pour $\pi \in \Pi$, on définit $\eta\pi \in C^o(X ; \Pi)$ par $\eta\pi(a) = \pi$ pour tout $a \in S_o(X)$. On a $\delta \circ \delta = 0$, $\delta \circ \eta = 0$.

On appelle cohomologie le quotient :

$$H^* = \oplus H^n = \mathrm{Ker}\ \delta / \mathrm{Im}\ \delta$$

(on obtient le même résultat en partant de C^*_N et de C^*) .

On appelle cohomologie réduite :

$$\tilde{H}^* = \oplus \tilde{H}^n = \mathrm{Ker}\ \delta / \mathrm{Im}\ \delta + \mathrm{Im}\ \eta$$

On a $H^n(X , Y ; \pi) = \tilde{H}^n(X/Y ; \pi)$ si $n > 0$ ou si Y est non vide.

A toute application simpliciale de X dans X' qui envoie Y dans Y' , $f : (X , Y) \to (X' , Y')$, on fait correspondre

$$f^{\star} : C^n(X', Y' ; \pi) \to C^n(X, Y ; \pi) \quad \text{par} \quad f^{\star}(\gamma) = \gamma \circ f \ .$$

$f^{\star}$ commute avec δ, et fait de C^n, C^n_N, $C^{\star}$, $C^{\star}_N$, H^n, $H^{\star}$, $\tilde{H}^o$, $\tilde{H}^{\star}$, des foncteurs contravariants.

La suite exacte :

$$0 \to C^{\star}(X, Y ; \pi) \to C^{\star}(X ; \pi) \to C^{\star}(Y ; \pi) \to 0$$

donne naissance à la suite exacte fonctorielle bien connue

$$0 \to H^o(X, Y ; \pi) \to H^o(X ; \pi) \to H^o(Y ; \pi) \to H^1(X, Y ; \pi) \to \dots$$

Si π est un anneau, on définit pour tout couple de paires d'ensembles simpliciaux une application

$$C : H^p(X, Y ; \pi) \otimes H^q(X', Y' ; \pi) \to H^{p+q}((X, Y) \times (X', Y') ; \pi) \ ,$$

où $(X, Y) \times (X', Y')$ désigne la paire $(X \times X', X \times Y' \cup Y \times X')$, qui jouit des propriétés suivantes :

1° <u>Fonctorialité</u> : Soit $f : X \to X_1$, $g : X' \to X'_1$,

$$(f, g) : X \times X' \to X_1 \times X'_1 \ .$$

Soient $u \in H^{\star}(X_1)$, $v \in H^{\star}(X'_1)$. Alors

$$(f, g)^{\star} C(u \otimes v) = C(f^{\star}(u) \otimes g^{\star}(v))$$
$$= C(f^{\star} \otimes g^{\star})(u \otimes v) \ .$$

2° <u>Associativité</u> : Si X, Y, Z sont trois ensembles ou paires d'ensembles simpliciaux, $u \in H^{\star}(X)$, $v \in H^{\star}(Y)$, $w \in H^{\star}(Z)$, les éléments $C(u \otimes C(v \otimes w))$ et $C(C(u \otimes v) \otimes w)$ de $H^{\star}(X \times Y \times Z)$ sont égaux.

3° <u>Symétrie</u> : Soit σ l'application de $X \times Y$ dans $Y \times X$ définie par $\sigma(a, b) = (b, a)$.

Si $u \in H^p(X)$, $v \in H^q(Y)$, on a :

$$\sigma^{\star} C(v \otimes u) = (-1)^{pq} C(u \otimes v) \ .$$

4° <u>Compatibilité avec</u> δ : Si $X' \subset X$, $X' \times Y \subset X \times Y$,

$$u' \in H^p(X' ; \pi) \ , \quad v \in H^q(Y ; \pi) \ ,$$

on a :

$$\delta C(u' \otimes v) = C(\delta u' \otimes v) \ .$$

Si $Y' \subset Y$, $X \times Y' \subset X \times Y$,

$$u \in H^p(X ; \pi) , \quad v' \in H^q(Y ; \pi) ,$$

on a

$$\delta C(u \otimes v') = (-1)^p C(u \otimes \delta v') .$$

5° Si π est un corps, C est injective. Si de plus les espaces vectoriels $H^p(X ; \pi)$ et $H^q(X' ; \pi)$ sont de dimension finie sur π pour tous p , q , C est un isomorphisme

$$\bigoplus_{p+q=n} H^p(X ; \pi) \otimes H^q(Y ; \pi) \longrightarrow H^n(X \times Y ; \pi) .$$

