Pierre Grisvard

L'indice des opérateurs de Calderon-Zygmund elliptiques

Séminaire Henri Cartan, tome 16, nº 1 (1963-1964), exp. nº 13, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1963-1964__16_1_A13_0>

Séminaire CARTAN-SCHWARTZ
16e année, 1963/64, n° 13

10 février 1964

L'INDICE DES OPÉRATEURS DE CALDERON-ZYGMUND ELLIPTIQUES

par Pierre GRISVARD

Dans cet exposé, on définit ce que l'on entend par opérateur de Calderon-Zygmund à indice ; on montre que seuls les opérateurs de Calderon elliptiques admettent un indice et que cet indice ne dépend que du symbole de l'opérateur.

Rappelons quelques notations :

X désigne une variété réelle de classe C^∞ compacte de dimension n .

E et F sont deux fibrés à fibre vectorielle de dimension finie, de classe C^∞ et de base X ; $\underset{\sim}{E}$ et $\underset{\sim}{F}$ désignent les fibrés images réciproques de E et F par rapport à l'application $h : T^*(X) \to X$ qui, à tout covecteur tangent, fait correspondre son origine.

$\Gamma(X ; E , F ; \rho)$ est l'espace des opérateurs de Calderon-Zygmund d'ordre ρ opérant de E dans F ; l'espace des ρ-symboles correspondants est

$$\mathcal{E}(X , T^*_{\bullet}(X) ; \mathcal{L}(\underset{\sim}{E} , \underset{\sim}{F}) ; \rho)$$

$\mathcal{A}(X ; E , F ; \rho)$ est l'ensemble des opérateurs ρ-améliorants opérant de E dans F .

Pour $A \in \Gamma(X ; E , F ; \rho)$, nous noterons A_s le prolongement à $H^s(X ; E)$; c'est un opérateur linéaire continu de $H^s(X ; E)$ dans $H^{s-\rho}(X , F)$.

Des résultats de compacité établis dans l'exposé précédent, on déduit que, pour $A \in \mathcal{A}(X ; E, F ; \rho)$, A_s est un opérateur compact de $H^s(X ; E)$ dans $H^{s-\rho}(X ; F)$ pour tout s réel.

DÉFINITION 1. - *Nous dirons que* $A \in \Gamma(X ; E , F ; \rho)$ *admet un indice, si* A_s *est un opérateur à indice de* $H^s(X ; E)$ *dans* $H^{s-\rho}(X ; F)$ *pour tout* s *réel, et si l'indice est indépendant de* s .

Pour commencer nous démontrons la proposition suivante :

PROPOSITION 1. - *Soit* $A \in \Gamma(X ; E , F ; \rho)$ *un opérateur* ρ-*elliptique , alors* A *est un opérateur à indice et enfin* A , *considéré comme opérateur de* $\overset{o}{\mathcal{D}}(X ; E)$ *dans* $\overset{o}{\mathcal{D}}(X ; F)$, *admet un indice égal à la valeur commune* $\chi(A)$ *aux* $\chi(A_s)$ *pour* s *réel.*

Démonstration. - Nous avons déjà vu qu'un opérateur de Calderon-Zygmund ρ-elliptique admet un inverse modulo les opérateurs améliorants, qui est un opérateur de Calderon-Zygmund d'ordre $-\rho$; on en déduit que, pour tout s , A_s est inversible modulo les compacts, comme opérateur de $H^s(X ; E)$ dans $H^{s-\rho}(X ; F)$, ce qui prouve que A_s admet un indice $\chi(A_s)$ (cf. le théorème 1 de l'exposé précédent).

