Luc Illusie

Compléments de K-théorie

Séminaire Henri Cartan, tome 16, n° 1 (1963-1964), exp. n° 15, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1963-1964__16_1_A15_0>

Séminaire CARTAN-SCHWARTZ
16e année, 1963/64, n° 15

24 février 1964

COMPLÉMENTS DE K-THÉORIE

par Luc ILLUSIE

L'objet de cet exposé est de présenter une autre définition des groupes de Grothendieck $K(X , A)$ considérés dans l'exposé 3, mieux adaptée à l'étude des structures multiplicatives, et susceptible de nombreuses applications (cf. [1], [2] et [3]).

1. Une généralisation de la notion de "fibré-différence".

Nous reprenons les notations de l'exposé 3 : X désigne un espace compact et A un sous-espace fermé. Nous allons associer à tout objet formé d'une suite $(E_o , \dots , E_n)$ de fibrés sur X et d'une suite exacte

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow E_o|A \xrightarrow{\alpha_o} E_1|A \xrightarrow{\alpha_1} \dots \longrightarrow E_{n-1}|A \xrightarrow{\alpha_{n-1}} E_n|A \longrightarrow 0$$

un élément $d(E_o , E_1 , \dots , E_n ; \alpha_o , \alpha_1 , \dots , \alpha_{n-1}) \in K(X , A)$ de la façon suivante : la suite (1) se "casse" en petites suites exactes

$$(2) \qquad 0 \longrightarrow Z_r \longrightarrow E_r|A \xrightarrow{\alpha_r} Z_{r+1} \longrightarrow 0 ,$$

où Z_r désigne le fibré (sur A), noyau de α_r. En scindant chaque suite (2), on obtient des isomorphismes

$$\lambda : \bigoplus_k E_{2k+1}|A \longrightarrow Z_r$$

$$\mu : \bigoplus_k E_{2k}|A \dashrightarrow Z_r$$

dont les classes d'homotopie sont indépendantes des scindages choisis, car deux scindages sont "homotopes" (en effet, si σ_r et $\tau_r : Z_{r+1} \longrightarrow E_r|A$ sont deux relèvements de α_r, alors $t\sigma_r + (1 - t)\tau_r$ est aussi un relèvement de α_r, pour tout $t \in [0 , 1]$).

Ainsi $\alpha = \lambda^{-1} \mu$ est un isomorphisme

$$\bigoplus_k E_{2k}|A \xrightarrow{\approx} \bigoplus_k E_{2k+1}|A$$

dont la classe d'homotopie ne dépend que de la suite (1). D'après l'exposé 3, il définit un élément $d(\bigoplus_k E_{2k} , \bigoplus_k E_{2k+1} ; \alpha)$ qu'on notera

$$d(E_o , E_1 , \ldots , E_n ; \alpha_o , \alpha_1 , \ldots , \alpha_{n-1}) .$$

Pour $n = 1$, c'est l'élément déjà défini dans l'exposé 3, ce qui justifie la notation. On vérifie sans peine la proposition suivante :

PROPOSITION 1.

1° Si f est une application continue $(X' , A') \longrightarrow (X , A)$, alors

$$d((f^* E_i) , (f^* \alpha_i)) = f^* d((E_i) , (\alpha_i)) ;$$

2° $d(E_o , \ldots , E_n ; \alpha_o , \ldots , \alpha_{n-1})$ ne dépend que de la classe d'homotopie de $(\alpha_o , \ldots , \alpha_{n-1})$;

3° Si f est l'application canonique $(X , \emptyset) \longrightarrow (X , A)$,

$$f^* d((E_i) , (\alpha_i)) = \sum_i (-1)^i d(E_i) ,$$

en notant $d(E_i)$ l'image de E_i dans $K(X)$;

4° Si on peut prolonger les α_i au-dessus de X de manière que la suite

$$0 \longrightarrow E_o \xrightarrow{\alpha_o} E_1 \xrightarrow{\alpha_1} \ldots \longrightarrow E_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} E_n \longrightarrow 0$$

soit exacte, alors $d((E_i) , (\alpha_i)) = 0$;

