Henri Cartan

Relations entre opérations cohomologiques secondaires

Séminaire Henri Cartan, tome 11, nº 2 (1958-1959), exp. nº 17, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1958-1959__11_2_A8_0>

RELATIONS ENTRE OPÉRATIONS COHOMOLOGIQUES SECONDAIRES

par Henri CARTAN

On se propose d'utiliser la connaissance de la cohomologie de l'algèbre de Steenrod (cf. exposé 16) pour obtenir des relations entre opérations cohomologiques secondaires, du type indiqué dans l'exposé 14, paragraphe 5.

NOTATIONS. - A désignera l'algèbre de Steenrod S^* dans le cas où $p = 2$; K désignera le corps Z_2 .

1. Début de la construction d'une résolution minimale de K .

On a vu (exposé 15, paragraphe 7) que K , comme A-module à gauche, possède une résolution projective minimale, qui est unique à un isomorphisme près. On se propose de construire le début d'une telle résolution :

$$X_3 \xrightarrow{d_3} X_2 \xrightarrow{d_2} X_1 \xrightarrow{d_1} X_0 \xrightarrow{\varepsilon} K \longrightarrow 0 \quad .$$

On notera N_0 le noyau de $X_0 \to K$, et, pour $i \geqslant 1$, N_i le noyau de $X_i \to X_{i-1}$.

Conformément à la méthode donnée dans l'exposé 15 (paragraphe 7), on prend d'abord $X_0 = A$, l'application $X_0 \to K$ étant l'augmentation $\varepsilon : A \to K$. Ainsi $N_0 = I(A)$, et on a

$$H_1(A) = \mathrm{Tor}_1^A(K , K) = K \otimes_A N_0 = I(A)/(I(A))^2$$

(cf. corollaire de la proposition 10 de l'exposé 15). On choisit ensuite un relèvement $H_1(A) \to I(A)$ qui conserve les degrés propres ; en fait, $H_1(A)$ ayant pour base les classes des Sq^{2^s} $(s = 0 , 1 , \ldots)$, on envoie la classe de Sq^{2^s} dans l'élément $Sq^{2^s} \in I(A)$, ce qui définit le relèvement cherché. Ainsi $H_1(A)$ se trouve plongé dans $I(A)$, et $X_1 = A \otimes H_1(A)$ se plonge dans $A \otimes I(A)$; l'application A-linéaire $d_1 : A \otimes H_1(A) \to A$ est donc induite par l'application $A \otimes I(A) \to A$ définie par la multiplication de l'algèbre A . Elle envoie $\sum_s b_s \otimes Sq^{2^s}$ dans $\sum_s b_s\, Sq^{2^s}$ (avec $b_s \in A$) .

Le noyau N_1 de d_1 se compose des $\sum_s b_s \otimes Sq^{2^s}$ tels que $\sum_s b_s\, Sq^{2^s} = 0$.

Les b_s appartiennent alors à $I(A)$. On choisit un relèvement de

$$H_2(A) = \mathrm{Tor}_2^A(K\ ,\ K) = K \otimes_A N_1$$

dans N_1, qui conserve les degrés propres. En fait, on connaît explicitement une K-base homogène de $H_2(A)$: c'est la base $(u_{i,j})$, duale de la base de $H^2(A)$ formée des produits $h_i\, h_j$ tels que

$$(1) \qquad 0 \leq i \leq j\ ,\quad i+1 \neq j\ .$$

(exposé 16, théorème 2). L'élément $u_{i,j}$ est de degré propre $2^i + 2^j$; il est d'ailleurs le seul à posséder ce degré. On aura donc un relèvement $H_2(A) \longrightarrow N_1$ en choisissant, pour chaque couple $(i\ ,\ j)$ tel que $0 \leq i \leq j$, $i+1 \neq j$, un élément de N_1 ayant le degré propre $2^i + 2^j$. Un tel élément est défini par la donnée d'éléments $b_s^{(i,j)} \in I(A)$ $(s = 0\ ,\ 1\ ,\ \ldots)$, de degré $2^i + 2^j - 2^s$, tels que

$$(2) \qquad \sum_s b_s^{(i,j)}\ Sq^{2^s} = 0 \quad \text{pour tout couple } (i\ ,\ j)\ .$$

