SÉMINAIRE HENRI CARTAN

MOHAMED SALAH BAOUENDI

Les opérateurs de Calderon-Zygmund sur un espace vectoriel réel de dimension finie

Séminaire Henri Cartan, tome 16, nº 1 (1963-1964), exp. nº 9, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1963-1964__16_1_A9_0>

Séminaire CARTAN-SCHWARTZ
16e année, 1963/64, n° 9

16 décembre 1963
et 6 janvier 1964

LES OPÉRATEURS DE CALDERON-ZYGMUND SUR UN ESPACE VECTORIEL RÉEL DE DIMENSION FINIE

par Mohamed Salah BAOUENDI

X étant un espace vectoriel réel de dimension finie, et Ξ son dual, désignons par Σ le complémentaire de 0 dans Ξ, et par $\mathcal{E}(\Sigma\ ;\ \rho)$ l'espace des fonctions définies sur $\Xi - \{0\}$, C^∞ et homogènes de degré ρ (ρ nombre réel quelconque).

On note $\mathcal{L}(H^s(X))$ l'espace des opérateurs de $H^s(X)$, et $\mathcal{L}(H^s(X)\ ,\ H^t(X))$ celui des opérateurs de $H^s(X)$ dans $H^t(X)$.

On appelle <u>opérateur ρ-améliorant</u>, tout opérateur très régulier appartenant à $\mathcal{L}(H^s\ ,\ H^{s-\rho+1})$ pour tout nombre réel s. On note $\mathfrak{A}(X\ ;\ \rho)$ l'espace des opérateurs ρ-améliorants sur X.

Les autres notations sont celles des exposés précédents.

1. Les opérateurs de Calderon-Zygmund d'ordre 0.

Pour tout couple de fonctions $(\alpha\ ,\ \beta) \in \mathcal{S}(X) \times \mathcal{E}(\Sigma\ ;\ 0)$, considérons l'opérateur très régulier $(\alpha)(\beta)$ (composé des opérateurs (α) et (β)), qui opère dans $H^s(X)$ pour tout nombre réel s.

En munissant $\bigcap_{s\in\mathbb{R}} \mathcal{L}(H^s)$ de la topologie limite projective des $\mathcal{L}(H^s)$, nous obtenons une application bilinéaire et continue :

$$\mathcal{S}(X) \times \mathcal{E}(\Sigma\ ;\ 0) \to \bigcap_s \mathcal{L}(H^s)$$

$$(\alpha\ ,\ \beta) \rightsquigarrow (\alpha)(\beta)$$

($\mathcal{S}(X)$ et $\mathcal{E}(\Sigma\ ;\ 0)$ étant des espaces de Fréchet, il suffit de vérifier la continuité séparée, qui est immédiate).

Comme $\bigcap_s \mathcal{L}(H^s)$ est complet, cette application passe au produit tensoriel complété $\mathcal{S}(X)\ \hat{\otimes}_\pi\ \mathcal{E}(\Sigma\ ;\ 0)$. Mais, puisque $\mathcal{S}(X)$ est nucléaire, l'espace $\mathcal{S}(X)\ \hat{\otimes}_\pi\ \mathcal{E}(\Sigma\ ;\ \rho)$ coïncide avec

$$\mathcal{S}(X)\ \hat{\otimes}_\varepsilon\ \mathcal{E}(\Sigma\ ;\ \rho) = \mathcal{S}(X \times \Sigma\ ;\ \rho)$$

(espace des fonctions définies sur $X \times (\Xi - \{0\})$, C^∞ homogènes de degré ρ par rapport à la deuxième variable, et dont toute dérivée $D_x^p D_\xi^q$ multipliée par tout polynôme en x et par $|\xi|^{-\rho+|q|}$ est bornée).

Appelons θ cette nouvelle application :

$$\theta : \mathcal{S}(X \times \Sigma \; ; \; 0) \to \bigcap_s \mathcal{L}(H^s) \; .$$

PROPOSITION 1. - <u>Pour tout</u> $f \in \mathcal{S}(X \times \Sigma \; ; \; 0)$, <u>l'opérateur</u> $\theta(f)$ <u>est très régulier</u>.