Dans tous les cas, le cup-produit $H^p(X ; \pi) \otimes H^q(X ; \pi) \longrightarrow H^{p+q}(X , \pi)$ est le composé $\Delta^* \circ C$, où Δ est l'application diagonale $X \longrightarrow X \times X$ définie par $\Delta(a) = (a , a)$.

On a donc $u \cup v = \Delta^*(C(u \otimes v))$.

Il est fonctoriel, associatif, et vérifie :

$$v \cup u = (-1)^{pq} u \cup v , \text{ si } \deg u = p , \quad \deg v = q .$$

Enfin on a :

$$C(u \otimes u') \cup C(v \otimes v') = (-1)^{qp'} C(u \cup v \otimes u' \cup v')$$

si

$$u \in H^p(X) , \quad v \in H^q(X) , \quad u' \in H^{p'}(X') , \quad v' \in H^{q'}(X') .$$

2. Les complexes d'Eilenberg-MacLane.

A. L'ensemble simplicial $\mathcal{L}(\pi , n)$.

DÉFINITION. - On note $\mathcal{L}(\pi , n)$ l'ensemble simplicial défini par :
$S_q(\mathcal{L}(\pi , n)) = C^n(\underset{\sim}{\Delta}_q ; \pi)$,

$$\partial_i = \tilde{\delta}_i^* : C^n(\underset{\sim}{\Delta}_q ; \pi) \longrightarrow C^n(\underset{\sim}{\Delta}_{q-1} ; \pi)$$

$$s_i = \tilde{\sigma}_i^* : C^n(\underset{\sim}{\Delta}_q ; \pi) \longrightarrow C^n(\underset{\sim}{\Delta}_{q+1} ; \pi)$$

DÉFINITION. - On appelle cochaîne fondamentale la cochaîne $\xi \in C^n(\mathcal{L}(\pi , n) ; \pi)$ définie par

$$\xi(a) = a(x) ,$$

où a parcourt $S_n(\mathcal{L}(\pi, n)) = C^n(\underset{\sim}{\Delta}_n ; \pi)$, et x désigne le n-simplexe fondamental de $\underset{\sim}{\Delta}_n$.

PROPOSITION 0. – Si $b \in S_q(\mathcal{L}(\pi, n)) = C^n(\underset{\sim}{\Delta}_q ; \pi)$, alors $\tilde{b}^*(\xi) = b$.

DÉMONSTRATION. – $\tilde{b} : \underset{\sim}{\Delta}_q \longrightarrow \mathcal{L}(\pi, n)$. Si $a \in S_p(\underset{\sim}{\Delta}_q)$, $\tilde{a} : \underset{\sim}{\Delta}_p \longrightarrow \underset{\sim}{\Delta}_q$, on a $\tilde{b}(a) = \tilde{a}^*(b) \in C^n(\underset{\sim}{\Delta}_p , \pi)$: c'est la traduction du fait que $\tilde{b}$ est simpliciale, vu la définition des ∂_i et s_i dans $\mathcal{L}(\pi, n)$.

On a, pour tout $a \in S_n(\underset{\sim}{\Delta}_q)$,

$$(\tilde{b}^*(\xi))(a) = \xi(\tilde{b}(a)) = (\tilde{b}(a))(x) = (\tilde{a}^*(b))(x) = b(\tilde{a}(x) = b(a) \quad .$$

PROPOSITION 1. – Pour tout ensemble simplicial X , et toute cochaîne $\gamma \in C^n(X ; \pi)$, il existe une application simpliciale et une seule g de X dans $\mathcal{L}(\pi, n)$ telle que $g^*(\xi) = \gamma$.

