Séminaire Henri Cartan

Adrien Douady

Déformations régulières

Séminaire Henri Cartan, tome 13, nº 1 (1960-1961), exp. nº 3, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1960-1961__13_1_A2_0>

DÉFORMATIONS RÉGULIÈRES

par Adrien DOUADY

Dans tout cet exposé, B sera une variété C^∞ (resp. $\underset{\sim}{R}$-analytique, resp. $\underset{\sim}{C}$-analytique) et $\pi : V \to B$ désignera une variété mixte propre ; b_o sera un point de B ; $V_o = \pi^{-1}(b_o)$ sera donc une variété $\underset{\sim}{C}$-analytique compacte.

I. L'application $\tilde{\rho}$.

Soit $\tilde{\Theta}$ (resp. $\tilde{\Pi}$) le faisceau des germes de champs de vecteurs verticaux holomorphes (resp. localement projetables holomorphes) sur V . Le faisceau quotient $\tilde{\Lambda} = \tilde{\Pi}/\tilde{\Theta}$ n'est autre que le faisceau image réciproque par π du faisceau $\tilde{T}$ des germes de champs C^∞ (resp. ...) de vecteurs tangents sur B .

Pour tout ouvert U de B , posons $V_U = \pi^{-1}(U)$.

La suite exacte

$$0 \to \tilde{\Theta} \to \tilde{\Pi} \to \tilde{\Lambda} \to 0$$

de faisceaux sur V_U donne naissance à un homomorphisme

$$\tilde{\rho}_U : \ H^o(U \ ; \tilde{T}) \xrightarrow{\pi_*} H^o(V_U \ ; \tilde{\Lambda}) \xrightarrow{\delta} H^1(V_U \ ; \tilde{\Theta}) \quad .$$

Soit $\mathcal{R}^1 \pi_* \tilde{\Theta}$ le faisceau sur B défini par le préfaisceau $U \to H^1(V_U \ ; \tilde{\Theta})$. Alors $\tilde{\rho}$ devient un homomorphisme de faisceaux sur B :

$$\tilde{\rho} : \ \tilde{T} \to \mathcal{R}^1 \pi_* \tilde{\Theta} \quad .$$

En particulier, on a un homomorphisme

$$\tilde{\rho}_o : \ \tilde{T}_o \to \mathcal{R}^1 \pi_* \tilde{\Theta} = H^1(V_o \ ; \tilde{\Theta})$$

où $\tilde{T}_o$ est l'espace vectoriel des germes en b_o de champs de vecteurs tangents sur B . On a enfin un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{T}_o & \xrightarrow{\tilde{\rho}_o} & H^1(V_o\ ;\ \tilde{\Theta}) \\ \downarrow \varepsilon & & \downarrow \varepsilon \\ T_o & \xrightarrow{\rho_o} & H^1(V_o\ ;\ \Theta_o) \end{array}$$

où ρ_o est l'application de Spencer-Kodaira [2].

THÉORÈME 1. - Pour que la variété mixte propre $\pi : V \to B$ soit localement triviale au voisinage du point $b_o \in B$, il faut et il suffit que l'application $\tilde{\rho}_o : \tilde{T}_o \to H^1(V_o\ ;\ \tilde{\Theta})$ soit nulle.

DÉMONSTRATION.

a. <u>Il faut</u> : si $\pi : V \to B$ est localement triviale en b_o, pour tout ouvert U de B au-dessus duquel V soit triviale, on a $\tilde{\Pi} = \tilde{\Lambda} \oplus \tilde{\Theta}$ sur V_U, donc $\delta : H^o(V_U\ ;\ \tilde{\Lambda}) \to H^o(V_U\ ;\ \tilde{\Theta})$ est nulle.

b. <u>Il suffit</u> : Soient $(\eta_1, \dots, \eta_p)$ des champs de vecteurs C^∞ (resp. ...) sur un voisinage de b_o dans B, tels que $(\eta_1(b_o), \dots, \eta_p(b_o))$ forment une base de l'espace tangent T_o à B en b_o. Il résulte de l'hypothèse que l'application

$$H^o(V_o\ ;\ \tilde{\Pi}) \to H^o(V_o\ ;\ \tilde{\Lambda})$$

est surjective.