5° $d((E_i \oplus E_i') , (\alpha_i \oplus \alpha_i')) = d((E_i) , (\alpha_i)) + d((E_i') , (\alpha_i'))$;

6° $d(0 , E_o , E_1 , \ldots , E_n ; 0 , \alpha_o , \ldots \alpha_{n-1})$

$$= - d(E_o , \ldots , E_n ; \alpha_o , \ldots , \alpha_{n-1}) .$$

2. Une autre définition de $K(X , A)$.

Ce qui précède conduit à une autre définition. Pour chaque paire (X , A) (où X est compact, et A fermé dans X), considérons la catérorie $C(X , A)$ dont les objets sont les couples formés d'une suite $(E_o , \ldots , E_n , \ldots)$ de fibrés de base X , nuls pour n assez grand, et d'une suite exacte

$$0 \longrightarrow E_o|A \xrightarrow{\alpha_o} E_1|A \xrightarrow{\alpha_1} \ldots \longrightarrow E_n|A \xrightarrow{\alpha_n} \ldots ,$$

les morphismes $((E_i) , (\alpha_i)) \longrightarrow ((E_i') , (\alpha_i'))$ étant les suites de morphismes $E_i \longrightarrow E_i'$ commutant avec les α_i et les α_i' au-dessus de A . L'ensemble $I(X , A)$ des classes d'isomorphie d'objets de $C(X , A)$ est un monoïde commutatif (pour l'addition définie par la somme de Whitney sur X). Ce monoïde $I(X , A)$ dépend fonctoriellement du couple (X , A) . En particulier, on a un homomorphisme de restriction $I(X , X) \longrightarrow I(X , A)$. Posons

$$L(X , A) = \mathrm{Coker}\ I(X , X) \longrightarrow I(X , A) .$$

On rappelle que si on a un morphisme $f : I' \longrightarrow I$ de monoïdes commutatifs, notés additivement et ayant chacun un élément neutre, le conoyau de f est le quotient de I par la relation d'équivalence

$$R(a , b) \iff \exists\ c \in I' \text{ tel que } a + f(c) = b + f(c) .$$

$L(X , A)$ est un monoïde commutatif dépendant fonctoriellement du couple (X , A). On a un homomorphisme évident $\ell : K(X , A) \longrightarrow L(X , A)$. D'autre part, l'application qui, à $((E_i) , (\alpha_i)) \in C(X , A)$, associe $d((E_i) , (\alpha_i))$, définit, par passage au quotient, un homomorphisme

$$\chi : L(X , A) \longrightarrow K(X , A) .$$

Il est clair que $\chi \circ \ell$ est l'identité de $K(X , A)$; donc l'application ℓ est injective.

THÉORÈME 1. - L'application $\ell : K(X , A) \longrightarrow L(X , A)$ est un isomorphisme, et par suite, $L(X , A)$ est un groupe commutatif.

Il suffit de montrer que ℓ est surjective. Nous dirons qu'un objet

$$((E_i) ; (\alpha_i)) \in C(X , A)$$

est de longueur $\leqslant n$ si $E_i = 0$ pour $i > n$; nous noterons $C_n(X , A)$ la sous-catégorie de $C(X , A)$ formée des objets de longueurs $\leqslant n$, $I_n(X , A)$ l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets de $C_n(X , A)$, et

$$L_n(X , A) = \mathrm{Coker}\ (I_n(X , X) \longrightarrow I_n(X , A)) .$$

On a

$$L_1(X , A) = K(X , A) .$$

D'autre part, l'inclusion $C_n(X , A) \longrightarrow C_{n+1}(X , A)$ induit un homomorphisme $\ell_n : L_n(X , A) \longrightarrow L_{n+1}(X , A)$; et il est clair que $L(X , A)$ s'identifie à la limite inductive des $L_n(X , A)$ suivant les ℓ_n, et ℓ s'identifie à l'homomorphisme canonique de $K(X , A) = L_1(X , A)$ dans la limite inductive. Nous allons montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, l'application ℓ_n est surjective, ce qui entraînera la surjectivité de ℓ.

