Adrien Douady

Variétés et espaces mixtes

Séminaire Henri Cartan, tome 13, nº 1 (1960-1961), exp. nº 2, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1960-1961__13_1_A1_0>

VARIÉTÉS ET ESPACES MIXTES

par Adrien DOUADY

I. Catégorie de modèles.

Soit B un espace topologique. On définit la catégorie $\mathcal{S}_B^n$ de la façon suivante : les objets de $\mathcal{S}_B^n$ sont les ouverts de $B \times \underset{\sim}{C}^n$, un morphisme $f : U \to U'$ d'un ouvert $U \subset B \times \underset{\sim}{C}^n$ dans un ouvert $U' \subset B \times \underset{\sim}{C}^n$ est une application continue $f : U \to U'$ satisfaisant aux deux conditions suivantes :

1° Le diagramme

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & U' \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

est commutatif, π_1 désignant la projection de $B \times C^n$ sur B.

Pour tout $x \in B$, l'application $f_x : U_x \to U'_x$ est holomorphe, où

$$U_x = \{z \in \underset{\sim}{C}^n (x , z) \in U\} , \quad (\text{resp. } U') \quad .$$

Lorsque B est muni d'une structure de variété C^∞ (resp. variété $\underset{\sim}{R}$-analytique, resp. espace $\underset{\sim}{C}$-analytique) on obtient une catégorie $C^\infty \mathcal{S}_B$ (resp. $\underset{\sim}{R}\, \mathcal{S}_B$, resp. $\underset{\sim}{C}\, \mathcal{S}_B$) en astreignant les morphismes à être des applications C^∞ (resp. ...)

Plus généralement, si $f_1 : B \to B'$ est une application continue d'un espace topologique dans un autre, un morphisme de $\mathcal{S}_{f_1}$ est une application continue f d'un objet U de $\mathcal{S}_B$ dans un objet U' de $\mathcal{S}_{B'}$, telle que

1° le diagramme

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_1"'] & U' \arrow[d, "\pi_1"] \\ B \arrow[r, "f_1"] & B' \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

2° $\forall x \in B$, $f_x : U_x \to U'_{f_1(x)}$ est holomorphe.

Si f_1 est une application C^∞ d'une variété C^∞ dans une autre, f sera un morphisme de $C^\infty\mathbb{S}_{f_1}$ si, de plus, c'est une application C^∞ (resp. ...). On obtient ainsi, pour toute catégorie d'espaces topologiques, une catégorie fibrée $\mathbb{S}^n$ (resp. $C^\infty\mathbb{S}^n$, resp. ...).

II. Définition des espaces et variétés mixtes.

1. Première définition.

Soient B et V des espaces séparés, $\pi : V \to B$ une application continue. Une structure d'espace mixte sur B est définie sur V par un système de cartes $\varphi_i : U_i \to V$, où les (U_i) sont des objets de $\mathbb{S}^n_B$; pour chaque i, φ_i est un homéomorphisme de U_i sur un ouvert de V tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} U_i \arrow[rr, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & V \arrow[dl, "\pi"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

soit commutatif ; enfin $(\forall\, i, j)$ le "changement de carte" $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ est un isomorphisme de $\mathbb{S}_B$ d'un ouvert de U_i sur un ouvert de U_j.

La structure ainsi définie est une structure d'espace mixte $(C^0, \mathbb{C})$. Si B est un espace $\mathbb{C}$-analytique, et si les changements de cartes sont $\mathbb{C}$-analytiques, on a un espace mixte $\mathbb{C}$-analytique. Dans ce cas, V est lui-même un espace $\mathbb{C}$-analytique, et les fibres $V_x = \pi^{-1}\{x\}$ sont des sous-variétés $\mathbb{C}$-analytiques.

Si B est une variété C^∞ (resp. $\mathbb{R}$-analytique, resp. $\mathbb{C}$-analytique), et si les changements de cartes sont C^∞ (resp. ...), on a une variété mixte $(C^\infty, \mathbb{C})$ (resp. $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, resp $(\mathbb{C}, \mathbb{C})$). V est alors elle-même une variété. Remarquons que la notion de variété mixte $(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, ou $\mathbb{C}$-analytique, se réduit à celle de variété $\mathbb{C}$-analytique V, munie d'une projection $\pi : V \to B$ sur une autre variété $\mathbb{C}$-analytique, de rang maximum en tout point.