Il est évident que tout élément de $\bigcap_s \mathcal{L}(H^s)$ opère continûment de $\mathcal{D}(X)$ dans $\mathcal{E}(X)$, et de $\mathcal{E}'(X)$ dans $\mathcal{D}'(X)$, puisque

$$\mathcal{D} \subset \bigcap_s H^s \subset \mathcal{E} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}' \subset \bigcup_s H^s \subset \mathcal{D}' \; .$$

Démontrons que, pour tout $S \in \mathcal{E}'(X)$,

$$\text{supp sing } \theta(f)S \subset \text{supp sing } S \; .$$

Soit Ω un ouvert tel que $S|\Omega \in \mathcal{E}(\Omega)$. Considérons l'application bilinéaire et continue :

$$\mathcal{S}(X) \times \mathcal{E}(\Sigma \; ; \; 0) \to \mathcal{E}(\Omega)$$
$$(\alpha \; , \; \beta) \rightsquigarrow (\alpha)(\beta)S|\Omega$$

($(\alpha)(\beta)$ est très régulier ; la continuité résulte encore de la continuité séparée immédiate, par le graphe fermé).

Par passage au produit tensoriel complété, on définit une application continue Φ_1

$$\Phi_1 : \mathcal{S}(X \times \Sigma \; ; \; 0) \to \mathcal{E}(\Omega) \; .$$

D'autre part, on a l'application continue :

$$\Phi_2 : \mathcal{S}(X \times \Sigma \; ; \; 0) \to \mathcal{D}'(\Omega)$$
$$f \rightsquigarrow \theta(f)S|\Omega \; .$$

Φ_1 et Φ_2 coincident sur le sous-espace dense $\mathcal{S}(X) \otimes \mathcal{E}(\Sigma \; ; \; 0)$ et par suite :

$$\forall \quad f \in \mathcal{S}(X \times \Sigma \; ; \; 0) \; , \quad \theta(f)S|\Omega \in \mathcal{E}(\Omega)$$

C. Q. F. D.

DÉFINITION. - <u>On appelle opérateur de Calderon-Zygmund d'ordre</u> 0 <u>sur</u> X , <u>les éléments de l'algèbre</u> $\Gamma(X \; ; \; 0)$, <u>engendré algébriquement</u> (sans passer à l'adhérence topologique), <u>dans l'algèbre</u> $\bigcap_s \mathcal{L}(H^s)$, <u>par l'image de</u> θ <u>et les opérateurs 0-améliorants</u>.

Il est évident que les opérateurs 0-améliorants forment un idéal de $\Gamma(X ; 0)$. Désignons par p l'application canonique :

$$p : \Gamma(X ; 0) \to \Gamma(X ; 0)/\mathfrak{A}(X ; 0) .$$

On a :

THÉORÈME 1. - <u>L'application</u> $p \circ \theta$ <u>est un isomorphisme d'algèbres entre</u> $\mathcal{S}(X \times \Sigma ; 0)$ <u>et</u> $\Gamma(X ; 0)/\mathfrak{A}(X ; 0)$.

Ce théorème résultera des deux propositions qui suivent :

PROPOSITION 2. - <u>Soient</u> f <u>et</u> g <u>deux fonctions appartenant à</u> $\mathcal{S}(X \times \Sigma ; 0)$, <u>alors</u> $\theta(fg) - \theta(f)\ \theta(g)$ <u>est un opérateur 0-améliorant</u> .

Il est évident que $\theta(fg) - \theta(f)\ \theta(g)$ est très régulier. Démontrons qu'il opère de H^s dans H^{s+1} pour tout nombre réel s . Munissons $\bigcap_s \mathcal{L}(H^s , H^{s+1})$ de la topologie limite projective des $\mathcal{L}(H^s , H^{s+1})$, et considérons l'application multilinéaire et continue :

$$(\mathcal{S}(X) \times \mathcal{E}(\Sigma ; 0))^2 \to \bigcap_s \mathcal{L}(H^s , H^{s+1})$$

$$(\alpha_1 , \beta_1 , \alpha_2 , \beta_2) \rightsquigarrow (\alpha_1)(\alpha_2)(\beta_1)(\beta_2) - (\alpha_1)(\beta_1)(\alpha_2)(\beta_2) .$$

En effet, le dernier opérateur vaut

$$(\alpha_1)[(\alpha_2) , (\beta_1)](\beta_2) ,$$

et $[(\alpha_2)(\beta_1)]$ opère de H^s dans H^{s+1} (voir le lemme de commutation de l'exposé précédent).