Pour montrer que $\chi(A_s)$ ne dépend pas de s , nous utilisons l'identité

$$\chi(A_s) = \dim \operatorname{Ker} A_s - \dim \operatorname{Ker} {}^tA_s .$$

Il suffit donc de vérifier que $\operatorname{Ker} A_s$ et $\operatorname{Ker} {}^tA_s$ ne dépendent pas de s . Grâce à l'hypoellipticité de A

$$\operatorname{Ker} A_s = \{\varphi \in H^s(X ; E) ; \ A_s \varphi = 0\}$$

coïncide avec

$$\operatorname{Ker} A = \{\varphi \in \overset{o}{\mathcal{D}}(X ; E) ; \ A\varphi = 0\} ,$$

donc $\operatorname{Ker} A_s$ ne dépend pas de s . Pour vérifier que $\operatorname{Ker} {}^tA_s$ ne dépend pas non plus de s , on remarque que ${}^tA_s = ({}^tA)_{\rho-s}$ et que ${}^tA$ est aussi un opérateur de Calderon-Zygmund ρ-elliptique , donc $\operatorname{Ker} {}^tA_s$ coïncide avec

$$\operatorname{Ker} {}^tA = \{\varphi \in \overset{n}{\mathcal{D}}_t(X ; F^*) ; \ {}^tA\varphi = 0\} \qquad (^1)$$

et ne dépend pas de s .

Montrons que A , comme opérateur de $\overset{o}{\mathcal{D}}(X ; E)$ dans $\overset{o}{\mathcal{D}}(X ; F)$ admet un indice ; nous avons déjà vu que $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A_s$ pour tout s , c'est un espace de dimension finie puisque A_s admet un indice. Nous allons vérifier que

$$\operatorname{Im} A = \bigcap_s \operatorname{Im} A_s .$$

L'inclusion $\operatorname{Im} A \subset \bigcap_s \operatorname{Im} A_s$ est évidente ; réciproquement soit $f \in \bigcap_s \operatorname{Im} A_s$; alors, pour tout s réel, il existe $\varphi_s \in H^s(X ; E)$ tel que $A_s \varphi_s = f$. Fixons s , et soit $t > s$; de l'identité $A_s(\varphi_s - \varphi_t) = 0$, et de l'hypoellipticité de A , on déduit que $\varphi_s - \varphi_t \in \overset{o}{\mathcal{D}}(X ; E)$ pour tout $t > s$, donc

$$\varphi_s \in \bigcap_{t>s} H^t(X ; E) = \overset{o}{\mathcal{D}}(X ; E)$$

car X est compacte, et $f \in \operatorname{Im} A$. On a donc aussi

$$\operatorname{Im} A = \bigcap_s (\operatorname{Im} A_s \cap \overset{o}{\mathcal{D}}(X ; F)) ;$$

$\operatorname{Im} A_s$ est fermé dans $H^s(X ; F)$ donc son intersection avec $\overset{o}{\mathcal{D}}(X ; F)$ est fermée

---

(1) $\overset{n}{\mathcal{D}}_t(X ; F^*)$ est l'espace des formes différentielles de degré n , d'espèce impaire sur X (non nécessairement orientable) à coefficients sections C^∞ de F^*.

dans cet espace et $\operatorname{Im} A$ est fermé. Il est alors bien de codimension finie, puisque c'est l'orthogonal de $\operatorname{Ker} {}^tA$. On a alors

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} (A_s) \ , \qquad \operatorname{Ker} {}^tA = \operatorname{Ker} {}^tA_s \ ,$$

donc

$$\chi(A) = \chi(A_s) \ .$$

C. Q. F. D.

<u>Remarque</u>. - La formule

$$\chi(A) = \dim \operatorname{Ker} A - \dim \operatorname{Ker} {}^tA$$

montre que les opérateurs de Calderon-Zygmund A et ${}^tA$, qui sont elliptiques en même temps, ont des indices opposés ; et de même A et A^* .

THÉORÈME 1. - $A \in \Gamma(X ; E , F ; \rho)$ <u>est un opérateur de Calderon-Zygmund à indice si et seulement s'il est</u> ρ-<u>elliptique</u>.

<u>Remarque</u>. - Il ne suffit <u>pas</u> que A admette un indice comme opérateur de $\overset{o}{\mathcal{D}}(X ; E)$ dans $\overset{o}{\mathcal{D}}(X ; F)$ pour que A soit ρ-elliptique. $\chi(A)$ <u>ne dépend que de</u> $\sigma_\rho(A)$ (en effet si $\sigma_\rho(A) = \sigma_\rho(B)$, $A_s - B_s$ est compact pour tout s , donc $\chi(A_s) = \chi(B_s)$).