Alors $X_2 = A \otimes H_2(A)$ s'envoie A-linéairement dans N_1, donc dans X_1 ; on obtient ainsi l'application d_2, qui transforme

$$\sum_{(i,j)} c_{i,j}\ u_{i,j} \quad \text{dans} \quad \sum_{s,(i,j)} c_{i,j}\ b_s^{(i,j)} \otimes Sq^{2^s}\ .$$

Le noyau N_2 de d_2 est contenu dans $I(A) \otimes H_2(A)$ (puisque $H_2(A)$ se plonge dans N_1). Un élément de N_2 est défini par un système d'éléments $c_{i,j} \in I(A)$ tels que

$$\sum_{(i,j)} c_{i,j}\ b_s^{(i,j)} = 0 \quad \text{pour tout } s\ .$$

On a $H_3(A) = K \otimes_A N_2$. Choisissons un relèvement $\rho : H_3(A) \longrightarrow N_2$. On n'ira pas plus loin dans la construction de la résolution minimale.

Donnons-nous maintenant un entier $k \geq 3$. D'après le théorème 2 de l'exposé 16, l'élément $h_o(h_k)^2 \in H^3(A)$ <u>n'est pas nul</u> (ceci serait faux pour $k = 1$ et pour $k = 2$). Il existe donc un élément $v \in H_3(A)$ qui n'est pas orthogonal à $h_o(h_k)^2$, dans la dualité entre $H_3(A)$ et $H^3(A)$. Alors $\rho(v) \in N_2$ définit un système d'éléments $c_{i,j} \in I(A)$, que nous noterons $c^k_{i,j}$ (pour rappeler qu'ils dépendent du choix de l'entier $k \geq 3$), et qui satisfont à

$$(3) \qquad \sum_{(i,j)} c^k_{i,j}\ b_s^{(i,j)} = 0 \quad \text{pour tout } s\ .$$

Puisque $h_o(h_k)^2$ est de degré propre $1 + 2^{k+1}$, l'élément $c^k_{i,j}$ est de degré

$1 + 2^{k+1} - 2^i - 2^j$; en particulier, il est nul pour $k < j$, puisque son degré doit être ≥ 1 . Autrement dit, la realtion (3) ne fait intervenir que les couples (i , j) tels que

(4) $$0 \leq i \leq j \leq k \quad , \quad i + 1 \neq j \quad .$$

Il reste à exprimer que v n'est pas orthogonal à $h_o(h_k)^2$. Dans le calcul de $H^3(A)$ à l'aide de l'algèbre tensorielle $T^*(I(A'_*))$, $h_o(h_k)^2$ est la classe de cohomologie du cocycle

$$(\xi_1)^{2^k} \otimes \xi_1 \otimes (\xi_1)^{2^k} \quad .$$

L'élément v est la classe d'homologie du cycle

$$\sum_{s,(i,j)} c^k_{i,j} \otimes b_s^{(i,j)} \otimes Sq^{2^s} \in T_3(I(A)) \quad ,$$

dans le complexe standard (dans lequel se plonge la résolution minimale X , en vertu des constructions précédentes). La dualité entre $H^3(A)$ et $H_3(A)$ étant induite par celle des algèbres tensorielles $T^*(I(A'_*))$ et $T'_*(I(A))$, le produit scalaire $\langle v , h_o(h_k)^2 \rangle$ est égal à

$$\sum_{s,(i,j)} \langle c^k_{i,j} , (\xi_1)^{2^k} \rangle . \langle b_s^{(i,j)} , \xi_1 \rangle . \langle Sq^{2^s} , (\xi_1)^{2^k} \rangle \quad .$$

Or $\sum_s \langle b_s^{(i,j)} , \xi_1 \rangle . \langle Sq^{2^s} , (\xi_1)^{2^k} \rangle = \langle u_{i,j} , h_o h_k \rangle$

est nul sauf pour $i = 0$, $j = k$, auquel cas c'est égal à 1 . On obtient donc la relation

(5) $\langle c^k_{o,k} , (\xi_1)^{2^k} \rangle = 1$ (puisque c'est $\neq 0$).