Un raisonnement analogue à celui de la proposition 1 montre qu'on a l'application continue :

$$\mathcal{S}(X \times \Sigma ; 0)^2 \to \bigcap_s \mathcal{L}(H^s , H^{s+1})$$

$$(f , g) \rightsquigarrow \theta(fg) - \theta(f)\ \theta(g)$$

en particulier

$$\theta(fg) - \theta(f)\ \theta(g) \in \bigcap_s \mathcal{L}(H^s , H^{s+1})$$

C. Q. F. D.

Cette proposition montre que $p \circ \theta$ est un épimorphisme d'algèbres. La proposition suivante montre son injectivité.

PROPOSITION 3. - <u>Soit</u> $f \in \mathcal{S}(X \times \Sigma ; 0)$ <u>tel que</u> $\theta(f)$ <u>soit améliorant, alors</u> f <u>est nulle</u>. Démontrons d'abord le lemme suivant :

LEMME. - <u>Pour tout couple</u> $(a , b) \in X \times \Sigma$, <u>il existe une suite de fonctions</u> $\varphi_j \in H^0(X)$ <u>telles que</u> :

(i) $\forall\ j$, $\|\varphi_j\|_0 = 1$,

(ii) φ_j <u>convergent faiblement vers</u> 0 <u>dans</u> H^0 <u>quand</u> $j \to \infty$,

(iii) $\forall\ \alpha \in \mathcal{S}(X)$, $\forall\ \beta \in \mathcal{E}(\Sigma ; 0)$,

$$(\alpha)\varphi_j - \alpha(a)\varphi_j \quad \text{et} \quad (\beta)\varphi_j - \beta(b)\varphi_j$$

<u>convergent fortement vers</u> 0 <u>dans</u> H^0 <u>quand</u> $j \to \infty$.

<u>Démonstration du lemme</u>. - Soit $\psi \in \mathcal{D}(X)$ et vérifiant $\|\psi\|_0 = 1$. Le couple $(a , b) \in X \times \Sigma$ étant donné, posons, pour $j \in \underset{\sim}{N}$,

$$\varphi_j(x) = j^{n/2}\ e^{2i\pi j^2\langle x,b\rangle}\ \psi(j(x - a)) \qquad (n = \dim X) .$$

Vérifions que les φ_j vérifient les conditions (i), (ii) et (iii).

(i) et (ii) sont triviales. (Les supports des φ_j se concentrent autour de a .)

Supposons $a = 0$ (origine de X).

Désignons par $\hat{\varphi}_j$ et $\hat{\psi}$ les transformées de Fourier de φ_j et ψ . On a :

$$\hat{\varphi}_j(\xi) = \int j^{n/2}\ e^{-2i\pi\langle x,\xi-bj^2\rangle}\ \psi(jx)\ dx .$$

Soit

$$\hat{\varphi}_j(\xi) = j^{-n/2}\ \hat{\psi}\Big(\frac{\xi - bj^2}{j}\Big) .$$

Remarquons que la boule $\left|\frac{\xi - bj^2}{j}\right| \leq R$ reste dans un cône contenant b , dont "l'angle au sommet" tend vers 0 quand $j \to +\infty$.

En utilisant l'homogénéité de β et l'inégalité de Schwarz, on vérifie facilement (iii).

C. Q. F. D.

<u>Démonstration de la proposition</u> 3. - Soit $f \in \mathcal{S}(X \times \Sigma ; 0)$ telle que $\theta(f) \in \mathcal{A}(X ; 0)$. Supposons que f ne soit pas identiquement nulle. Il existerait alors un couple de points $(a , b) \in X \times \Sigma$ tel que $f(a , b) \neq 0$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(X)$, telle que $\varphi(a) = 1$.

Considérons alors les fonctions φ_j relatives aux points (a , b) , données par le lemme précédent, et les applications équicontinues ((ii) du lemme) :

$$\mathcal{S}(X)\times\Sigma\ ;\ 0) \to H^0(X)$$

$$g \rightsquigarrow (\varphi)\ \theta(g)\varphi_j - g(a\ ,\ b)\varphi_j\ .$$

La condition (iii) du lemme montre que cette suite d'applications converge vers 0 sur un sous-espace dense de $\mathcal{S}(X \times \Sigma\ ;\ 0)$, soit $\mathcal{S}(X) \otimes \mathcal{E}(\Sigma\ ;\ 0)$.