Soient donc $(\xi_1, \dots, \xi_p)$ des champs de vecteurs projetables holomorphes sur un voisinage de V_o dans V, qui se projettent suivant $(\eta_1, \dots, \eta_p)$. Soit f l'application définie sur un voisinage de $0 \times V_o$ dans $\underset{\sim}{R}^p \times V_o$ (resp. $\underset{\sim}{C}$) par

$$f(t_1, \dots, t_p, y) = e^{\xi_1}(t_1, e^{\xi_2}(\dots, e^{\xi_p}(t_p, y) \dots)) .$$

Il résulte de la proposition énoncée dans [1] (§III, n° 2) que f induit un isomorphisme de variété mixte de $U \times V_o$ sur $\pi^{-1}(f_1(U))$ au-dessus de f_1, où U est un voisinage cubique de 0 dans $\underset{\sim}{R}^p$ suffisamment petit, et f_1 l'application de U dans B définie par

$$f_1(t_1, \dots, t_p) = e^{\eta_1}(t_1, \dots, e^{\eta_p}(t_p, b_o) \dots) ,$$

ce qui démontre le théorème.

II. Le cas régulier.

Pour tout $b \in B$, posons $V_b = \pi^{-1}(b)$. Considérons la famille $H^1(V_b ; \Theta_b)$ indexée par B d'espaces vectoriels de dimension finie sur $\underset{\sim}{C}$, et, pour tout $b \in B$, l'application

$$\varepsilon_b : H^1(V_b ; \tilde{\Theta}) \to H^1(V_b ; \Theta_b) .$$

Pour tout ouvert $U \subset B$, on a une application

$$\tilde{\varepsilon}_U : H^1(V_U ; \tilde{\Theta}) \to \prod_{b \in U} H^1(V_b ; \Theta_b)$$

qui définit quand U varie un homomorphisme du faisceau $\mathcal{R}^1 \pi_* \tilde{\Theta}$ dans le faisceau Φ sur B défini par $\Phi(U) = \prod_{b\in U} H^1(V_b ; \Theta_b)$.

DÉFINITION. - On dit que la variété mixte propre $\pi : V \to B$ est <u>régulière</u> si

1° la dimension de $H^1(V_b ; \Theta_b)$ ne dépend pas du point $b \in B$;

2° on peut mettre sur $E = \bigcup_{b\in B} H^1(V_b ; \Theta_b)$ une structure de fibré vectoriel C^∞ (resp. ...) telle que $\tilde{\varepsilon}$ soit un isomorphisme du faisceau $\mathcal{R}^1 \pi_* \tilde{\Theta}$ sur le faisceau des germes de sections C^∞ (resp. ...) du fibré E.

En fait, KODAIRA et SPENCER ont montré [2], en identifiant les espaces H^1 à des espaces de formes harmoniques, que la condition (2) est une conséquence de la condition (1).

Le théorème 1 admet comme corollaire :

PROPOSITION 1. - Pour que la variété mixte propre $\pi : V \to B$ soit localement triviale, il faut et il suffit qu'elle soit régulière et que, pour tout $b \in B$, l'application de Spencer-Kodaira

$$\rho_b : T_b \to H^1(V_b ; \Theta_b)$$

soit nulle.

En effet, du fait que $\tilde{\varepsilon}$ est injective, cette condition entraîne que l'application

$$\tilde{\rho}_b : \tilde{T}_b \to H^1(V_b ; \tilde{\Theta})$$

est nulle pour tout b.

Nous construirons à la fin de cet exposé un contre-exemple qui montrera qu'il est nécessaire de supposer que la variété mixte est régulière.

III. Un exemple de déformation non régulière : Variétés de Hopf.

1. Variétés de Hopf.

Soit n un entier $\geqslant 2$. Soit b une matrice $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$, dont toutes les valeurs propres soient de module > 1. Le groupe libre $L(b)$ engendré par b opère sur $\tilde{V} = \mathbb{C}^n - \{0\}$ librement, et l'espace quotient $V_b = \tilde{V}/L(b)$ est une variété $\mathbb{C}$-analytique compacte, homéomorphe à $S^{2n-1} \times S^1$, appelée variété de Hopf définie par b.