D'après l'exposé 10 (corollaire du lemme 3), la relation (5) exprime que l'on a

(5') $c^k_{o,k} = Sq^{2^k}$ modulo les éléments décomposables de $I(A)$.

2. <u>Une relation entre certaines opérations secondaires.</u>

Nous sommes dans la situation étudiée au paragraphe 5 de l'exposé 14 ; en reprenant à peu de chose près les notations de ce paragraphe, on a donc une relation (notée (9) dans l'exposé 14) :

(I_k) $$c_k(\Phi_k(x)) = \lambda_k \, Sq^{2^{k+1}}(x)$$

pour tout $x \in H^m(X)$ satisfaisant à

(6) $$Sq^{2^s}(x) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq s \leq k$$

(X désigne un espace quelconque, c^k désigne le système des $c^k_{i,j}$, et Φ_k désigne une opération secondaire, définie sur les x satisfaisant à (6), et à valeurs dans le conoyau de

$$b_k : \sum_s H^{m-1+2^s}(X) \longrightarrow \sum_{(i,j)} H^{m-1+2^i+2^j}(X) \quad ,$$

en notant b_k la matrice des $b_s^{(i,j)}$, telle que $c^k \circ b_k = 0$). Dans (I_k) , $\lambda_k \in Z_2$ est égal à 0 ou 1 , et il s'agit maintenant de prouver le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - <u>Si les $c^k_{i,j}$ ont été choisis de manière à satisfaire à (5'), la constante λ_k de la relation (I_k) est égale à</u> 1 .

On sait (cf. exposé 14, fin du paragraphe 5) que ce résultat entraînera le théorème par lequel ADAMS résout le problème de l'invariant de Hopf.

On va maintenant indiquer comment le théorème 1 peut être démontré. Connaissant l'existence de la relation (I_k) , qui vaut pour tout espace X et tout degré m , on va appliquer cette relation à un espace particulier, tel que le premier membre de (I_k) puisse être effectivement calculé ; ceci permettra de déterminer la valeur de λ_k .

Rappelons (exposé 14, paragraphe 5) que la relation (I_k) donne

(I'_k) $\quad \sum_{(i,j)} c^k_{i,j} \Phi_{i,j}(x) = \lambda_k Sq^{2^{k+1}}(x)$ modulo la somme des images des applications composées

(7) $$H^{m-1+2^s}(X) \xrightarrow{b_s^{(i,j)}} H^{m-1+2^i+2^j}(X) \xrightarrow{c^k_{i,j}} H^{m+2^{k+1}}(X) \quad .$$

Prenons désormais pour X l'espace projectif complexe (infini) $K(Z , 2)$. L'algèbre de cohomologie de $K(Z , 2)$ à <u>coefficients entiers</u> est, comme on sait, une algèbre de polynômes à un générateur y de degré 2 (y est la "classe fondamentale" de $H^2(Z , 2 ; Z)$). Par produit tensoriel avec Z_2 , on obtient l'algèbre de cohomologie

$$H^*(X) = H^*(Z , 2 ; Z_2) \quad ,$$

qui est encore l'algèbre de polynômes engendrée par l'image de y , que nous noterons aussi y par abus de langage. Puisque l'application

$$H^*(Z , 2 ; Z) \longrightarrow H^*(Z , 2 ; Z_2)$$

est surjective, l'opération Sq^1 est nulle sur $H^*(X)$.

Prenons pour x l'élément

$$x = y^{2^k} ,$$

de degré m égal à 2^{k+1}. C'est à cet élément qu'on va appliquer la relation (I'_k) ; elle est applicable parce que $Sq^{2^s}(x) = 0$ pour $s \leq k$, comme on va le vérifier.