Soient $\pi : V \to B$ et $\pi' : V' \to B'$ deux espaces mixtes. $f_1 : B \to B'$ une application continue (resp. ...). Un morphisme de V dans V' au-dessus de f_1 est une application continue $f : V \to V'$ telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & V' \arrow[d, "\pi'"] \\ B \arrow[r, "f_1"] & B' \end{tikzcd}$$

(soit commutatif, et que, quelles que soient les cartes $\varphi_i : U_i \to V$ et $\varphi'_j : U'_j \to V'$, l'application $\varphi'^{-1}_j \circ f \circ \varphi_i$ soit un morphisme de S_{f_1} (resp. ...) d'un ouvert de U_i dans U'_j.

2. Définition équivalente.

Donnons un autre mode de définition des espaces mixtes, équivalent au précédent.

Étant donnés deux espaces B et V séparés, et une application continue $\pi : V \to B$, une structure d'espace pré-mixte consiste en une structure de variété $\underset{\sim}{C}$-analytique sur chaque fibre $V_x = \pi^{-1}\{x\}$. Étant donnés deux espaces pré-mixtes $\pi : V \to B$ et $\pi' : V' \to B'$, et une application continue $f_1 : B \to B'$, un morphisme d'espaces pré-mixtes au-dessus de f_1 est une application continue $f : V \to V'$ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V' \\ \pi\downarrow & & \downarrow\pi' \\ B & \xrightarrow[f_1]{} & B' \end{array}$$

soit commutatif, et induise sur chaque fibre une application $\underset{\sim}{C}$-analytique.

Un espace mixte est un espace pré-mixte $\pi : V \to B$ tel que tout point $y \in V$ admette un voisinage W dans V isomorphe comme espace pré-mixte à un ouvert de $B \times \underset{\sim}{C}^n$, avec un isomorphisme au-dessus de l'identité. Les morphismes d'espaces mixtes sont les mêmes : les espaces mixtes forment une sous-catégorie pleine.

3. Déformations.

Un espace mixte $\pi : V \to B$ est dit propre si B est localement compact et si l'application π est propre (i. e. l'image réciproque de tout compact est compacte). Si c'est une variété mixte, on peut montrer que c'est une variété fibrée localement triviale pour la structure C^∞ sous-jacente, mais l'exposé précédent montre bien qu'en général deux fibres ne sont pas isomorphes comme variétés $\underset{\sim}{C}$-analytiques.

DÉFINITION. - Soient V_o une variété $\underset{\sim}{C}$-analytique compacte, B un espace localement compact, $b_o \in B$. Une déformation $\underset{\sim}{C}$-analytique de V_o au-dessus de (B, b_o) est constituée par un espace mixte $\underset{\sim}{C}$-analytique propre $\pi : V \to B$

et un isomorphisme de variétés $\underset{\sim}{C}$-analytiques $i : V_0 \to \pi^{-1}\{b_0\}$.

L'objet de ce séminaire est l'étude, au moins locale, et une tentative de classification des déformations $\underset{\sim}{C}$-analytiques d'une variété $\underset{\sim}{C}$-analytique compacte V_0 donnée.

DÉFINITION. - Soient V_0 une variété $\underset{\sim}{C}$-analytique compacte. Une déformation $\underset{\sim}{C}$-analytique $(\pi : V \to B\ ,\ i : V_0 \to V)$ de V_0 est dite <u>localement "verselle"</u> (en anglais : "complete") si, pour toute autre déformation $(\pi' : V' \to B',\ i' : V_0 \to V')$ de V_0, il existe un voisinage B'_1 de b'_0 dans B', une application analytique $f_1 : B'_1 \to B$, avec $f_1(b'_0) = b_0$, et un morphisme d'espace mixte $\underset{\sim}{C}$-analytique $f : \pi'^{-1}(B'_1) \to V$ au-dessus de f_1 tel que $f \circ i' = i$. La déformation sera dite <u>localement universelle</u> si de plus le germe de f_1 en b'_0 est déterminé de façon unique par cette condition.