Pour $E \in C_{n+1}(X , A)$, nous noterons $[E]$ son image dans $L_{n+1}(X , A)$ par l'application canonique $C_{n+1}(X , A) \longrightarrow L_{n+1}(X , A)$. Donnons-nous

$$u \in L_{n+1}(X , A)$$

et choisissons $E \in C_{n+1}(X , A)$ tel que $[E] = u$. On a $[E] = [E']$, où

$E' = (E_o , \dots , E_{n-1} \oplus E_{n+1} , E_n \oplus E_{n+1} , E_{n+1} ; \alpha_o , \dots , \alpha_{n-1} \oplus 1 , \alpha_n \oplus 0)$.

L'homomorphisme $\alpha_n \oplus 0 : (E_n \oplus E_{n+1})|_A \longrightarrow E_{n+1}|_A$ se prolonge en un homomorphisme surjectif au-dessus de X ; en effet, α_n se prolonge en un homomorphisme au-dessus de X , qui est surjectif au-dessus d'un voisinage U de A ; si φ est une fonction continue sur X , à valeurs dans $[0 , 1]$, égale à 1 sur A , à support dans U , l'homomorphisme f défini par

$$f_x = \varphi(x)\ \alpha_x + (1 - \varphi(x))\ i_x$$

(où i_x désigne l'application identique de la fibre de E_{n+1} au-dessus du point $x \in X$) fournit le prolongement cherché. Donc, quitte à remplacer E par E' , on peut supposer E choisi de façon que $\alpha_n : E_n|_A \longrightarrow E_{n+1}|_A$ se prolonge en un homomorphisme surjectif $\tilde{\alpha}_n : E_n \longrightarrow E_{n+1}$ au-dessus de X .

La suite

$$0 \longrightarrow Z_n \longrightarrow E_n \xrightarrow{\tilde{\alpha}_n} E_{n+1} \longrightarrow 0$$

est exacte (Z_n désignant le noyau de $\tilde{\alpha}_n$), et elle se scinde au-dessus de X ; soit F_n un fibré supplémentaire de Z_n dans E_n ; alors E est égal à la somme des deux objets

$$(E_o , \dots , E_{n-1} , Z_n , 0 ; \alpha_o , \dots , \alpha_{n-1} , 0)$$

et

$$(0 , \dots , 0 , F_n , E_{n+1} ; 0 , \dots , 0 , \alpha_n) ,$$

ce qui démontre l'assertion. Le théorème 1 est donc prouvé.

3. Produits.

Admettons provisoirement le lemme suivant, qui sera démontré plus loin (§ 4) :

LEMME. - Soit $E = ((E_i) , (\alpha_i)) \in C_n(X , A)$. Le complexe acyclique

$$0 \longrightarrow E_o|_A \xrightarrow{\alpha_o} \dots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} E_n|_A \longrightarrow 0$$

se prolonge en un complexe (non nécessairement acyclique) au-dessus de X :

$$0 \longrightarrow E_o \xrightarrow{\tilde{\alpha}_o} \dots \xrightarrow{\tilde{\alpha}_{n-1}} E_n \longrightarrow 0$$

(on doit donc avoir $\tilde{\alpha}_{i+1} \circ \tilde{\alpha}_i = 0$ pour $0 \leqslant i \leqslant n - 2$). Deux tels prolongements sont homotopes, c'est-à-dire sont isomorphes aux restrictions à $X \times \{0\}$ et $X \times \{1\}$ d'un complexe au-dessus de $X \times I$, égal à $E|_A \times I$ au-dessus de $A \times I$ (I désigne toujours le segment $[0 , 1]$).