Elle converge donc vers 0 partout. Mais $(\varphi)\ \theta(f)\varphi_j$ restent bornées dans $H^1(X)$ quand j varie, puisque $\theta(f)$ est améliorant. Comme φ est à support compact, $(\varphi)\ \theta(f)\varphi_j$ est relativement compact dans H^0 (lemme de Rellich). Il s'en suit, ((ii) du lemme précédent) que $(\varphi)\ \theta(f)\varphi_j$ convergent fortement vers 0 dans H^0 . Par conséquent, $f(a\ ,\ b)\varphi_j$ convergent aussi fortement vers 0 dans H^0 ; comme

$$\|f(a\ ,\ b)\varphi_j\|_0 = |f(a\ ,\ b)|\ \|\varphi_j\|_0 = |f(a\ ,\ b)|$$

on obtient une contradiction.

f est donc identiquement **nulle**.

C. Q. F. D.

Le théorème 1 se trouve, ainsi, entièrement démontré.

DÉFINITION. - On appelle 0-symbole l'application $\sigma_0 = (p \circ \theta)^{-1} \circ p$

$$\sigma_0\ :\ \Gamma(X\ ;\ 0) \to \mathcal{S}(X \times \Sigma\ ;\ 0)$$

Si $A \in \Gamma(X\ ;\ 0)$, $\sigma_0(A)$ est le 0-symbole de A .

On déduit du théorème 1 que σ_0 est surjective et de noyau $\mathcal{A}(X\ ;\ 0)$.

2. Les opérateurs de Calderon-Zygmund d'ordre quelconque.

Soit ρ un nombre réel quelconque.

Nous allons définir, dans ce paragraphe le sous-espace vectoriel de $\bigcap_s \mathcal{L}(H^s\ ,\ H^{s-\rho})$ des opérateurs de Calderon-Zygmund d'ordre ρ , et montrer leurs propriétés.

Remarquons d'abord que si $|\xi|^2$ désigne une forme quadratique sur Ξ , on a :

$$\mathcal{A}(X\ ;\ \rho) = \mathcal{A}(X\ ;\ 0)((1 + |\xi|^2)^{\rho/2})\ .$$

Montrons que le sous-espace vectoriel de $\bigcap_s \mathcal{L}(H^s\ ,\ H^{s-\rho})$ suivant :

$$\Gamma(X\ ;\ 0)((1 + |\xi|^2)^{\rho/2})$$

est indépendant de la forme quadratique choisie sur Ξ . Cela résultera de la proposition suivante :

PROPOSITION 4. - <u>Soient</u> $|\xi|_1^2$ <u>et</u> $|\xi|_2^2$ <u>deux formes quadratiques sur</u> Ξ , <u>et</u> A <u>un opérateur de Calderon-Zygmund d'ordre</u> 0 , <u>alors</u> :

$$A((1 + |\xi|_1^2)^{\rho/2}) - A\left(\frac{|\xi|_1}{|\xi|_2}\right)^\rho ((1 + |\xi|_2^2)^{\rho/2}) \in \mathfrak{a}(X ; \rho) .$$

Il suffit de vérifier que

$$\left(\frac{(1 + |\xi|_1^2)^{\rho/2}}{(1 + |\xi|_2^2)^{\rho/2}} - \left(\frac{|\xi|_1}{|\xi|_2}\right)^\rho\right) \in \mathfrak{a}(X ; 0) .$$

Or un développement en $\frac{1}{|\xi|_1}$, par exemple, montre que la fonction entre parenthèses est $O(\frac{1}{|\xi|_1})$ quand $|\xi|_1 \to +\infty$.

C. Q. F. D.

DÉFINITION. - <u>On appelle opérateurs de Calderon-Zygmund d'ordre</u> ρ <u>les éléments</u> de

$$\Gamma(X , \rho) = \Gamma(X , 0)((1 + |\xi|^2)^{\rho/2})$$

$|\xi|^2$ étant une forme quadratique quelconque sur Ξ .