Il semble que toute variété $\underset{\sim}{C}$-analytique compacte V_0 admette une déformation $\underset{\sim}{C}$-analytique localement "verselle", et localement universelle si le groupe des automorphes de V_0 est discret.

III. <u>Champs de vecteurs</u>.

1. <u>Étude sur les modèles</u>.

Soient B un espace, U un objet de $\mathcal{S}_B$, i. e. un ouvert de $B \times \underset{\sim}{C}^n$, b_0 un point de B, $U_0 = \pi^{-1}\{b_0\}$.

Un champ holomorphe de vecteurs tangents sur U_0 (i. e. une application holomorphe de U_0 dans $\underset{\sim}{C}^n$) sera dit <u>champ vertical holomorphe</u> sur U_0. Un champ vertical holomorphe sur U est une application continue (resp. ...) $\theta : U \to C^n$, qui induise sur chaque fibre U_x un champ vertical holomorphe. Si $f : U \to U'$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}_B$, le transporté $f_* \theta$ de θ par f, est défini par

$$f_* \theta(f(x\ ,\ z)) = D_2 . f_{x,z} . \theta(x\ ,\ z)\ ,$$

où $D_2 f_{x,z}$ est l'application linéaire de $\underset{\sim}{C}^n$ dans lui-même, tangente à f_x au point $z \in U_x$. C'est encore un champ vertical holomorphe, car il résulte d'une intégrale de Cauchy que la matrice $Df_{x,z}$ dépend continuement du couple $(x\ ,\ z)$.

Supposons maintenant que B soit une variété C^∞, pour fixer les idées, et soit T_0 l'espace tangent à B en b_0. Un champ défini sur U_0 de vecteurs tangents à U , i. e. une application $\omega : U_o \to T_o \times \underset{\sim}{C}^n$, sera dit <u>champ projetable holomorphe</u> si $\omega(b_o , z) = (t_o , \theta(z))$, où $t_o \in T_o$ est un vecteur ne dépendant pas de z , appelé projection du champ ω , et $\theta(z)$ est un champ de vecteurs holomorphe. Si B est un espace $\underset{\sim}{C}$-analytique, pouvant présenter une singularité en b_o , on donne la même définition, T_o étant alors l'espace tangent à B en b_o au sens de ZARISKI, i. e. le dual de m/m^2 , où m est l'idéal des germes en b_o de fonctions holomorphes sur B , nulles en b_o .

Si $f : U \to U'$ est un isomorphisme de $C^\infty \mathcal{S}_B$ (resp. ...), le transporté $f_* \omega$ est défini par $f_* \omega(f(b_o , z)) = Df_{b_o,z}\, \omega(b_o , z)$, où $Df_{b_o,z} : T_o \times \underset{\sim}{C}^n \to T_o \times \underset{\sim}{C}^n$ est maintenant l'application linéaire tangente à f au point (b_o , z) . C'est un champ projetable holomorphe. En effet, la matrice $Df_{b_o,z}$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ D_1 f & D_2 f \end{pmatrix} ,$$

et

$$D_1 f : T \to \underset{\sim}{C}^n \quad \text{et} \quad D_2 f : C^n \to C^n$$

dépendent holomorphiquement de z (pour $D_1 f$, cela résulte de ce que f_x est holomorphe pour tout x). En posant $f_* \omega(b_o , z') = (t_o , \theta'(z'))$, on a

$$\theta'(z') = D_1 f_{b_o,z}(t_o) + D_2 f_{b_o,z}(\omega(z)) \qquad \text{si} \quad z' = f_{b_o}(z) ,$$

ce qui montre bien que $f_* \omega$ est un champ projetable holomorphe.

Un champ projetable holomorphe sur U est un champ C^∞ (resp. ...) de vecteurs tangents à U , qui induise sur chaque fibre un champ projetable holomorphe.

2. <u>Champs de vecteurs sur une variété mixte.</u>

Soit $\pi : V \to B$ une variété mixte $(C^\infty, \underset{\sim}{C})$ (resp. ..., resp. un espace mixte $\underset{\sim}{C}$-analytique). On définit par transport à partir des cartes les notions de :

- champ vertical holomorphe sur un ouvert d'une fibre
- champ vertical holomorphe sur un ouvert de V
- champ projetable holomorphe sur un ouvert d'une fibre
- champ projetable holomorphe sur un ouvert de V .