Ce lemme étant admis, donnons-nous des éléments $E \in C(X, A)$ et $F \in C(Y, B)$ (où Y est un espace compact, et B un sous-espace fermé). D'après le lemme, on peut supposer que E et F ont été prolongés en des complexes au-dessus de X et Y respectivement. Ces complexes étant acycliques sur A et B respectivement, le produit tensoriel externe $E \otimes F$ est un complexe acyclique au-dessus de

$$(A \times Y) \cup (X \times B) = C$$

(cela résulte du fait que, en chaque point $(x, y) \in X \times Y$, l'homologie du produit tensoriel de deux complexes d'espaces vectoriels est canoniquement isomorphe au produit tensoriel de leurs homologies). La restriction de ce complexe au-dessus de C définit donc un élément de $C(X \times Y, C)$ dont la classe d'homotopie, d'après le lemme, ne dépend pas des prolongements choisis. On définit ainsi par passage aux quotients, une application linéaire

$$L(X, A) \otimes L(X, B) \longrightarrow L(X \times Y, C) .$$

D'après le théorème 1, elle se traduit par une application linéaire

$$\varphi : K(X, A) \otimes K(Y, B) \longrightarrow K(X \times Y, C) .$$

PROPOSITION 2. - L'homomorphisme φ est naturel ; lorsque A et B sont vides, il coïncide avec la multiplication définie dans l'exposé 3 (§ 4).

C'est évident à partir des définitions.

Application. - Supposons donnés un élément de $K(X, A)$ et un élément de $K(Y, B)$, chacun d'eux étant défini par un représentant :

$$E = (E_0, E_1 ; \alpha) \in C_1(X, A) , \qquad F = (F_0, F_1 ; \beta) \in C_1(Y, B) .$$

Nous allons, au moyen de ce qui précède, exhiber un représentant de

$$\varphi(\chi([E]) \otimes \chi([F])) \quad \text{dans} \quad C_1(X \times Y, (A \times Y) \cup (X \times B)) .$$

Pour cela, prolongeons α et β en des morphismes (encore notés α et β) au-dessus de X et Y respectivement ; formons le produit tensoriel

$$E \otimes F \in C_2(X \times Y, (A \times Y) \cup (X \times B)) ,$$

défini par la suite

$$0 \longrightarrow E_0 \otimes F_0 \xrightarrow{(\alpha\otimes I)\oplus(I\otimes\beta)} (E_1 \otimes F_0) \oplus (E_0 \otimes F_1) \xrightarrow{((-I)\otimes\beta)\oplus(\alpha\otimes I)} E_1 \otimes F_1 \longrightarrow 0 ,$$

qui est exacte au-dessus de $(A \times Y) \cup (X \times B)$. Supposons que les fibrés soient munis de structures hermitiennes (dans le cas complexe), resp. euclidiennes (dans le cas réel). C'est toujours possible, puisque X et Y sont compacts. Posons

$$\gamma_0 = (\alpha \otimes I) \oplus (I \otimes \beta) , \qquad \gamma_1 = ((-I) \otimes \beta) \oplus (\alpha \otimes I) ,$$

$$G_0 = E_0 \otimes F_0 , \qquad G_1 = (E_1 \otimes F_0) \oplus (E_0 \otimes F_1) , \qquad G_2 = E_1 \otimes F_1 .$$

Plaçons-nous par exemple dans le cas complexe (hermitien). On a un scindage naturel de $E \otimes F$, à savoir

$$G_1 = \operatorname{Im} \gamma_0 + \operatorname{Ker} \gamma_1^* \qquad (\text{où } \gamma_1^* \text{ désigne l'adjoint de } \gamma_1).$$