Posons $\mathcal{S}(X \times \Sigma ; \rho) = \mathcal{S}(X) \hat{\otimes} \mathcal{E}(\Sigma ; \rho)$. Si $A \in \Gamma(X ; 0)$, alors

$$\sigma_0(A) \ |\xi|^\rho \in \mathcal{S}(X \times \Sigma ; \rho) .$$

Définissons l'application suivante :

$$\Gamma(X ; \rho) \to \mathcal{S}(X \times \Sigma ; \rho)$$
$$A((1 + |\xi|^2)^{\rho/2}) \rightsquigarrow \sigma_0(A) \ |\xi|^\rho .$$

La proposition 4 montre qu'elle est indépendante de la forme quadratique $|\xi|^2$ choisie sur Ξ .

On note σ_ρ cette application, et on l'appelle le ρ-<u>symbole</u> .

THÉORÈME 2. - <u>Le</u> ρ-<u>symbole</u> , σ_ρ , <u>est une application linéaire surjective et de noyau</u> $\mathfrak{a}(X , \rho)$.

Ce théorème résulte trivialement du théorème 1.

Donnons maintenant quelques propriétés des opérateurs que nous venons de construire.

PROPOSITION 5. - <u>Soient</u> ρ <u>un nombre réel positif ou nul, et</u>

$$(\alpha , \beta) \in \mathcal{S}(X) \times \mathcal{E}(\Sigma ; \rho) ,$$

<u>alors</u> $(\alpha)(\beta)$ <u>est un opérateur de Calderon-Zygmund et son symbole d'ordre</u> ρ <u>est</u>

<u>la fonction</u> $\alpha\beta$.

Il suffit de montrer que

$$(\alpha)(\beta) - (\alpha)\left(\frac{\beta}{|\xi|^{\rho}}\right)(1 + |\xi|^2)^{\rho/2} \in \mathfrak{a}(X , \rho)$$

ou encore que

$$\left(\frac{|\xi|^{\rho}}{(1 + |\xi|^2)^{\rho/2}} - 1\right) \in \mathfrak{a}(X , 0)$$

ce qui est trivial puisque :

$$\frac{|\xi|^{\rho}}{(1 + |\xi|^2)^{\rho/2}} - 1 = O\left(\frac{1}{|\xi|}\right) \quad \text{quand} \quad |\xi| \to \infty .$$

COROLLAIRE. - <u>Un opérateur différentiel, à coefficients dans</u> $\mathcal{S}(X)$ <u>de degré</u> $\leq m$, <u>est un Calderon-Zygmund de degré</u> m , <u>et son</u> m-<u>symbole est celui qui a été défini dans l'exposé n° 2</u>.

En effet, un opérateur différentiel d'ordre $m - 1$ est sûrement $(m - 1)$-améliorant. Soit donc $P(x , D)$ un opérateur homogène de degré m :

$$P(x , D) = \sum_{|p|=m} a_p(x)\, D^p .$$

Chaque D^p est l'opérateur (ξ^p) , et $\xi \to \xi^p$ est une fonction homogène de degré m , C^{∞} sur Ξ , d'où le résultat d'après la proposition.

C. Q. F. D.

La proposition 5 n'est plus vraie pour ρ négatif, puisque dans ce cas, β ne définit plus une distribution au voisinage de l'origine. Mais nous avons :

PROPOSITION 5 bis. - <u>Soient</u> ρ <u>un nombre réel quelconque et</u>

$$\alpha_1 , \alpha_2 \in \mathcal{S}(X)$$

$$\beta \in \mathcal{S}'(\Xi)$$

$$\tilde{\beta} \in \mathcal{E}(\Sigma , \rho)$$

<u>tels que</u> β <u>et</u> $\tilde{\beta}$ <u>coincident dans le complémentaire d'un compact de</u> Ξ . <u>Alors, l'opérateur</u> $(\alpha_1)(\beta)(\alpha_2)$ <u>est un Calderon-Zygmund d'ordre</u> ρ <u>et de symbole</u> $\alpha_1\, \alpha_2\, \tilde{\beta}$.

<u>Démonstration</u>. - Par partition de l'unité, on peut écrire : $\beta = \beta_1 + \beta_2$, β_1 .