Il nous reste seulement à démontrer la réciproque de la proposition 1. Pour démontrer qu'un opérateur $A \in \Gamma(X ; E , F ; \rho)$, qui est un opérateur de Calderon-Zygmund à indice, est ρ-elliptique nous utiliserons un lemme que nous admettrons provisoirement.

LEMME 1. - <u>Il existe</u> $G_{-\rho} = G_{X;E,E;-\rho} \in \Gamma(X ; E , E ; -\rho)$ <u>opérateur</u> $(-\rho)$-<u>elliptique</u>.

$G_{-\rho}$ est un opérateur de Calderon-Zygmund à indice ; en substituant $A \circ G_{-\rho}$ à A , on se ramène au cas où $A \in \Gamma(X ; E , F ; 0)$.

Dans ce cas nous allons pouvoir prouver le théorème par l'absurde. On suppose que A_0 admet un indice et qu'il existe $x_0 \in X$ et $\xi_0 \in T^*(X)$ vecteur cotangent non nul d'origine x_0 , tels que $\sigma_0(A)(x_0 , \xi_0)$ ne soit pas inversible ; il existe alors $\vec{e} \in E_{x_0}$, $\vec{e} \neq 0$, tel que $\sigma_0(A)(x_0 , \xi_0)\, \vec{e} = 0$.

Rappelons un lemme démontré dans l'exposé n° 9 : soient (a , b) un couple de points de $\underset{\sim}{R}^n$, $b \neq 0$ et $\widetilde{\mathcal{U}}$ un voisinage relativement compact de a , alors il existe une suite $\{\varphi_j\}_{j=1,2,\dots} \subset H^0(\underset{\sim}{R}^n)$ formée de fonctions à support dans $\widetilde{\mathcal{U}}$ et telle que :

(i) $\|\varphi_j\|_0 = 1$, $j = 1, 2, \ldots$

(ii) φ_j converge vers zéro dans $H^0(\mathbb{R}^n)$ faible pour $j \to \infty$.

(iii) Pour $L \in \Gamma(\mathbb{R}^n ; 0)$, $L_0\, \varphi_j - \sigma_0(L)(a , b) \to 0$ dans $H^0(\mathbb{R}^n)$ fort pour $j \to +\infty$.

Par cartes locales, on déduit facilement qu'il existe une suite de fonctions $\{\psi_j\}_{j=1,2,\ldots} \subset H^0(X ; E)$ telle que

(i) $\|\psi_j\|_0 \geqslant C > 0$, $j = 1, 2, \ldots$

(ii) ψ_j converge vers zéro faiblement dans $H^0(X ; E)$ pour $j \to +\infty$.

(iii) Pour tout $B \in \Gamma(X ; E , F ; 0)$, $B_0\, \psi_j - \sigma_0(B)(x_0 , \xi_0)\, \psi_j \to 0$ dans $H^0(X ; F)$ fort pour $j \to +\infty$; $\psi_j(x_0)$ est proportionnelle à $\vec{e}$, si bien que $A_0\, \psi_j \to 0$ dans $H^0(X ; F)$ fort.

L'existence de cette suite mène à une contradiction : puisque A_0 admet un indice, il existe un opérateur C linéaire continu de $H^0(X ; F)$ dans $H^0(X ; E)$ tel que $CA_0 - 1$ soit compact ; de (ii), on déduit alors que $CA_0\, \psi_j - \psi_j \to 0$ dans $H^0(X ; E)$ fort, mais $CA_0\, \psi_j \to 0$ grâce à (iii), donc $\psi_j \to 0$ dans $H^0(X ; E)$, ce qui contredit (i).

Le théorème est démontré sous réserve de vérifier le lemme 1 ; ce lemme résulte du lemme suivant.