Soit s un relèvement de γ_1 au-dessus de $(X \times B) \cup (A \times Y)$; l'objet

$$(G_0 \oplus G_2 , G_1 ; \gamma_0 \oplus s) \in C_1(X \times Y , (X \times B) \cup (A \times Y))$$

est un représentant de $\varphi([E] \otimes [F])$. Or l'objet

$$(G_0 \oplus G_2 , G_1 ; \gamma_0 \oplus \gamma_1^*)$$

est un représentant équivalent (et ne faisant pas intervenir s).
En effet, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
(G_0 \oplus G_2)|C \arrow[r, "\gamma_0+\gamma_1^*"] & G_1|C \\
(G_0 \oplus G_2)|C \arrow[r, "\gamma_0 \oplus s"] \arrow[u, "I \otimes I"] & G_1|C \arrow[u, "I \oplus (\gamma_1^* \circ \gamma_1)"']
\end{tikzcd} \qquad (\text{où } C = (X \times B) \cup (A \times Y))$$

Or $\gamma_1^* \circ \gamma_1$ est un opérateur hermitien positif, donc homotope à l'identité ; donc $I \oplus (\gamma_1^* \circ \gamma_1)$ se prolonge en un isomorphisme au-dessus de $X \times Y$ (exposé 3, lemme 3). Les deux objets considérés sont donc isomorphes. En résumé, on peut prendre pour représentant de $\varphi([E] \otimes [F])$ l'objet

$$((E_0 \otimes F_0) \oplus (E_1 \otimes F_1) , (E_1 \otimes F_0) \oplus (E_0 \otimes F_1) ; \gamma) ,$$

où γ est défini par la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha \otimes I & (-I) \otimes \beta^* \\ I \otimes \beta & \alpha^* \otimes I \end{pmatrix} .$$

4. Démonstration du lemme.

Soit $\widetilde{\alpha}_{n-1}$ un prolongement de α_{n-1} au-dessus de X ; $\widetilde{\alpha}_{n-1}$ est surjectif au-dessus d'un voisinage U_{n-1} de A . Posons

$$Z_{n-1} = \operatorname{Ker} \widetilde{\alpha}_{n-1}|U_{n-1} .$$

Z_{n-1} est un fibré au-dessus de U_{n-1} , et on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow Z_{n-1} \longrightarrow E_{n-1}|U_{n-1} \xrightarrow{\widetilde{\alpha}_{n-1}} E_n|U_{n-1} \longrightarrow 0 \ .$$

On construit par récurrence une suite décroissante de voisinages U_i de A , de fibrés Z_i au-dessus de U_i , et de prolongements $\widetilde{\alpha}_i$ de α_i au-dessus de U_i , de façon que les suites

$$0 \longrightarrow Z_i \longrightarrow E_i|U_i \xrightarrow{\widetilde{\alpha}_i} E_{i+1}|U_i \longrightarrow 0 \qquad (0 \leqslant i \leqslant n-1)$$

soient exactes. Il existe donc un voisinage V de A (par exemple U_o) tel que le complexe acyclique donné

$$0 \longrightarrow E_o|A \xrightarrow{\alpha_o} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} E_n|A \longrightarrow 0$$

se prolonge en un complexe acyclique au-dessus de V :

$$0 \longrightarrow E_o|V \xrightarrow{\widetilde{\alpha}_o} \cdots \xrightarrow{\widetilde{\alpha}_{n-1}} E_n|V \longrightarrow 0 \ .$$

Soit alors f une fonction continue sur X , à valeurs dans $[0 , 1]$, égale à 1 sur A , et à support dans V . Le complexe

$$0 \longrightarrow E_o \xrightarrow{f\widetilde{\alpha}_o} E_1 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{f\widetilde{\alpha}_{n-1}} E_n \longrightarrow 0$$

existe au-dessus de X et prolonge le complexe acyclique donné. Ceci démontre la première partie du lemme.