DÉMONSTRATION.

a. <u>Unicité</u>. – On a, pour tout q-simplexe a de X :

$$\tilde{a} : \underset{\sim}{\Delta}_q \longrightarrow X$$

$$\tilde{a}^*(\gamma) = \tilde{a}^*(g^*(\xi)) = (g \circ \tilde{a})^*(\xi) = \widetilde{g(a)}^*(\xi) = g(a) \quad .$$

b. <u>Existence</u>. – Posons $g(a) = \tilde{a}^*(\gamma)$. Il reste à vérifier que g est simpliciale :

$$g(\partial_i a) = \widetilde{\partial_i a}^*(\gamma) = (\tilde{a} \circ \tilde{\delta}_i)^*(\gamma) = \tilde{\delta}_i^*(\tilde{a}^*(\gamma)) = \partial_i(g(a)) \ .$$

De même pour les s_i .

L'application g associée à une cochaîne γ sera notée $\bar{\gamma}$.

Soit $e \subset \mathcal{L}(\pi, n)$ le sous-ensemble simplicial formé des cochaînes nulles. γ sera nulle sur un sous-ensemble simplicial $Y \subset X$ si $\bar{\gamma}(Y) = e$.

B. <u>L'ensemble simplicial</u> $L(\pi, n)$.

DÉFINITION. – On note $L(\pi, n)$ le sous-ensemble simplicial de $\mathcal{L}(\pi, n)$ formé des cochaînes normalisées, c'est-à-dire nulles sur les simplexes de la forme $s_i a$.

PROPOSITION 2. - Une cochaîne $\gamma \in C^n(X\,;\,\pi)$ est normalisée si et seulement si $\bar{\gamma}(X) \subset L(\pi\,,\,n)$.

DÉMONSTRATION. - Si γ est normalisée, $\bar{\gamma}(a) = \tilde{a}^*(\gamma)$ est normalisée, donc est un simplexe de $L(\pi\,,\,n)$ pour tout simplexe a de X .

Si $\bar{\gamma} : X \longrightarrow L(\pi\,,\,n)$,

$$\gamma(sa) = \gamma(\tilde{a}(sx)) = \tilde{a}^*(\gamma)(sx) = \bar{\gamma}(a)(sx) = 0 \quad .$$

En particulier la restriction de ξ à $L(\pi\,,\,n)$, à laquelle est associée l'injection de $L(\pi\,,\,n)$ dans $\mathcal{L}(\pi\,,\,n)$,et qu'on notera encore ξ par abus de langage, est une cochaîne normalisée.

PROPOSITION 3. - Si $Y \subset X$, toute application simpliciale de Y dans $\mathcal{L}(\pi\,,\,n)$ (resp. $L(\pi\,,\,n)$) s'étend à X .

DÉMONSTRATION. - Il suffit de prolonger à X une cochaîne (resp. une cochaîne normalisée) de Y .

COROLLAIRE 1. - $\mathcal{L}(\pi\,,\,n)$ et $L(\pi\,,\,n)$ satisfont à la condition d'extension de Kan : on dit que X satisfait à la condition de Kan si toute application de Λ_q dans X s'étend à $\underset{\sim}{\Delta}_{q+1}$, en notant Λ_q le sous-ensemble simplicial de $\underset{\sim}{\Delta}_{q+1}$ engendré par les $\partial_i(x)$, $i > 0$, x élément fondamental de $\underset{\sim}{\Delta}_{q+1}$.

COROLLAIRE 2. - Deux applications simpliciales d'un ensemble simplicial X dans $\mathcal{L}(\pi\,,\,n)$ (resp. $L(\pi\,,\,n)$) sont toujours homotopes. En particulier ces ensembles sont contractiles.

C. <u>L'ensemble simplicial</u> $K(\pi\,,\,n)$.

DÉFINITION. - On note $K(\pi\,,\,n)$ le sous-ensemble simplicial de $L(\pi\,,\,n)$ formé des cocycles normalisés.