LEMME 2. - Si σ_ρ est un symbole relatif à E , E , et si, pour tout (x , ξ) , $\sigma_\rho(x , \xi)$ est un multiple réel de l'identité, les opérateurs l'ayant pour symbole ont l'indice 0 ; on peut en choisir un qui, pour tout s , soit un isomorphisme de $H^s(X ; E)$ sur $H^{s-\rho}(X ; E)$.

Démonstration. - On construit pour commencer un opérateur G_ρ , ρ-elliptique et d'indice nul (i. e. $\chi((G_\rho)_s) = 0$ pour tout s).

On fixe sur X une métrique riemannienne, c'est-à-dire une forme quadratique définie positive sur chaque fibre $T^*_x(X)$ de $T^*(X)$ dépendant C^∞ du point x de X . On en déduit un isomorphisme de $\Omega = (\overset{n}{\wedge}\, T^*(X))_t$ [2] avec le fibré trivial de dimension un $\Omega \simeq \mathbb{C} \times X$.

On fixe de même sur E une forme hermitienne définie positive, ce qui permet

---

[2] On déduit $(\overset{n}{\wedge}\, T^*(X))_t$ de $\overset{n}{\wedge}\, T^*(X)$ en tordant chaque fibre par l'ensemble des deux orientations possibles de l'espace tangent.

d'identifier E avec $\overline{E}^*$.

L'espace $\overset{n}{\mathcal{Q}}_t(X\ ;\ \overline{E}^*)$ qui, par définition, est l'espace $\mathcal{S}(X\ ;\ \overline{E}^* \otimes_X \Omega)$ des sections C^∞ du fibré $\overline{E}^* \otimes_X \Omega$, peut alors être identifié à $\overset{o}{\mathcal{Q}}(X\ ;\ E)$. Pour $A \in \Gamma(X\ ;\ E\ ,\ E\ ;\ \rho)$, l'adjoint A^* est défini, $A^* \in \Gamma(X\ ;\ E\ ,\ E\ ;\ \rho)$ et

$$\sigma_\rho(A^*)(x\ ,\ \xi) = \sigma_\rho(A)^*\ (x\ ,\ \xi)\ .$$

Si $\sigma_\rho(x\ ,\ \xi)$ est, pour tout $(x\ ,\ \xi)$, proportionnel à $I_{\underset{\sim}{E}_x}$ à facteur de proportionnalité réel, on a $\sigma_\rho{}^* = \sigma_\rho$ (l'existence de tels σ_ρ est évidente ; par exemple $|\xi|^\rho\ I_{\underset{\sim}{E}_x}$ répond à la question).

Si G_ρ est un opérateur de Calderon-Zygmund arbitraire de symbole σ_ρ , G_ρ et G_ρ^* ont même symbole, donc même indice, mais aussi des indices opposés, donc un indice nul.

Pour achever la démonstration du lemme, on va modifier G_ρ par addition d'un opérateur améliorant A tel que $(G_\rho + A)_s$ soit un isomorphisme de $H^s(X\ ;\ E)$ sur $H^{s-\rho}(X\ ;\ E)$ pour tout s : soit $\varphi_1\ ,\ \dots\ ,\ \varphi_n$ une base de

$$\operatorname{Ker} G_\rho = \{\varphi \in \overset{o}{\mathcal{Q}}(X\ ;\ E)\ ;\ \ G_\rho\ \varphi = 0\}$$

et soit $\psi_1\ ,\ \dots\ ,\ \psi_n$ une base d'un supplémentaire topologique de $\operatorname{Im} G_\rho$ dans $\overset{o}{\mathcal{Q}}(X\ ;\ E)$. On considère des fonctions $\eta_1\ ,\ \dots\ ,\ \eta_n$ de $\overset{n}{\mathcal{Q}}(X\ ;\ \overline{E}^*)$ telles que $\langle\eta_i\ ,\ \psi_j\rangle = \delta_{i,j}$, $i\ ,\ j = 1\ ,\ 2\ ,\ \dots\ ,\ n$, et on prend pour A l'opérateur

$$\varphi \rightsquigarrow A\varphi = \sum_{i=1}^{n} \langle\eta_i\ ,\ \varphi\rangle\ \psi_i\ .$$

A est linéaire continu de $\overset{o}{\mathcal{Q}}(X\ ;\ E)$ dans $\overset{o}{\mathcal{Q}}(X\ ;\ E)$, donc ρ-améliorant. On sait que $\chi((G_\rho + A)_s) = \chi((G_\rho)_s) = 0$, donc pour vérifier que $(G_\rho + A)_s$ est un isomorphisme, il suffit de voir que $\operatorname{Ker}\ (G_\rho + A)_s = \operatorname{Ker}\ (G_\rho + A) = 0$; ceci est évident [3].