étant une distribution à support compact, et β_2 une distribution définie par une fonction C^∞, qui coincide avec $\tilde{\beta}$ en dehors d'un compact. On a alors

$$(\alpha_1)(\beta)(\alpha_2) = (\alpha_1)(\beta_1)(\alpha_2) + (\alpha_1)(\beta_2)(\alpha_2) .$$

L'opérateur $(\alpha_1)(\beta_1)(\alpha_2)$ envoie continûment $\mathcal{S}'(X)$ dans $\mathcal{S}(X)$ ([1]), en particulier, il est ρ-améliorant . Le raisonnement de la proposition 5 montre que $(\beta_2) - (\frac{\tilde{\beta}}{|\xi|^\rho})(1 + |\xi|^2)^{\rho/2}$ est aussi ρ-améliorant.

Par le lemme de commutation, on a :

$$(\alpha_1)(\beta_2)(\alpha_2) - (\alpha_1\ \alpha_2)(\frac{\tilde{\beta}}{|\xi|^\rho})(|\xi|^2 + 1)^{\rho/2} \in \mathcal{A}(X\ ;\ \rho) ,$$

d'où la proposition.

PROPOSITION 6. - <u>Le composé de deux opérateurs de Calderon-Zygmund d'ordre respectif ρ et τ est un opérateur de Calderon-Zygmund d'ordre $\rho + \tau$. De plus, nous avons le diagramme commutatif :</u>

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(X\ ;\ \rho) \times \Gamma(X\ ;\ \tau) & \xrightarrow{\text{composition}} & \Gamma(X\ ;\ \rho+\tau) \\ \downarrow \sigma_\rho \qquad \downarrow \sigma_\tau & & \downarrow \sigma_{\rho+\tau} \\ \mathcal{S}(X \times \Sigma\ ;\ \rho) \times \mathcal{S}(X \times \Sigma\ ,\ \tau) & \xrightarrow{\text{multiplication}} & \mathcal{S}(X \times \Sigma\ ,\ \rho + \tau) \end{array} .$$

Soient A , $B \in \Gamma(X\ ;\ 0)$, il suffit de vérifier que

$$A((1 + |\xi|^2)^{\rho/2})\ B((1 + |\xi|^2)^{\rho/2}) - AB((1 + |\xi|^2)^{\rho+\tau/2}) \in \mathcal{A}(X\ ,\rho + \tau)$$

ou encore que

$$((1 + |\xi|^2)^{\rho/2})B - B((1 + |\xi|^2)^{\rho/2}) \in \mathcal{A}(X\ ;\ \rho)$$

ce qui résulte du lemme de commutation de l'exposé précédent quand $B = (\alpha)(\beta)$ avec $(\alpha\ ,\ \beta) \in \mathcal{S}(X) \times \mathcal{E}(\Sigma\ ;\ 0)$. Par un raisonnement déjà vu, on montre que ceci reste vrai pour B , opérateur de Calderon-Zygmund d'ordre 0 quelconque.

C. Q. F. D.

PROPOSITION 7. - <u>Le transposé ${}^tT$ d'un opérateur de Calderon-Zygmund d'ordre</u> ρ <u>est encore un opérateur de Calderon-Zygmund d'ordre</u> ρ . De plus

$$\sigma_\rho({}^tT) = \sigma_\rho(T)^V$$

<u>(Si</u> $f \in \mathcal{S}(X \times \Sigma\ ;\ \rho)$, <u>on note</u> f^V <u>la fonction du même espace définie ainsi</u> :

([1]) Si $T \in \mathcal{S}'(X)$, $\mathcal{F}((\alpha_1)(\beta_1)(\alpha_2)T) = \tilde{\alpha}_1 \star (\beta_1(\tilde{\alpha}_2 \star \tilde{T}))$ et $\beta_1(\tilde{\alpha}_2 \star \tilde{T})$ est à support compact.

$$f^{v}(x\ ,\ \xi) = f(\ x\ ,\ -\ \xi)\ ).$$

Il est évident que

$${}^{t}[\bigcap_{s} \mathcal{L}(H^{s}\ ,\ H^{s-\rho})] = \bigcap_{s} \mathcal{L}(H^{s}\ ,\ H^{s-\rho})$$

(voir exposé précédent).