Soit ξ un champ de vecteurs C^∞ (resp. ...) sur V. On obtient en intégrant ξ une application C^∞, notée e^ξ, d'un ouvert $W \subset \mathbb{R} \times V$ contenant $\{0\} \times V$ (resp. $\mathbb{C}$-analytique d'un ouvert $W \subset \mathbb{C} \times V$) dans V, caractérisée par

$$\begin{cases} (1) \quad e^\xi(t_1 + t_2 , y) = e^\xi(t_1 , e^\xi(t_2 , y)) \text{, le premier membre étant défini chaque fois que le second l'est.} \\ (2) \quad \dfrac{\partial}{\partial t} e^\xi(t , y)\big|_{o,y} = \xi(y) . \end{cases}$$

Remarquons que W est une variété mixte sur $\mathbb{R} \times B$ (resp. un espace mixte sur $\mathbb{C} \times B$).

PROPOSITION. - Pour que $e^\xi : W \to V$ soit un morphisme d'espace mixte au-dessus de la projection $\mathbb{R} \times B \to B$, il faut et il suffit que ξ soit un champ vertical holomorphe. Pour que $e^\xi : W \to V$ soit un morphisme d'espace mixte au-dessus d'une application d'un ouvert de $\mathbb{R} \times B$ contenant $\{0\} \times B$ dans B, il faut et il suffit que ξ soit un champ projetable holomorphe.

La démonstration est laissée au lecteur.

IV. L'application de Spencer-Kodaira.

Soient $\pi : V \to B$ une variété mixte (resp. un espace mixte $\mathbb{C}$-analytique), $b_o \in B$, $V_o = \pi^{-1}\{b_o\}$. Soit T_o l'espace tangent à B en b_o (resp. au sens de ZARISKI). Nous introduisons les faisceaux suivants sur V_o :

Θ_o : faisceau des germes de champs verticaux holomorphes sur V_o ;

Π_o : faisceau des germes de champs localement projetables holomorphes sur V_o ;

Λ_o : faisceau $\pi^* T_o$, i. e. faisceau des germes d'applications localement constantes de V_o dans T_o.

On a une suite exacte de faisceaux sur V_o :

$$0 \to \Theta_o \to \Pi_o \to \Lambda_o \to 0$$

qui donne naissance à la suite exacte de cohomologie

$$\cdots \to H^0(V_o ; \Pi_o) \to H^0(V_o ; \Lambda_o) \xrightarrow{\delta} H^1(V_o ; \Theta_o) \to \cdots .$$

D'autre part, on a une application canonique

$$\iota : T_o \to H^\bullet(V_o ; \Lambda_o) \quad ,$$

qui est injective si V_o est non vide, et surjective si $V_\bullet$ est connexe.

DÉFINITION. - L'application de Spencer-Kodaira est la composée

$$\delta \circ \iota : T_o \to H^1(V_o ; \Theta_o) \quad .$$

Cette application est un outil essentiel pour l'étude locale des déformations de variétés $\underset{\sim}{C}$-analytiques. Remarquons que Θ_o n'est autre que le faisceau des germes de champs holomorphes de vecteurs tangents à V_o, donc ne dépend que de $V_\bullet$, tandis que T_o ne dépend que de la base. D'autre part, Θ_o est un faisceau analytique cohérent sur V_o, et si V_o est compacte, $H^1(V_o ; \Theta_o)$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\underset{\sim}{C}$ ([1]). On voit donc que dans ce cas, qui est le seul où on puisse dire quelque chose de non trivial, ρ_o pourra être accessible au calcul.

Il est clair que, si la variété mixte donnée est triviale, i. e. $V = B \times V_\bullet$, Π étant la projection sur B, l'application ρ_o est nulle. Le prochain exposé a pour but de montrer que, dans une certaine mesure, ρ_o indique la non-trivialité de V au voisinage de V_o.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (Henri). - Un théorème de finitude, Séminaire H. Cartan, t. 6, 1953/54 : Variétés analytiques complexes et fonctions automorphes, n° 17, 11 p.

[2] KODAIRA (K.) and SPENCER (D.). - On deformation of complex analytic structures, I., Annals of Math., Series 2, t. 67, 1958, p. 328-401.