On a donc $S_q(K(\pi\,,\,n)) = Z^n_N(\underset{\sim}{\Delta}_q\,;\,\pi)$.

PROPOSITION 4. - Pour qu'une cochaîne normalisée γ sur X soit un cocycle, il faut et il suffit que $\bar{\gamma}(X)$ soit contenu dans $K(\pi\,,\,n)$.

DÉMONSTRATION. - Si γ est un cocycle, $\bar{\gamma}(a) = \tilde{a}^*(\gamma)$ est un cocycle, donc est un simplexe de $K(\pi\,,\,n)$. Si $\bar{\gamma}$ envoie X dans $K(\pi\,,\,n)$,

$$\delta\gamma(a) = (\delta\,\gamma)(\tilde{a}(x)) = (\tilde{a}^*(\delta\,\gamma))(x) = (\,\delta(a^*\,\gamma\,))(x) = (\,\delta(\,\bar{\gamma}(a)))(x) = 0 \;.$$

En particulier la restriction (encore notée ξ) de ξ à $K(\Pi, n)$ est un cocycle, appelé <u>cocycle fondamental</u>.

Sa classe de cohomologie est appelée <u>classe fondamentale</u>, et sera notée $\xi_n(\Pi)$ ou ξ_n, ou simplement ξ. On note $H^q(\Pi, n ; G)$ au lieu de $H^q(K(\Pi ; n) ; G)$. Par exemple, $\xi_n \in H^n(\Pi, n ; \Pi)$.

Le cobord $\delta : C_N^n(\underset{\sim}{\Delta}_q ; \Pi) \longrightarrow Z_N^{n+1}(\underset{\sim}{\Delta}_q ; \Pi)$ définit une application simpliciale P de $L(\Pi, n)$ sur $K(\Pi, n+1)$, l'image réciproque de e étant $K(\Pi, n)$.

Si $\beta \in C^n(X ; \Pi)$, on a $P \circ \bar{\beta} = \overline{\delta\beta}$: en effet

$$P(\bar{\beta}(a)) = \delta(\tilde{a}^*(\beta)) = \tilde{a}^*(\delta\beta) = \overline{\delta\beta}(a) \quad .$$

PROPOSITION 5. - L'application P est fibrée au sens de Kan, c'est-à-dire qu'un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_q & \xrightarrow{\bar{\beta}} & L(\Pi, n) \\ \downarrow & & \downarrow P \\ \underset{\sim}{\Delta}_{q+1} & \xrightarrow{\bar{\gamma}} & K(\Pi, n+1) \end{array}$$

se complète par $\bar{\beta}' : \underset{\sim}{\Delta}_{q+1} \longrightarrow L(\Pi, n)$.

DÉMONSTRATION. - Il faut montrer qu'un $(n+1)$-cocycle γ de $\underset{\sim}{\Delta}_{q+1}$ qui, sur Λ_q, est le bord d'une n-cochaîne β, est sur $\underset{\sim}{\Delta}_{q+1}$ le bord d'une n-cochaîne β' prolongeant β à $\underset{\sim}{\Delta}_{q+1}$.

Si $n < q$, les n-simplexes de $\underset{\sim}{\Delta}_{q+1}$ sont dans Λ_q.

β se prolonge donc uniquement à $\underset{\sim}{\Delta}_{q+1}$ en β'. Pour $n = q - 1$, on a bien $\delta\beta'(\partial_0 x) = \gamma(\partial_0 x)$, car $\delta\beta'$ et γ sont deux cocycles qui coïncident sur tous les autres q-simplexes. Si $n = q$, γ est caractérisé par $\gamma(x)$, β est n'importe quoi, il suffit de poser $\beta'(\partial_0 x) = \gamma(x) - \sum (-1)^i \beta(\partial_i(x))$ pour que $\gamma(x) = \delta\beta'(x)$, donc $\gamma = \delta\beta'$. Si $n > q$, γ et β sont nuls, il suffit de poser $\beta' = 0$.