En effet, il est facile d'expliciter les Sq^i sur $H^*(X)$; on a

$$(8) \qquad Sq^{2i+1}(y^t) = 0 , \quad Sq^{2i}(y^t) = (t - i , i) \, y^{t+i} .$$

(La démonstration est immédiate par récurrence sur t ; c'est trivial pour $t = 1$, et la récurrence utilise la relation entre les coefficients binomiaux

$$(t - i , i) + (t - i + 1 , i - 1) = (t - i + 1 , i)).$$

La relation (8) est encore vraie si $t < i$, à condition de convenir, comme d'habitude, que le coefficient binomial (i , j) est nul lorsque i ou j est < 0.

De là on tire facilement le

LEMME 1. - *Pour tout entier* $t \geqslant 1$, *on a*

$$(9) \quad Sq^i(y^{2^j t}) = 0 \ \text{pour} \ i < 2^{j+1} , \quad Sq^{2^{j+1}}(y^{2^j t}) = t y^{2^j (t+1)} .$$

Toute opération de Steenrod de degré $< 2^{j+1}$ *s'annule sur* $y^{2^j t}$.

DÉMONSTRATION. - On prouve d'abord les relations (9) pour $t = 1$; il suffit de considérer le cas où $i = 2i'$; il est bien connu que $(2^j - i' , i') = 0$ pour $i' < 2^j$, donc (8) entraîne la première des relations (9) ; et comme y^{2^j} est de degré 2^{j+1}, $Sq^{2^{j+1}}$ opère sur y^{2^j} comme le carré, ce qui prouve la deuxième relation (9). Ensuite, les relations (9) se prouvent par récurrence sur t, en appliquant la "formule du produit" à $y^{2^j(t+1)} = y^{2^j t} . y^{2^j}$. Enfin, toute opération de Steenrod de degré $< 2^{j+1}$ est une combinaison linéaire (à coefficients dans l'algèbre de Steenrod) d'opérations Sq^{2^s} avec $s \leq j$; donc une telle opération s'annule sur $y^{2^j t}$, d'après (9).

PROPOSITION 1. - *Toutes les opérations* $\Phi_{i,j}$ (pour $i \leq j$, $i + 1 \neq j$) *sont définies sur l'élément* $y^{2^j t}$, *et ont une indétermination nulle. Leur valeur est nulle,*

<u>sauf peut-être si</u> $i = 0$ <u>et</u> $j \geqslant 2$.

DÉMONSTRATION. - D'après le lemme 1, on a $Sq^{2^s}(y^{2^j t}) = 0$ pour $0 \leq s \leq j$, donc $\Phi_{i,j}(y^{2^j t})$ est définie. Elle prend ses valeurs dans le quotient de $H^{2^{j+1}t+2^i+2^j-1}(X)$ par la somme des images des

$$b_s^{(i,j)} : H^{2^{j+1}t+2^s-1}(X) \longrightarrow H^{2^{j+1}t+2^i+2^j-1}(X) \quad .$$

Or $2^{j+1}t + 2^i + 2^j - 1$ est impair (et par suite l'espace des valeurs est nul) sauf si $i = 0$, $j \neq 0$, ce qui exige $j \geqslant 2$. Dans ce dernier cas, $b_s^{(i,j)}$ a un espace-source qui est nul, sauf si le degré $2^{j+1}t + 2^s - 1$ est pair, ce qui exige $s = 0$. Ainsi l'indétermination de $\Phi_{i,j}(y^{2^j t})$ est nulle, sauf peut-être si $i = 0$, $j \geqslant 2$ et $s = 0$. Dans ce dernier cas, $b_0^{(o,j)}$, qui est de degré 2^j , envoie $y^{2^j t}$ dans 0 (d'après le lemme 1), donc définit une application nulle, et l'indétermination est encore nulle.

LEMME 2. - <u>Si</u> $c_{o,k}^k$ <u>satisfait à</u> (5'), <u>on a, pour tout entier</u> $t \geqslant 1$,

$$c_{o,k}^k(y^{2^{k-1}t}) = ty^{2^{k-1}(t+1)} \quad .$$

DÉMONSTRATION. - D'après le lemme 1, toute opération de Steenrod de degré $< 2^k$ s'annule sur $y^{2^{k-1}t}$, et Sq^{2^k} le transforme en $ty^{2^{k-1}(t+1)}$. D'où le lemme 2.