V_b et $V_{b'}$ sont isomorphes si et seulement si $\exists$ a tel que $b' = ab\,a^{-1}$ ou $ab^{-1}\,a^{-1}$ (cf. Appendice).

Soit Θ le faisceau des germes de champs holomorphes de vecteurs tangents sur V_b.

PROPOSITION 2. - $H^0(V_b ; \Theta)$ s'identifie à l'espace vectoriel des matrices qui commutent à b, et $H^1(V_b ; \Theta)$ a même dimension que cet espace vectoriel.

DÉMONSTRATION. - Si X est un champ de vecteurs sur un ouvert $U \subset \tilde{V}$, $b_*(X)$ sera le champ de vecteurs transporté par b sur l'ouvert $b(U)$, soit $b_* X(u) = bX(b^{-1} u)$. Soit $\mathfrak{U} = (U_i)$ un recouvrement de V par des ouverts de Stein simplement connexes ; posons, pour tout i, $\tilde{U}_i = \chi^{-1}(U_i)$, où χ est l'application canonique de $\tilde{V}$ sur V_b. Le recouvrement $\tilde{\mathfrak{U}} = (\tilde{U}_i)$ de $\tilde{V}$ est formé d'ouverts de Stein invariants par b (non connexes, mais ça ne fait rien). b_* définit une application, encore notée b_*, du groupe des cochaînes $C^*(\tilde{V}, \tilde{\mathfrak{U}} ; \Theta)$ dans lui-même.

LEMME 1. - On a la suite exacte :

$$0 \to C^*(V_b , \mathfrak{U} ; \Theta) \xrightarrow{\chi^*} C^*(\tilde{V} , \tilde{\mathfrak{U}} ; \Theta) \xrightarrow{1 - b_*} C^*(\tilde{V} , \tilde{\mathfrak{U}} ; \Theta) \to 0 .$$

Démonstration du lemme 1. - La seule chose à vérifier est que l'application $1 - b_*$ est surjective : pour tous $(i_0 , \dots , i_q)$, soit $U'_{i_0,\dots,i_q}$ un ouvert de $\tilde{V}$ tel que

$$\chi : U'_{i_o,\dots,i_q} \to U_{i_o,\dots,i_q}$$

soit un homéomorphisme. $\tilde{U}_{i_o,\dots,i_q}$ est alors réunion disjointe des $b_*^p U'_{i_o,\dots,i_q}$, où $p \in \underset{\sim}{Z}$, et tout $\gamma \in C^q(\tilde{V} , \tilde{u} ; \Theta)$ se met sous la forme $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$, avec $\gamma_1 = 0$ sur $b^p(U'_{i_o,\dots,i_q})$ pour $p < 0$, $\gamma_2 = 0$ pour $p \geq 0$. Posons

$$\beta = \sum_{p\geq 0} b_*^p \gamma_1 + \sum_{p<0} b_*^p \gamma_2 \quad \text{(somme localement finie)} \quad .$$

On a $\beta - b_* \beta = \gamma$, d'où le lemme 1.

<u>Fin de la démonstration de la proposition</u> 2. – On déduit du lemme 1 la suite exacte :

$$0 \to H^o(V_b ; \Theta) \xrightarrow{\chi^*} H^o(\tilde{V} ; \Theta) \xrightarrow{1 - b_*} H^o(\tilde{V} ; \Theta) \xrightarrow{\delta_*} H^1(V_b ;\Theta) \xrightarrow{\chi^*} H^1(\tilde{V} ;\Theta) \xrightarrow{1 - b_*} H^1(\tilde{V} ;\Theta) \ .$$

On vérifie que

$$\chi^* : H^1(V_b ; \Theta) \to H^1(\tilde{V} ; \Theta)$$

est nulle. Si $n > 2$, c'est évident, car $H^1(\tilde{V} ; \Theta) = 0$. Si $n = 2$, un calcul direct sur les cochaînes d'un recouvrement de $\tilde{V}$ par deux ouverts de Stein montre que

$$1 - b_* : H^1(\tilde{V} ; \Theta) \to H^1(\tilde{V} ; \Theta)$$

est bijective.