D. THÉORÈME. - Soient γ_0 et γ_1 deux cocycles de $Z^n(X ; \Pi)$. Pour que les applications $\bar{\gamma}_0$ et $\bar{\gamma}_1$ de X dans $K(\Pi, n)$ soient homotopes, il faut et il suffit que γ_0 et γ_1 soient cohomologues, c'est-à-dire aient même image dans $H^n(X ; \Pi)$.

DÉMONSTRATION.

a. La condition est évidemment nécessaire, car $\gamma_0 = \bar{\gamma}_0^*(\xi)$, $\gamma_1 = \bar{\gamma}_1^*(\xi)$; or, si $\bar{\gamma}_0$ et $\bar{\gamma}_1$ sont homotopes, $\bar{\gamma}_0^* = \bar{\gamma}_1^*$.

b. La condition est suffisante ; d'après les propositions 1 et 4, cela revient à prouver ceci : si γ_0 et γ_1 sont deux cocycles cohomologues, on peut trouver un cocycle Γ sur $X \times \underset{\sim}{\Delta}_1$ tel que $i_0^*(\Gamma) = \gamma_0$, $i_1^*(\Gamma) = \gamma_1$, i_0 et i_1 étant les injections de X dans $X \times \underset{\sim}{\Delta}_1$ correspondant aux deux sommets de $\underset{\sim}{\Delta}_1$. Par hypothèse, on a $\gamma_1 = \gamma_0 + \delta\beta$. Si $\Gamma_0 = \pi^*(\gamma_0)$, où π est la projection de $X \times \underset{\sim}{\Delta}_1$ sur X, on a $i_1^* \Gamma_0 - i_0^* \Gamma_0 = 0$. Si B est une cochaîne sur $X \times \underset{\sim}{\Delta}_1$ telle que $i_0^* B = 0$, $i_1^* B = \beta$, ce qui est possible puisque les images de i_0 et i_1 sont disjointes, $\Gamma = \Gamma_0 + \delta B$ est un cocycle répondant à la question.

<u>On a donc, pour tout espace</u> X, <u>une correspondance biunivoque entre</u> $H^n(X ; \Pi)$ <u>et l'ensemble des classes d'applications de</u> X <u>dans</u> $K(\Pi , n)$.

Soient X un ensemble simplicial vérifiant la condition de Kan, e un "sommet" de X, c'est-à-dire un sous-ensemble simplicial engendré par un 0-simplexe de X. On note $\pi_n(X , e)$ l'ensemble des applications de $(\underset{\sim}{\Delta}_n , S_{n-1})$ dans (X , e), S_{n-1} désignant le sous-ensemble simplicial de $\underset{\sim}{\Delta}_n$ engendré par les $(n-1)$-simplexes. Pour $n \geq 1$, cet ensemble est muni d'une structure de groupe qui, lorsque X est un groupe simplicial et e l'élément neutre, est induite par la multiplication des applications dans X.

D'ailleurs $\pi_n(X , e)$ n'est pas autre chose que le n-ième groupe d'homotopie de la réalisation géométrique de (X , e). On peut aussi lui appliquer le théorème d'Hurewicz. Le théorème a deux corollaires :

COROLLAIRE 1. - $\pi_q(K(\Pi , n) , e) = \left| \begin{matrix} 0 & \text{si} & q \neq n \\ \Pi & \text{si} & q = n \end{matrix} \right.$. En effet l'ensemble des classes d'application de $(\underset{\sim}{\Delta}_q , S_{q-1})$ dans $(K(\Pi , n) , e)$ est $H^n(\underset{\sim}{\Delta}_q , S_{q-1} ; \Pi) = 0$ si $q \neq n$, Π si $q = n$.

COROLLAIRE 2. - $\tilde{H}^q(\Pi , n ; G) = \left| \begin{matrix} 0 \ \text{si} \ q < n \\ \mathrm{Hom}(\Pi , G) \ \text{si} \ q = n \end{matrix} \right.$.

