Laurent Schwartz

Opérateurs différentiels et espaces fibrés à fibre vectorielle

Séminaire Henri Cartan, tome 16, nº 1 (1963-1964), exp. nº 1, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1963-1964__16_1_A1_0>

Séminaire CARTAN-SCHWARTZ
16e année, 1963/64, n° 1

14 octobre 1963

OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS ET ESPACES FIBRÉS À FIBRE VECTORIELLE

par Laurent SCHWARTZ

(Rédigé par Jean HORVATH)

L'objet du séminaire de cette année est de démontrer une seule formule, due à ATIYAH et SINGER [1], exprimant l'indice d'un opérateur différentiel elliptique par une formule où intervient le produit d'un caractère de Chern et d'une classe de Todd. Pour faire cela, il faudra définir les expressions qui figurent dans les deux membres, et démontrer qu'elles sont égales. Nous commençons par le premier membre.

1. Opérateurs différentiels sur R^n.

On désignera par $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in N^n$ un multi-indice, et on posera

$$D^p = \left(\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{p_1}\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{p_2}\cdots\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{p_n} .$$

L'ordre du symbole D^p de dérivation partielle sera désigné par $|p| = p_1 + p_2 + \dots + p_n$. Alors un opérateur différentiel à coefficients constants sera une expression de la forme

$$P(D) = \sum_{|p|\leq m} a_p D^p ,$$

où les a_p sont des coefficients constants complexes. A cet opérateur différentiel, on associe le polynôme P, où

$$P(\xi) = \sum_{|p|\leq m} a_p \xi^p , \qquad \xi^p = \xi_1^{p_1}\xi_2^{p_2}\cdots\xi_n^{p_n} .$$

Entre l'opérateur $P(D)$ et le polynôme $P(\xi)$, on a d'ailleurs la relation

$$\mathfrak{F}(P(D)\delta) = P(\xi) ,$$

où δ est la mesure de Dirac et $\mathfrak{F}$ désigne la transformation de Fourier qui, pour une fonction f, est donnée par

$$(\mathfrak{F}f)(\xi) = \int f(x)\exp(-2\pi i\langle x, \xi\rangle)\,dx , \qquad \langle x, \xi\rangle = x_1\xi_1 + \dots + x_n\xi_n .$$

Il est clair que les opérateurs différentiels à coefficients constants sur $\underset{\sim}{R}^n$ forment une algèbre isomorphe à l'algèbre (multiplicative) des polynômes en ξ .

Un opérateur différentiel à coefficients dans C^∞ est une expression de la forme $\sum a_p(x)\ D^p$, c'est-à-dire une application $\varphi \rightsquigarrow \sum a_p(x)\ D^p\ \varphi$, où les coefficients $a_p(x)$ sont des fonctions de classe C^∞ . A un tel opérateur on associe l'expression $\sum a_p(x)\ \xi^p$, c'est-à-dire une fonction de la variable $(x\ ,\ \xi) \in \underset{\sim}{R}^n \times \underset{\sim}{R}^n$, qui, pour tout x fixe, est un polynôme en ξ . On n'exige pas que la somme soit finie, mais seulement qu'elle soit localement finie, c'est-à-dire que $\sum a_p(x)\ \xi^p$ soit un polynôme d'ordre borné lorsque x varie dans un compact. Les opérateurs différentiels forment une algèbre non commutative ; il est facile de vérifier cependant que le crochet d'un opérateur d'ordre m et d'un opérateur d'ordre m' est un opérateur d'ordre au plus égal à $m + m' - 1$.

Si X est un espace vectoriel (ou un espace affine) de dimension n , sans base et sans origine données, on peut tout de même parler d'un opérateur différentiel à coefficients dans C^∞ . En effet, un tel opérateur différentiel sera une opération (linéaire continue) définie sur l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur X , qui, par rapport à une base, s'écrit de la façon antérieure. Si l'on désigne par Ξ le dual de l'espace vectoriel associé à X alors, à un tel opérateur, correspond une fonction sur $X \times \Xi$, qui, pour tout $x \in X$ est un polynôme en $\xi \in \Xi$ d'ordre borné lorsque x décrit un compact de X . La définition de cette fonction se fait comme précédemment à partir d'une base ; mais elle est indépendante de la base. On peut donner une définition intrinsèque de cette fonction. En effet si P est l'opérateur différentiel, a un élément fixe de X , $x - a$ est un vecteur de l'espace vectoriel associé à X ; si $\xi \in \Xi$, $x \rightsquigarrow \exp(2i\pi\langle\xi\ ,\ x - a\rangle)$ est une fonction C^∞ sur X , et on a

$$P(\exp(2\pi i\langle\xi\ ,\ x - a\rangle)) = P(x\ ,\ \xi)\ \exp(2\pi i\langle\xi\ ,\ x - a\rangle) \quad .$$

Cette formule définit donc une bijection linéaire entre les opérateurs différentiels P et les fonctions $(x\ ,\ \xi) \rightsquigarrow P(x\ ,\ \xi)$ qui, pour tout x , sont des polynômes en ξ d'ordre borné quand x décrit un compact de X . Cette bijection n'est pas un isomorphisme d'algèbre (l'algèbre des opérateurs différentiels n'est pas commutative!). Sur une variété différentiable cette correspondance ne subsistera plus.