Considérons l'énoncé suivant (qui, on le verra, est vrai pour $k \geqslant 2$):

PROPOSITION 2_k. - <u>On a</u> $\Phi_{o,k}(y^{2^k t}) = 0$ <u>pour</u> t <u>pair</u>.

Si on admet la proposition 2_2, on peut démontrer 2_k pour $k \geqslant 3$, par récurrence sur k . En effet, si 2_j est vrai pour $j < k$ $(k \geqslant 3)$, on applique la relation (I_k') à l'élément $x = y^{2^k t}$. Le second membre de (I_k') est alors nul, d'après le lemme 1. D'après l'hypothèse de récurrence, le premier membre se réduit à

$$c_{o,k}^k \ \Phi_{o,k}(y^{2^k t}) \quad .$$

Si $\Phi_{o,k}(y^{2^k t})$ était $\neq 0$, donc égal à $y^{2^{k-1}(2t+1)}$, $c_{o,k}^k \ \Phi_{o,k}(y^{2^k t})$ serait $\neq 0$ d'après le lemme 2, d'où une contradiction.

C.Q.F.D.

Admettons désormais la proposition 2_2 ; donc 2_j pour tout $j \geq 2$. Alors <u>le théorème 1 (pour un entier $k \geq 3$) est équivalent à la relation</u>

$$(\mathrm{II}_k) \qquad \Phi_{o,k}(y^{2^k}) = y^{3.2^{k-1}} \quad ;$$

<u>et il entraîne, pour tout entier $t \geq 1$, la relation</u>

$$(\mathrm{II}_{k,t}) \qquad \Phi_{o,k}(y^{2^k t}) = t y^{2^k t + 2^{k-1}} \quad .$$

En effet, si on remplace, dans l'identité (I'_k) , x par y^{2^k} , le second membre devient $\lambda_k\, y^{2^{k+1}}$; le premier membre se réduit à $c^k_{o,k}\, \Phi_{o,k}(y^{2^k})$, en vertu de la proposition 2_j pour $2 \leq j < k$. Le lemme 2 montre qu'il y a équivalence entre la relation (II_k) et la relation $\lambda_k = 1$. De plus, si $\lambda_k = 1$, et si on applique la relation (I'_k) à l'élément $x = y^{2^k t}$, le second membre est égal à $t y^{2^k(t+1)}$ d'après le lemme 1 ; le premier membre est égal à $c^k_{o,k}\, \Phi_{o,k}(y^{2^k t})$, et puisque $c^k_{o,k}(y^{2^k t + 2^{k-1}}) = y^{2^k(t+1)}$ d'après le lemme 2, il s'ensuit bien la relation $(\mathrm{II}_{k,t})$.

Ainsi, pour établir le théorème 1 pour tout $k \geq 3$, il suffit de démontrer :

1° la proposition 2_2 ;

2° la relation (II_k) pour tout entier $k \geq 3$.

Une démonstration complète nous entraînerait trop loin. On va se borner ici à indiquer les grandes lignes, renvoyant à [1] pour les détails.

3. <u>Indications sur la démonstration de la proposition 2_2.</u>

On va, en fait, prouver la relation

$$(10) \qquad \Phi_{o,2}(y^{4t}) = t y^{4t+2} \quad \text{pour } t \text{ entier } \geq 1 \; .$$

Pour cela, on commence par le cas où $t = 1$. Ensuite, une sorte de "formule du produit" permet de faire la récurrence sur t (voir [1], page 106). Bornons-nous ici à indiquer le principe de la démonstration de (10) pour $t = 1$. Dans ce but, on considère la relation

$$Sq^4\, Sq^1 + Sq^2\, Sq^3 + Sq^1\, Sq^4 = 0 \qquad ,$$

qui définit une opération secondaire stable $\Phi(Sq^4 , Sq^2 , Sq^1 ; Sq^1 , Sq^3 , Sq^4)$, qu'on notera Ψ. Ainsi $\Psi(u)$ est défini pour les $u \in H^m(X)$ tels que $Sq^1 u = 0$, $Sq^3 u = 0$, $Sq^4 u = 0$; et $\Psi(u)$ est un élément du quotient de $H^{m+4}(X)$ par la somme $Sq^1 H^{m+3} + Sq^2 H^{m+2} + Sq^4 H^m$. L'opération Ψ est unique, car toute opération primaire $H^m(X) \longrightarrow H^{m+4}(X)$ est nulle sur u, puisque $Sq^4 u = 0$ et $Sq^1 u = 0$. (Cette opération Ψ a déjà été donnée en exemple au paragraphe 7 de l'exposé 13).