Nous avons vu que l'indice d'un opérateur de Calderon (lorsqu'il admet un indice) ne dépend que de son symbole ; l'énoncé suivant précise cette propriété :

THÉORÈME 2. - <u>Soient</u> A <u>et</u> $B \in \Gamma(X\ ;\ E\ ,\ F\ ;\ \rho)$ <u>deux opérateurs</u> ρ-<u>elliptiques</u> <u>dont les symboles</u> $\sigma_\rho(A)$ <u>et</u> $\sigma_\rho(B)$ <u>sont homotopes dans l'ensemble des symboles</u>

---

(3) En effet si $(G_\rho + A) = 0$, comme $G_\rho\ \varphi$ et $A\varphi$ sont dans deux sous-espaces supplémentaires, on a $G_\rho\ \varphi = 0$ et $A\varphi = 0$. De $G_\rho\ \varphi = 0$, on tire $\varphi = \sum C_i\ \varphi_i$, et de $A\varphi = \sum C_i\ \psi_i = 0$, on tire $C_i = 0$ pour tout i , donc $\varphi = 0$.

<u>inversibles de</u> $\mathcal{E}(X\ ,\ T^*_{\bullet}(X)\ ;\ \mathcal{L}(E\ ,\ F)\ ;\ \rho\ )$; <u>alors</u> $\chi(A) = \chi(B)$.

<u>Démonstration</u>. - Par composition avec un opérateur de symbole $\sigma_\rho(B)^{-1}$, on se ramène immédiatement au cas où $E = F$, $\rho = 0$ et où $\sigma_o(A)$ est homotope au symbole $(x\ ,\ \xi) \rightsquigarrow I_{\underset{\sim}{E}_x}$.

Pour vérifier que $\chi(A_s) = 0$ pour tout s , il suffit de montrer que A_s est homotope à l'identité dans l'ensemble des opérateurs à indice de l'espace $H^s(X\ ;\ E)$ dans lui-même ; ceci résulte de l'existence d'un certain relèvement de l'application symbole :

Nous avons vu (exposé n° 9) qu'il existe un opérateur

$$\theta \in \mathcal{L}(\mathcal{S}(\underset{\sim}{R}^n\ ;\ \Xi\ ;\ 0)\ ;\ \bigcap_s \mathcal{L}(H^s(\underset{\sim}{R}^n)\ ,\ H^s(\underset{\sim}{R}^n)))$$

(Ξ dual de $\underset{\sim}{R}^n$) tel que $\theta(\varphi) \in \Gamma(\underset{\sim}{R}^n\ ;\ 0)$ pour $\varphi \in \mathcal{S}(\underset{\sim}{R}^n\ ;\ \Xi\ ;\ 0)$, et que $\sigma_o \circ \theta = 1$. Par tensorisation, cartes locales et partition de l'unité, on déduit un "relèvement" de l'application symbole sur X , c'est-à-dire un opérateur

$$\Theta \in \mathcal{L}(\mathcal{E}(X\ ;\ T^*_{\bullet}(X)\ ;\ \mathcal{L}(\underset{\sim}{E}\ ,\ \underset{\sim}{E})\ ;\ 0)\ ;\ \bigcap_s \mathcal{L}(H^s(X\ ;\ E)\ ,\ H^s(X\ ;\ E)))$$

tel que $\Theta(\varphi) \in \Gamma(X\ ;\ E\ ,\ E\ ;\ 0)$ et $\sigma_o(\Theta(\varphi)) = \varphi$ pour toute φ .

C. Q. F. D.