Soit P un opérateur différentiel d'ordre $\leq m$. On peut donner une définition de la partie principale

$$P_m(x\ ,\ D) = \sum_{|p|=m} a_p(x)\ \ D^p$$

de P, invariante par difféomorphisme. En effet, soit $\varphi \in \mathcal{E}$ une fonction indéfiniment dérivable telle que $\varphi(x_0) = 0$, et posons $d\varphi(x_0) = \xi \in \Xi$. Alors un calcul facile montre que $P(\exp 2\pi i t\varphi)(x_0)$ est un polynôme de degré $\leq m$ par rapport à t et que le coefficient de t^m dans ce polynôme est précisément $P_m(x_0, \xi)$.

Jusqu'à maintenant nous avons considéré des opérateurs différentiels scalaires mais il faut aussi introduire des opérateurs différentiels vectoriels. Si E est un espace vectoriel de dimension finie sur $\underset{\sim}{C}$, on désignera par $\mathcal{E}(X, E)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur l'espace affine X à valeurs dans E. Soient donc F et G deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\underset{\sim}{C}$, alors un opérateur différentiel est une application de $\mathcal{E}(X, F)$ dans $\mathcal{E}(X, G)$ de la forme $P = \sum a_p(x) D^p$, où pour tout x l'expression $a_p(x)$ désigne une application linéaire de F dans G, c'est-à-dire $a_p(x) \in \mathcal{L}(F, G)$. On supposera que la fonction $a_p : x \rightsquigarrow a_p(x)$ est indéfiniment dérivable, c'est-à-dire que $a_p \in \mathcal{E}(X, \mathcal{L}(F, G))$. A l'opérateur P on associe l'expression $\sum a_p(x)\, \xi^p$, c'est-à-dire une fonction définie sur $X \times \Xi$, à valeurs dans $\mathcal{L}(F, G)$ et qui, pour tout x, est un polynôme en ξ, d'ordre borné quand x décrit un compact de X.

Pour les opérateurs différentiels vectoriels les deux formules trouvées plus haut se modifient de la façon suivante : soit $\vec{f}$ un vecteur de F, alors

$$P(\exp(2\pi i\langle \xi , x - a\rangle).\vec{f}) = P(x , \xi)\vec{f}.\exp(2\pi i\langle \xi , x - a\rangle) \in G$$

et de plus $P(\exp(2\pi i t\varphi)\vec{f})(x_0)$ est un polynôme de degré m par rapport à t tel que le coefficient de t^m est $P_m(x_0, \xi)\vec{f} \in G$.

On sait que l'espace $\mathcal{E}(X, E)$ s'identifie au produit tensoriel $\mathcal{E}(X) \otimes E$. Alors un opérateur $P = \sum a_p(x) D^p$ est une application linéaire de $\mathcal{E}(X) \otimes F$ dans $\mathcal{E}(X) \otimes G$, où d'ailleurs $a_p \in \mathcal{E}(X, \mathcal{L}(F, G) = \mathcal{E}(X) \otimes F' \otimes G$.

On peut maintenant caractériser un opérateur différentiel comme une application linéaire $\mathcal{E}(X) \otimes F \to \mathcal{E}(X) \otimes G$ qui est un opérateur local, c'est-à-dire une application $f \rightsquigarrow g$ telle que la connaissance de f au-dessus d'un ouvert Ω de X entraîne la connaissance de g au-dessus de Ω. Autrement dit, si f est nul sur Ω alors Pf est nul sur Ω. Il est évident qu'un opérateur différentiel possède cette propriété. Pour démontrer la réciproque, il suffit de considérer le cas d'un opérateur scalaire. Soit donc P un opérateur de caractère local de $\mathcal{E}(X)$ dans $\mathcal{E}(X)$. Soit a un élément de X, alors l'application $f \rightsquigarrow (Pf)(a)$ qui, à tout $f \in \mathcal{E}(X)$, fait correspondre la valeur de Pf en a

est une forme linéaire continue sur $\mathcal{E}(X)$, c'est-à-dire une distribution. Il résulte de l'hypothèse que le support de cette distribution est $\{a\}$, par conséquent elle est une combinaison linéaire de dérivées de la mesure de Dirac au point a , c'est-à-dire qu'on a

$$(Pf)(a) = \langle \sum (-1)^{|p|} c_p(a)\, D^p \delta_a , f \rangle . \quad ({}^1)$$