Cela dit, on prouve facilement que si $v = Sq^4 Sq^2 u$, on a $Sq^1 v = 0$, $Sq^2 v = 0$ et $Sq^4 v = 0$, de sorte que $\Phi_{o,2}(v)$ est définie. ADAMS prouve l'existence d'une relation

$$\Phi_{o,2}\, Sq^4\, Sq^2\, u = Sq^6\, \Psi(u) + \nu\, Sq^{10}\, u \qquad (\nu \in Z_2) \qquad (11)$$

valable modulo les indéterminations impliquées. La démonstration est simple : on applique la proposition 2 de l'exposé 14, en prenant pour c, b, a les matrices suivantes :

$$c = (Sq^1 \quad Sq^2\, Sq^1 \quad Sq^4)$$

$$b = \begin{pmatrix} Sq^6\, Sq^3 & Sq^7 + Sq^6\, Sq^1 & 0 \\ Sq^7 & 0 & Sq^4 \\ 0 & Sq^4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a = \begin{pmatrix} Sq^1 \\ Sq^3 \\ Sq^4 \end{pmatrix}$$

On a $cb = (Sq^6\, Sq^4 \quad Sq^6\, Sq^2 \quad Sq^6\, Sq^1) = Sq^6\, d$,
avec $d = (Sq^4 \quad Sq^2 \quad Sq^1)$. De même

$$ba = \begin{pmatrix} Sq^4\, Sq^4\, Sq^2 \\ Sq^2\, Sq^4\, Sq^2 \\ Sq^1\, Sq^4\, Sq^2 \end{pmatrix} = d'\, Sq^4\, Sq^2 \text{ , avec } d' = \begin{pmatrix} Sq^4 \\ Sq^2 \\ Sq^1 \end{pmatrix}$$

Ona bien $cba = 0$. Alors la proposition 2 de l'exposé 14 (compte tenu des propositions 1 et 1 bis du même exposé) dit qu'il existe une opération primaire

$H^m(X) \longrightarrow H^{m+10}(X)$ qui, appliquée à un $u \in H^m(X)$ tel que $Sq^1 u = 0$, $Sq^3 u = 0$ et $Sq^4 u = 0$, et après réduction de sa valeur à $H^{m+10}/(Sq^1 H^{m+9} + Sq^2 Sq^1 H^{m+7} + Sq^4 H^{m+6})$, est égale à la différence entre les deux applications induites respectivement par $\Phi_{o,2} Sq^4 Sq^2$ et $Sq^6 \Psi$. D'autre part, on voit facilement que la seule opération primaire non nulle sur u est Sq^{10} . D'où la relation (11).

Appliquons cette relation à la classe fondamentale y de l'espace projectif complexe ; c'est licite, puisque $Sq^1 y = 0$, $Sq^3 y = 0$ et $Sq^4 y = 0$ (cette dernière relation ayant lieu pour une simple raison de degré). On a $Sq^{10} y = 0$ pour une raison de degré ; l'indétermination des deux membres de (11) est nulle, puisque H^{11} et H^9 sont nuls, et que Sq^4 s'annule sur H^8 , engendré par y^4 (lemme 1). Si donc l'on sait que $\Psi(y) = y^3$, on conclut de (11) que $\Phi_{o,2}(y^4) = y^6$, ce qu'il fallait démontrer.

Pour la démonstration de la relation $\Psi(y) = y^3$ (qui vaut sans aucune indétermination, parce que $Sq^2 y^2 = 0$ et $Sq^4 y = 0$), nous renvoyons à [1] ; la démonstration est délicate, et nécessite des connaissances sur le groupe d'homotopie $\pi_{n+3}(S_n)$.