D'autre part, $H^o(\tilde{V} ; \Theta)$ est l'espace des champs de vecteurs holomorphes sur $\tilde{V}$, mais un tel champ se prolonge en un champ de vecteurs holomorphe sur $\underset{\sim}{C}^n$; et $H^o(\tilde{V} ; \Theta) = L \oplus M$, où L e t l'espace des champs de vecteurs linéaires, et M l'espace des champs de vecteurs du second ordre en 0 . Les sous-espaces L et M sont invariants par b_* , et $1 - b_* : M \to M$ est un isomorphisme. La proposition 2 en découle en remarquant que, si un élément de L est représenté par une matrice a , on a $b_* a = ba\, b^{-1}$.

2. Variété mixte dont les fibres sont des variétés de Hopf.

Soit B l'ensemble de toutes les matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$, dont toutes les valeurs propres sont de module > 1. C'est un ouvert de $\mathbb{C}^{n^2}$. Soit α la transformation de $B \times \tilde{V}$ dans elle-même définie par $\alpha(b, x) = (b, b(x))$. Le groupe libre $L(\alpha)$ engendré par α opère librement sur $B \times \tilde{V}$, et le quotient $V = B \times \tilde{V}/L(\alpha)$ est une variété $\mathbb{C}$-analytique. En la munissant de la projection $\pi : V \to B$ déduite par passage au quotient de la projection $\pi_1 : B \times \tilde{V} \to B$, on obtient une variété mixte $\mathbb{C}$-analytique, propre, mais non régulière. En effet la condition (1) de la définition des variétés mixtes régulières n'est pas vérifiée : par exemple, pour $n = 2$, la dimension de $H^1(V_b ; \Theta)$ est 4 quand b est une matrice scalaire, 2 dans les autres cas.

Remarquons que la dimension de $H^1(V_b ; \Theta_b)$ est une fonction semi-continue supérieurement de b, et que l'ensemble des b telles que $\dim H^1(V_b ; \Theta_b) \geqslant k$ est un sous-espace analytique fermé de B. C'est là un résultat général, que nous espérons pouvoir démontrer dans un exposé ultérieur de ce séminaire.

3. Calcul de ρ.

On a $T_b = \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n) = L \subset H^0(\tilde{V} ; \Theta)$, et on a défini, pour démontrer la proposition 2, une application $\delta_* : L \to H^1(V_b ; \Theta)$ qui est surjective.

PROPOSITION 3. - L'application ρ de Spencer-Kodaira est donnée, pour la variété mixte étudiée dans ce chapitre, par

$$\rho(a) = \delta_*(ab^{-1}) \quad .$$

En particulier, elle est surjective, et a pour noyau l'espace des matrices de la forme $[\ell, b]$, $\ell \in L$.

DÉMONSTRATION. - Soit $a \in T_b = L$. Soit $\{U_i\}$ un recouvrement de V_b par des ouverts de Stein simplement connexes, et pour chaque i, soit U_i' une composante connexe de $\tilde{U}_i$.

Soit η_i' le champ projetable holomorphe sur U_i' défini par $\eta_i'(x) = (a, 0)$; soit $\tilde{\eta}_i$ le champ projetable holomorphe sur $\tilde{U}_i$ défini par $\tilde{\eta}_i = \alpha_*^k \eta_i'$ sur $b^k(U_i')$; et soit η_i le champ projetable holomorphe sur U_i correspondant à $\tilde{\eta}_i$. Par **définition,** $\rho(a)$ est la classe de cohomologie de la cochaîne (θ_{ij}), où $\theta_{ij} = \eta_j - \eta_i$ est un champ vertical holomorphe sur U_{ij}.

Posons $\tilde{\eta}_i(x) = (a\ , \beta_i(x))$. Alors $\beta \in C^o(\tilde{V}\ ;\ \Theta)$, et on a $(1 - b_*)\ \beta = ab^{-1} \in L \subset H^o(\tilde{V}\ ;\ \Theta)$. En effet $\alpha_*\ \eta = \eta$, soit $\alpha_*\ \eta_i(b^{-1}\ x) = \eta_i(x)$:

$$\alpha_*(a\ , \beta(b^{-1}\ x)) = (a\ , \beta(x)) \qquad ,$$

d'où

$$ab^{-1}\ x + b . \beta(b^{-1}\ x) = \beta(x) \qquad .$$

On en déduit que $\theta = \delta_*(ab^{-1})$, ce qui démontre la proposition 3.