Quand a varie dans X , on a une fonction C^∞ de a et en particulier la distribution qui figure au second membre reste bornée dans $\mathcal{D}'$ quand a parcourt un compact de X . D'après un théorème connu sur les distributions (2), on voit que tout ensemble borné de $\mathcal{E}(X)$ a un ordre borné. On a donc

$$(Pf)(a) = \sum c_p(a)\,(D^p f)(a) \qquad ,$$

où l'ordre de l'opérateur différentiel est borné sur tout compact. Finalement, en utilisant les fonctions $f(x) = (x-a)^p/p!$, on voit que $c_p(a)$ est fonction C^∞ de a .

2. Espaces fibrés à fibre vectorielle.

On définit d'abord un espace fibré ensembliste de classe C^r à fibre vectorielle de dimension finie (un "faux" fibré vectoriel). Remarquons que pour $r = 0$ on entendra par variété de classe C^r un espace topologique quelconque, non nécessairement une variété topologique.

Un espace fibré ensembliste de classe C^r à fibre vectorielle est défini par la donnée d'un ensemble E , d'une variété X de classe C^r et d'une application surjective $\pi : E \to X$, tels que pour tout $x \in X$ l'ensemble $E_x = \pi^{-1}(x)$ soit muni d'une structure d'espace vectoriel de dimension finie sur $\underset{\sim}{C}$. On n'exige pas que la dimension de E_x soit la même pour tout x . On pourrait aussi considérer le cas où les E_x sont des espaces vectoriels sur $\underset{\sim}{R}$, mais ce cas se réduit au précédent en complexifiant les espaces vectoriels.

Soient (E , X , π) et (F , Y , π) deux espaces fibrés ensemblistes de classe C^r à fibre vectorielle. On dit qu'une application H de E dans F est un morphisme d'espaces fibrés s'il existe une application $h : X \to Y$ de classe C^r telle que le diagramme

---

(1) Voir [4], chap. III, théorème XXXV.

(2) Voir [4], chap. III, théorème XXII.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{H} & F \\ \downarrow{\scriptstyle\pi} & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ X & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

soit commutatif, et si, pour tout $x \in X$, H est linéaire de E_x dans F_x . L'application h est déterminée d'une façon unique par H et s'appelle l'application induite par H .

Si U est un ouvert de la base X du fibré (E , X , π) , on a une structure de fibré ensembliste triviale sur le produit $U \times \underset{\sim}{C}^n$. Une carte de (E , X , π) est alors un isomorphisme de l'espace fibré $\pi^{-1}(U)$ sur un fibré trivial $U \times \underset{\sim}{C}^n$, qui induit sur U l'application identique. Pour définir quand deux cartes de (E , X , π) sont compatibles, on peut, d'après la définition d'une variété différentiable, supposer qu'elles sont définies au-dessus du même ouvert U de X . Alors étant données deux cartes

$$\begin{array}{ccccc} U \times \underset{\sim}{C}^n & \longleftarrow & \pi^{-1}(U) & \longrightarrow & U \times \underset{\sim}{C}^n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U & \xleftarrow{I_u} & U & \xrightarrow{I_u} & U \end{array}$$

on dit qu'elles sont compatibles si la bijection de $U \times \underset{\sim}{C}^n$ sur lui-même déduite des flèches de la première ligne est une application de classe C^r ($U \times \underset{\sim}{C}^n$ étant muni de sa structure de variété produit de classe C^r).

Un vrai espace fibré de classe C^r à fibre vectorielle est alors un fibré ensembliste muni d'un atlas, c'est-à-dire d'une collection de cartes compatibles deux à deux, telles que les ouverts au-dessus desquels elles sont définies forment un recouvrement de X . On peut, bien entendu, demander que l'atlas soit complet, c'est-à-dire qu'il contienne toute carte compatible avec les cartes de l'atlas, mais on sait que, s'il ne l'est pas, on peut toujours le compléter.

En particulier un vrai espace fibré est muni d'une structure de variété différentiable de classe C^r et la surjection $\pi : E \to X$ est de classe C^r . On aurait pu définir directement les vrais espaces fibrés de classe C^r en exigeant que E soit une variété de classe C^r et π de classe C^r , et qu'il existe un C^r-atlas. Cependant les fibrés vectoriels qu'on rencontre dans la nature, par exemple l'espace fibré des vecteurs tangents $T(X)$ d'une variété différentiable

X , ne sont pas munis a priori d'une structure de variété différentiable.