4. Indications sur la démonstration de la relation (II_k) .

On vient de la démontrer dans le cas $k = 2$. On la prouve alors par récurrence sur k , pour $k \geqslant 3$. On établit d'abord (en utilisant toujours la proposition 2 de l'exposé 14) : soit $k \geqslant 2$; si $u \in H^m(X)$ satisfait à

$$Sq^{2^s}(u) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq s < k ,$$

ce qui implique que les opérations $\Phi_{i,j}$ sont définies pour u lorsque $j \leq k$, et que les opérations $\Phi_{i,j}$ sont définies pour $Sq^{2^{k+1}} u$ lorsque $j \leq k + 1$, on a une relation de la forme

$$(12) \quad \Phi_{o,k+1} Sq^{2^{k+1}} u = \sum_{\substack{0 \leq i \leq j \leq k \\ i+1 \neq j}} a^k_{i,j} \; \Phi_{i,j}(u) + \sum_{\substack{0 \leq i \leq k \\ i+1 \neq k}} a_{i,k} \; \Phi_{i,k} \; Sq^{2^{k+1}} u + \mu_k Sq^{2^{k+2}} u \quad ,$$

avec $\mu_k \in Z_2$, les $a^k_{i,j}$ et les $a_{i,k}$ étant des éléments de l'algèbre de Steenrod tels que

$$(13) \qquad \langle a^k_{o,k} , (\xi_1)^{3.2^k} + (\xi_2)^{2^k} \rangle = 1 \quad .$$

La relation (12) vaut, bien entendu, modulo les indéterminations impliquées.

Appliquons cette relation en prenant $u = y^{2^k}$, d'où $Sq^{2^{k+1}} u = y^{2^{k+1}}$. L'indétermination est nulle ; $Sq^{2^{k+2}} u$ est nul ; $\Phi_{i,j}(u)$ est nul sauf pour $i = 0$ et $j = k$ (en vertu des propositions 1 et 2_j) ; $\Phi_{i,k} Sq^{2^{k+1}} u = \Phi_{i,k}(y^{2^{k+1}})$ est nul pour les mêmes raisons. Ainsi la relation (12) donne

$$\Phi_{o,k+1}(y^{2^{k+1}}) = a^k_{o,k}\ \Phi_{o,k}(y^{2^k}) \qquad (k \geq 2) \quad .$$

D'après l'hypothèse de récurrence, le second membre est égal à

$$a^k_{o,k}(y^{3.2^{k-1}}) \quad .$$

Si on montre que la relation (13) entraîne

$$a^k_{o,k}(y^{3.2^{k-1}}) = y^{3.2^k} \quad , \tag{14}$$

on aura prouvé la relation (II_{k+1}) , et la démonstration par récurrence ~~sera achevée.~~

Or, avec les notations de l'exposé 11, paragraphe 2, on a

$$\lambda^*(y) = \sum_{i \geq 0} y^{2^i} \otimes (\xi_i)^2 \quad ,$$

d'où, puisque l'application λ^* est multiplicative (exposé 11, proposition 1) :

$$\lambda^*(y^{3.2^{k-1}}) = \sum_{i \geq 0, j \geq 0} y^{2^{k+i-1}+2^{k+j}} \otimes (\xi_i)^{2^k} (\xi_j)^{2^{k+1}} \quad . \tag{15}$$

Pour un élément $a^k_{o,k}$ de l'algèbre de Steenrod, de degré 3.2^k , l'élément $a^k_{o,k}(y^{3.2^{k-1}})$ est égal (d'après la proposition 2 de l'exposé 11) au produit scalaire de $a^k_{o,k}$ avec le coefficient de $y^{3.2^k}$ dans le second membre de (15) ; ce coefficient est visiblement

$$(\xi_1)^{2^k}(\xi_1)^{2^{k+1}} = (\xi_2)^{2^k}(\xi_0)^{2^{k+1}} = (\xi_1)^{3.2^k} + (\xi_2)^{2^k}$$

de sorte que (13) implique (14), et la démonstration est achevée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ADAMS (J. F.). - Non-existence of elements of Hopf-invariant one. - Princeton, 1958, multigraphié.