3. <u>Détermination de</u> $H^*(Z_p , 1 ; Z_p)$, p <u>désignant un nombre premier.</u>

A. On a $H^0(Z_p , 1 ; Z_p) = Z_p$, car $K(Z_p , 1)$ est connexe, et $H^1(Z_p , 1 ; Z_p) = \mathrm{Hom}(Z_p , Z_p) = Z_p$, avec pour générateur l'élément fondamental ξ_1.

Soit $\chi : K(Z\ ,\ 1) \longrightarrow K(Z_p\ ,\ 1)$ l'application simpliciale définie par $\chi_n :\ Z^1(\underset{\sim}{\Delta}_n\ ;\ Z) \longrightarrow Z^1(\underset{\sim}{\Delta}_n\ ;\ Z_p)$ associée à l'application canonique $Z \longrightarrow Z_p$.

Cette application est fibrée au sens de Kan, comme on peut le voir par un raisonnement analogue à celui de 2(C), proposition 5, et l'image réciproque de e est l'image isomorphe de $K(Z\ ,\ 1)$ par la multiplication par p :

$$Z^1(\underset{\sim}{\Delta}_n\ ;\ Z) \longrightarrow Z^1(\underset{\sim}{\Delta}_n\ ;\ Z)$$

Il en est d'ailleurs toujours ainsi quand on considère l'application canonique d'un groupe simplicial G dans l'ensemble simplicial B quotient de G par un sous-groupe G' de G. Le fibré qu'on obtient est alors analogue à un fibré principal : en particulier le système local d'homologie ou de cohomologie de la fibre est constant si G' est connexe.

Or $G' = K(Z\ ,\ 1)$ est homotopiquement équivalent au cercle S_1, et la suite exacte de Gysin (exposé 3, proposition 5 (C)) donne :

$$0 \longrightarrow H^1(Z_p\ ,\ 1\ ;\ Z_p) \xrightarrow{\chi^*} H^1(Z\ ,\ 1\ ;\ Z_p) \longrightarrow H^0(Z_p\ ,\ 1\ ;\ Z_p) \xrightarrow{\Theta'} H^2(Z_p\ ,\ 1\ ;\ Z_p) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow H^n(Z_p\ ,\ 1\ ;\ Z_p) \xrightarrow{\Theta'} H^{n+2}(Z_p\ ,\ 1\ ;\ Z_p) \longrightarrow 0$$

où Θ' est la multiplication par un élément fixe $g \in H^2(Z_p\ ,\ 1\ ;\ Z_p)$. Comme $\chi^* : \mathrm{Hom}(Z_p\ ,\ Z_p) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Z\ ,\ Z_p)$ est un isomorphisme, on voit que Θ' est un isomorphisme en toute dimension.

On en déduit par récurrence que

$$H^n(Z_p\ ,\ 1\ ;\ Z_p) = Z_p \qquad \text{pour tout } n\ ,$$

le générateur étant

$$g^i \quad ,\ \text{si}\ n = 2\,i$$

$$g^i\,\xi \quad ,\ \text{si}\ n = 2\,i + 1$$

B. - <u>Cas</u> p <u>premier impair</u>.

On a nécessairement $\xi_1^2 = 0$. L'algèbre de cohomologie est le produit tensoriel de l'algèbre extérieure engendrée par ξ_1, de degré 1, et de l'algèbre de polynômes engendrée par g, de degré 2 :

$$H^*(Z_p\ ,\ 1\ ;\ Z_p) = \Lambda(\xi) \otimes Z_p[g]\ .$$

C. - <u>Cas</u> $p = 2$.

On a alors $\xi_1^2 = g$. Il suffit de montrer que ξ_1^2 n'est pas nul. Or, s'il l'était, cela entraînerait, en anticipant sur l'exposé 9, théorème 1, que le carré de tout élément de $H^1(X , Z_2)$ est nul quel que soit X . Or il n'en est pas ainsi quand X est l'espace projectif réel à 2 dimensions (calcul direct ou dualité de Poincaré). On en déduit que l'algèbre de cohomologie est l'algèbre de polynômes engendrée par ξ :

$$H^*(Z_2 , 1 ; Z_2) = Z_2 [\xi] .$$