De même nous avons :

$${}^{t}\mathcal{Q}(X\ ;\ \rho) = \mathcal{Q}(X\ ;\ \rho)\ .$$

En effet, le transposé d'un opérateur très régulier est très régulier. Ceci est immédiat ([2]) en utilisant le théorème des noyaux de Schwartz (puisque le noyau est C^{∞} dans le complémentaire de la diagonale).

Démontrons d'abord la proposition dans le cas $\rho = 0$. Nous avons pour $\alpha \in \mathcal{S}(X)$ et $\beta \in \mathcal{E}(\Sigma\ ;\ 0)$:

$${}^{t}(\alpha) = (\alpha)$$

$${}^{t}(\beta) = (\check{\beta}) \qquad\qquad (\ \check{\beta}(\xi) = \beta(-\ \xi)\ )$$

d'où :

$${}^{t}((\alpha)(\beta)) - (\alpha)(\check{\beta}) \in \mathcal{Q}(X\ ,\ 0)\ .$$

Par densité de $\mathcal{S}(X) \otimes \mathcal{E}(\Sigma\ ;\ 0)$, on en déduit la proposition dans le cas $\rho = 0$.

Soit $T \in \Gamma(X\ ;\ \rho)$ (ρ quelconque). T s'écrit

$$T = A((1 + |\xi|^{2})^{\rho/2}) \qquad \text{avec} \quad A \in \Gamma(X\ ;\ 0)$$

on a :

$${}^{t}T = (\ 1 + |\xi|^{2})^{\rho/2}\ {}^{t}A\ .$$

Mais $((1 + |\xi|^{2})^{\rho/2})\ {}^{t}A - {}^{t}A((1 + |\xi|^{2})^{\rho/2}) \in \mathcal{Q}(X\ ,\ \rho)$ (proposition précédente), d'où le résultat cherché.

([2]) On peut le voir plus directement en montrant qu'un opérateur A est très régulier, si et seulement si $\forall\ F_1\ ,\ F_2$, où F_1 et F_2 sont fermés disjoints de X , la forme bilinéaire $\langle\langle A\varphi\ ,\ \psi\rangle\rangle$ définie sur ${}^{1}\mathcal{D} \times \mathcal{D}^{2}$ se prolonge en une forme bilinéaire séparément continue sur

$$\mathcal{E}'(X) \cap \mathcal{E}(X - F_1) \times \mathcal{E}'(X) \cap \mathcal{E}(X - F_2)\ .$$

3. Le cas vectoriel.

Soient E , F , G trois espaces vectoriels complexes de dimension finie. E^* , F^* , G^* désigneront leurs duals respectifs.

Posons :

$$H^s(X , E) = H^s(X) \otimes E$$

$$\mathcal{S}(X \times \Sigma , E , F ; \rho) = \mathcal{S}(X \times \Sigma ; \rho) \otimes \mathcal{L}(E , F)$$

$$\mathcal{A}(X , E , F ; \rho) = \mathcal{A}(X ; \rho) \otimes \mathcal{L}(E , F)$$

$$\Gamma(X , E , F ; \rho) = \Gamma(X ; \rho) \otimes \mathcal{L}(E , F) .$$

Les résultats du paragraphe précédent s'étendent trivialement à ce cas. En particulier on a :

1° $\Gamma(X , E , F ; \rho) \subset \bigcap_s \mathcal{L}(H^s(X , E) , H^{s-\rho}(X , F))$,

2° L'application $\sigma_\rho \otimes 1_{\mathcal{L}(E,F)}$:

$$\Gamma(X , E , F ; \rho) \to \mathcal{S}(X \times \Sigma , E , F ; \rho)$$

est surjective et de noyau $\mathcal{A}(X , E , F ; \rho)$.

3° Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(X , E , F ; \rho) \times \Gamma(X , F , G ; \tau) \arrow[r, "\text{composition}"] \arrow[d] & \Gamma(X , E , G ; \rho + \tau) \arrow[d] \\
\mathcal{S}(X \times \Sigma , E , F , \rho) \times \mathcal{S}(X \times \Sigma , F , G , \tau) \arrow[r] & \mathcal{S}(X \times \Sigma , E , G ; \rho + \tau) .
\end{tikzcd}$$

4° On a

$${}^t\Gamma(X , E , F ; \rho) = \Gamma(X , F^* , E^* ; \rho)$$

et

$$\sigma_\rho({}^tT) = {}^t\sigma_\rho(T)^v .$$