Notons p la projection $X \times I \longrightarrow X$, et posons $p^* E_i = F_i$. Supposons qu'on ait, au-dessus de la réunion

$$(X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \cup (A \times I) \ ,$$

un complexe

$$0 \longrightarrow F_o \xrightarrow{\beta_o} F_1 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\beta_{n-1}} F_n \longrightarrow 0 \ ,$$

dont la restriction à $A \times I$ soit acyclique, et tel que, pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$, $\beta_i(x , t)$ soit indépendant de t pour $x \in A$. Il s'agit de montrer l'existence d'un prolongement de ce complexe en un complexe au-dessus de $X \times I$. Prolongeons-le d'abord au-dessus de

$$(X \times [0 , 1/4]) \cup (X \times [3/4 , 1]) \cup (A \times I)$$

en posant

$$\begin{cases} \widetilde{\beta}_i(x , t) = \beta_i(x , 0) & \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant 1/4 \ , \\ \widetilde{\beta}_i(x , t) = \beta_i(x , 1) & \text{pour } 3/4 \leqslant t \leqslant 1 \ . \end{cases}$$

Il existe un voisinage U de A (qu'on peut supposer fermé) tel que ce complexe soit acyclique au-dessus de

$$(U \times [0\ ,\ 1/4]) \cup (U \times [3/4\ ,\ 1]) \cup (A \times I)\ ;$$

d'après la première partie de la démonstration, on peut donc le prolonger en un complexe au-dessus de $U \times I$. Soit alors f une fonction continue sur $X \times I$, à valeurs dans I, égale à 1 sur

$$(X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \cup (A \times I)\ ,$$

et à support dans

$$V = (X \times [0\ ,\ 1/4]) \cup (X \times [3/4\ ,\ 1]) \cup (U^{o} \times I)$$

(où U^{o} désigne l'intérieur de U). Le complexe défini au-dessus de $X \times I$ par

$$\begin{cases} \gamma_i(x\ ,\ t) = f\beta_i(x\ ,\ t) & \text{pour } (x\ ,\ t) \in V \\ \gamma_i(x\ ,\ t) = 0 & \text{pour } (x\ ,\ t) \notin V \end{cases}$$

prolonge (2), ce qui achève de prouver la deuxième partie du lemme.

5. Quelques remarques sur la structure multiplicative.

a. La multiplication définie au § 3 est associative ; cela résulte de l'associativité du produit tensoriel des complexes de fibrés.

b. Par l'application diagonale (dans le cas où $Y = X$, $B = A$), on obtient une multiplication interne

$$K(X\ ,\ A) \otimes K(X\ ,\ A) \longrightarrow K(X\ ,\ A)$$

qui fait de $K(X\ ,\ A)$ une algèbre associative et commutative (la commutativité résulte de l'isomorphisme canonique de $E \otimes_X F$ sur $F \otimes_X E$, lorsque E et F sont deux complexes).

c. De manière analogue, l'application diagonale induit une multiplication

$$K(X) \otimes K(X\ ,\ A) \longrightarrow K(X\ ,\ A)\ ,$$

qui fait de $K(X\ ,\ A)$ un module sur l'algèbre $K(X)$. On peut interpréter cette multiplication comme suit : si $\lambda \in K(X)$ est représenté par un fibré E de base X, et si $a \in K(X\ ,\ A)$ est représenté par un objet $((F_i)\ ;\ (\alpha_i)) \in C(X\ ,\ A)$, alors λa est représenté par l'objet $((E \otimes F_i)\ ;\ (I \otimes \alpha_i)) \in C(X\ ,\ A)$. On retrouve donc la multiplication définie déjà dans l'exposé 3.

d. Le produit externe

$$\varphi\ :\ K(X\ ,\ A) \otimes K(Y\ ,\ B) \longrightarrow K(X \times Y\ ,\ C)\ , \qquad \text{où } C = (X \times B) \cup (A \times Y)\ ,$$

est compatible avec les structures de modules de $K(X\ ,\ A)$ et $K(Y\ ,\ B)$ sur

$K(X)$ et $K(Y)$ respectivement ; autrement dit, on a la formule

$$\varphi((\lambda a) \otimes (\mu b)) = \lambda\mu\varphi(a \otimes b) ,$$

qui résulte facilement des remarques précédentes.