4. <u>Un contre-exemple</u>. - Prenons $n = 2$, et $\sigma \in \underset{\sim}{C}$ tel que $|\sigma| > 1$. Soit $B' \subset B$ l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \sigma & t \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \quad , \quad t \in \underset{\sim}{C} \quad ,$$

et soit $V' = \pi^{-1}(B')$ la variété mixte induite par V au-dessus de V' ; B' est une droite, et son espace tangent T'_b en b est engendré, pour tout b , par $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il résulte de la proposition 3 que l'application de Spencer-Kodaira

$$\rho' \ :\ T_b(B') \ \to\ H^1(V_b\ ;\ \Theta)$$

est nulle si et seulement si

$$b \neq b_o = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \quad ;$$

car pour $b \neq b_o$, $a = [\ell\ , b]$, où $\ell = \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et pour $b = b_o$, ρ' est injective.

D'ailleurs, on peut voir que V' est triviale sur $B' - \{b_o\}$.

Soit $\varphi\ :\ C \ \to\ B' \subset B$ l'application définie par

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \sigma & t^2 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \qquad ,$$

et soit V^{φ} la variété mixte image réciproque de V par φ . L'application de Spencer-Kodaira ρ_t^{φ} de $\underset{\sim}{C}$ dans $H^1(V_{\varphi(t)}\ ;\ \Theta)$ est la composée

$$\rho'_{\varphi(t)} \circ D\varphi \; ; \; \underset{\sim}{C} \to T'_{\varphi}(t) \to H^1(V_{\varphi(t)} \; ; \; \Theta) \quad .$$

Elle est nulle pour tout t , car :

- si $t \neq 0$, $\rho'_{\varphi(t)}$ est nulle ;
- si $t = 0$, $D\varphi$ est nulle.

Cependant la variété mixte V^{φ} n'est pas localement triviale, car V^{φ}_{o} n'est pas isomorphe aux V^{φ}_{t} pour $t \neq 0$.

5. Question (K. SRINIVASACHARYULU).

On sait que les variétés de Hopf sont non-kählériennes, donc non algébriques. Pour $n = 2$, la variété V_b admet des fonctions méromorphes non constantes, si et seulement si b se diagonalise avec des valeurs propres σ_1 et σ_2 vérifiant une relation $\sigma_1^p = \sigma_2^q$, p et q entiers (il y a alors la fonction $x_1^p x_2^{-q}$). L'ensemble des b vérifiant cette propriété n'est ni ouvert, ni fermé, mais c'est une réunion dénombrable de sous-espaces analytiques fermés. Un phénomène analogue se produit pour les déformations de tores complexes. Ce résultat est-il général ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] DOUADY (Adrien). - Variétés et espaces mixtes, Séminaire Cartan, t. 13, 1960/61 : Déformations de structures analytiques complexes, n° 2, 7 p.

[2] KODAIRA (K.) and SPENCER (D.). - On deformation of complex analytic structures, I., Annals of Math., Series 2, t. 67, 1958, p. 328-401.

APPENDICE

Avec les notations de III, 1, soit $f : V_b \to V_{b'}$ un isomorphisme de variétés $\underset{\sim}{C}$-analytiques. Il se relève en un isomorphisme des revêtements universels

$$\tilde{f} : \underset{\sim}{C}^n - \{0\} \to \underset{\sim}{C}^n - \{0\} \quad .$$

D'après HARTOGS, $\tilde{f}$ se prolonge en un isomorphisme $g : \underset{\sim}{C}^n \to \underset{\sim}{C}^n$. On a nécessairement

$$(*) \qquad g(bz) = b'^k g(z) \; , \qquad z \in \underset{\sim}{C}^n \; ,$$

k étant un entier ; la même propriété, appliquée à l'application réciproque de g , montre que $k = \pm 1$. Soit a l'application linéaire tangente à g à l'origine ; l'identité $(*)$ donne

$$ab = b'^k a \; , \qquad k = \pm 1 \; ,$$

d'où

$$b' = aba^{-1} \quad \text{ou} \quad b' = ab^{-1} a^{-1} \; .$$