Un morphisme H est un morphisme de vrais fibrés s'il est une application de classe C^r de E dans F. On dit qu'un morphisme H est un homomorphisme strict si sa restriction à toute fibre E_x est une bijection linéaire sur la fibre $F_{h(x)}$. Si le morphisme H induit l'application $h : X \to Y$ on dit aussi que H est un h-morphisme.

Définissons maintenant l'image réciproque de l'espace fibré de classe C^r à fibre vectorielle (F , Y , π) par rapport à l'application h de classe C^r d'une variété X de classe C^r dans Y. L'espace E sera l'ensemble des points (x , f) de $X \times F$ tels que $h(x) = \pi(f)$. La projection $\pi : E \to X$ est définie par $(x , f) \rightsquigarrow x$. On a aussi une application H de E dans F définie par $(x , f) \rightsquigarrow f$ qui est compatible avec h car

$$\pi(H(x , f)) = \pi(f) = h(x) = h(\pi(x , f)) \qquad ,$$

d'après la définition de E.

On remarque que la restriction de H à E_x est bijective, et on transporte la structure d'espace vectoriel de $F_{h(x)}$ sur E_x. On définit facilement un atlas sur E qui devient alors un fibré de classe C^r à fibre vectorielle appelé l'image réciproque de F par rapport à h, et noté par $h^*(F)$. H est alors un homomorphisme strict de $h^*(F)$ dans F.

Le fibré $h^*(F)$ et l'homomorphisme strict $H : h^*(F) \to F$ résolvent un problème universel. En effet, soit H_1 un morphisme d'un fibré à fibre vectorielle E_1 avec base X dans F qui induise $h : X \to Y$. Alors il existe un morphisme unique $H_2 : E_1 \to h^*(F)$ qui, sur X, induit l'application identique, tel que H_1 se factorise en $H_1 = H \circ H_2$:

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[r, "H_2"] \arrow[d] & h^*(F) \arrow[r, "H"] \arrow[d] & F \arrow[d, "\pi"] \\
X \arrow[r, "I_x"] & X \arrow[r, "h"] & Y
\end{tikzcd} \quad .$$

Etant donnés deux espaces fibrés E et F de classe C^r, à fibre vectorielle au-dessus de la même base X, on peut définir leur somme directe (ou somme de Whitney) $E \oplus_X F$ qui sera un fibré de classe C^r à fibre vectorielle, ayant X pour base et dont la fibre en un point $x \in X$ sera la somme directe $E_x \oplus F_x$ des fibres E_x et F_x. De même on peut définir le produit tensoriel $E \otimes_X F$ qui sera encore un fibré à fibre vectorielle ayant X pour base et dont la fibre en x est le produit tensoriel $E_x \otimes F_x$ des fibres E_x et F_x.

Si maintenant (E, X, π) et (F, Y, π) sont deux espaces fibrés à fibre vectorielle, on peut définir leur somme directe $E \oplus F$ qui sera un espace fibré à fibre vectorielle, dont la base est la variété produit $X \times Y$ et dont la fibre au-dessus du point $(x, y) \in X \times Y$ est la somme directe $E_x \oplus F_y$ des fibres E_x et F_y. De même on peut définir le produit tensoriel $E \otimes F$ qui sera encore un fibré à fibre vectorielle et dont la fibre en (x, y) est le produit tensoriel $E_x \otimes F_y$ des fibres E_x et F_y.

On définit aussi le dual E^* de l'espace fibré à fibre vectorielle (E, X, π). C'est un fibré ayant X pour base et dont la fibre au-dessus du point $x \in X$ est le dual E_x^* de la fibre E_x de E. Ainsi le dual de l'espace fibré $T(X)$ des vecteurs tangents de la variété X est l'espace fibré $T^*(X)$ des covecteurs tangents de X. On définit classiquement les puissances extérieures $\overset{p}{\Lambda}\, T^*(X)$ de $T^*(X)$. Les sections de $\overset{p}{\Lambda}\, T^*(X)$ sont les formes différentielles extérieures de degré p sur X.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ATIYAH (M. F.) and SINGER (I. M.). - The index of elliptic operators on compact manifolds, Bull. Amer. math. Soc., t. 69, 1963, p. 422-433.

[2] MALGRANGE (Bernard). - Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 6, 1955-1956, p. 271-354

[Voir surtout : Chap. III, § 1].

[3] SCHWARTZ (Laurent). - Ecuaciones diferenciales parciales elipticas. - Bogota, Universidad nacional de Colombia, 1956 (multigraphié).

[Voir surtout le paragraphe 4]

[4] SCHWARTZ (Laurent). - Théorie des distributions. Tome 1, 2e éd. - Paris, Hermann, 1957 (Act. scient. et ind., 1091 = 1245 ; Publ. Inst. Math. Strasbourg, 9).

[5] STEENROD (N.). - The topology of fibre bundles. - Princeton, Princeton University Press, 1951 (Princeton mathematical Series, 14).