6. Propriété multiplicative du caractère de Chern.

PROPOSITION 3. - Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} K(X , A) \otimes K(Y , B) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "ch\otimes ch"] & K(X \times Y , C) \arrow[d, "ch"] \\ H(X , A) \otimes H(Y , B) \arrow[r, "\cup \text{ externe}"] & H(X \times Y , C) \end{tikzcd} ,$$

où C désigne $(X \times B) \cup (A \times Y)$, et $H(,)$ est une abréviation pour la cohomologie relative $H^{pair}((,) ; \underset{\sim}{Q})$ à coefficients rationnels.

(Cette propriété multiplicative avait été établie dans l'exposé 6 pour le cas où A est vide.)

Démonstration. - Grâce aux isomorphismes

$$K(X/A , a) \approx K(X , A) , \qquad K(Y/B , b) \approx K(Y , B) ,$$

il suffit de faire la démonstration dans le cas où A et B sont réduits à des points a et b (raisonner comme dans l'exposé 6).

Dans ce cas, $C = X \vee Y$.

On a le diagramme

$$\begin{tikzcd} K(X , a) \otimes K(Y , b) \arrow[r] \arrow[d, "ch\otimes ch"] & K(X \times Y , X \vee Y) \arrow[r] \arrow[d, "ch"] & K(X \times Y) \arrow[d, "ch"] \\ H(X , a) \otimes H(Y , b) \arrow[r] & H(X \times Y , X \vee Y) \arrow[r, "f^*"] & H(X \times Y) \end{tikzcd}$$

Le carré de droite est commutatif, à cause de la fonctorialité du caractère de Chern. Le grand carré est commutatif, à cause de la multiplicativité du caractère de Chern dans le cas absolu. De plus, f^* est injectif, à cause de la suite exacte de cohomologie

$$H^n(X \times Y) \xrightarrow{\alpha} H^n(X \vee Y) \longrightarrow H^{n+1}(X \times Y , X \vee Y) \xrightarrow{f^*} H^{n+1}(X \times Y) ,$$

et parce que α est surjective pour des raisons fonctorielles. L'injectivité de f^* entraîne alors la commutativité du carré de gauche, ce qui établit la proposition.

7. Remarques sur les classes de Chern et la cohomologie de Čech.

Pour tout espace topologique, notons $\Phi(X)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de fibrés vectoriels de base X (cf. exposé 3). Dans l'exposé 4, on a défini les classes de Chern comme morphismes du foncteur contravariant Φ dans le foncteur $H(\ ,\underset{\sim}{Z})$; ces deux foncteurs sont des foncteurs contravariants de la catégorie des espaces paracompacts dans la catégorie des ensembles. En fait, la théorie des classes de Chern d'un fibré vectoriel de base X se fait aussi bien dans le cas de la cohomologie de Čech que dans celui de la cohomologie singulière : la théorie axiomatique qu'on en a donnée vaut dans chacun de ces deux cas. Si on note c la classe totale de Chern à valeurs dans la cohomologie singulière, et $\check{c}$ la classe totale de Chern à valeurs dans la cohomologie de Čech, on a $c = f \circ \check{c}$, où f désigne le morphisme classique de la cohomologie de Čech dans la cohomologie singulière ; en effet, $f \circ \check{c}$ satisfait aux propriétés axiomatiques de la classe totale de Chern en cohomologie singulière.

Il résulte de là que la connaissance de $\check{c}$ détermine c , et par suite que les classes de Chern à valeurs dans la cohomologie de Čech sont plus intéressantes que celles à valeurs dans la cohomologie singulière. En fait, le théorème d'isomorphisme du caractère de Chern qu'on verra dans l'exposé suivant n'est valable qu'en cohomologie de Čech, si on désire qu'il soit vrai pour tous les espaces compacts.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ATIYAH (M. F.) and HIRZEBRUCH (F.). - Analytic cycles on complex manifolds, Topology, t. 1, 1962, p. 25-46.

[2] BOTT (R.), ATIYAH (M. F.) and SINGER (I.). - Harvard University, Topology seminar, Fall 1962. - Cambridge (Mass), Harvard University.

[3] DOUADY (A.). - Cycles analytiques, Séminaire Bourbaki, t. 14, 1961/62, n° 223, 22 p.