Séminaire Henri Cartan

Michael F. Atiyah

La formule de l'indice pour les variétés à bord

Séminaire Henri Cartan, tome 16, nº 2 (1963-1964), exp. nº 25, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1963-1964__16_2_A10_0>

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1963-1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

LA FORMULE DE L'INDICE POUR LES VARIÉTÉS À BORD

par Michael F. ATIYAH

(rédigé par Luc ILLUSIE)

Introduction. - Commençons par rappeler brièvement la formule de l'indice pour les variétés sans bord (cf. [1]). Soit X une variété sans bord, de classe C^∞, compacte, orientée ; soient E et F deux fibrés vectoriels complexes de classe C^∞ sur X, et d un opérateur différentiel elliptique opérant des sections C^∞ de E dans les sections C^∞ de F. Alors le noyau et le conoyau de d sont de dimension finie, et l'on définit l'indice analytique de d par la formule

$$i_a(d) = \dim \operatorname{Ker} d - \dim \operatorname{Coker} d .$$

D'autre part, on construit, à partir du symbole $\sigma(d)$ de l'opérateur d, un invariant cohomologique $\operatorname{ch} d \in H^*(X , \underset{\sim}{Q})$; désignant par $\tau(X)$ la classe de Todd du complexifié du fibré cotangent, et par $[X] \in H_*(X , \underset{\sim}{Q})$ la classe fondamentale de X, on définit l'indice topologique de d par la formule

$$i_t(d) = \langle (\operatorname{ch} d)\ \tau(X) , [X] \rangle .$$

Le théorème de l'indice s'écrit alors

$$i_a(d) = i_t(d) .$$

Supposons maintenant que X soit une variété (C^∞, compacte, orientée) ayant un bord $Y = \partial X$. Alors deux sortes de difficultés se présentent dans la formulation du théorème :

a. Si, comme précédemment, E et F sont deux fibrés vectoriels complexes C^∞ sur X, et $d : \Gamma_X(E) \to \Gamma_X(F)$ un opérateur différentiel elliptique ($\Gamma_X(\ )$ désigne l'espace des sections C^∞ sur X), on ne peut définir raisonnablement $i_a(d)$, la dimension de $\operatorname{Ker} d$ étant en général infinie. Par exemple, si X est le disque unité de $\underset{\sim}{R}^2$, et si d est le laplacien $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ (opérant sur les sections C^∞ du fibré trivial de dimension 1), $\operatorname{Ker} d$ contient toutes les fonctions holomorphes dans l'intérieur de X et C^∞ sur le bord.

b. La classe fondamentale d'homologie de X est une classe relative $[X] \in H_*(X , Y ; \underset{\sim}{Q})$, tandis que $(\operatorname{ch} d)\ \tau(X) \in H^*(X , \underset{\sim}{Q})$: la formule qui permettait de définir $i_t(d)$ n'a donc, a priori, plus de sens pour $Y \neq \emptyset$.

Ce qui précède montre qu'il y a lieu, dans le cas des variétés à bord, de modifier convenablement la notion d'opérateur elliptique de manière à pouvoir définir un indice analytique et un indice topologique. Pratiquement, on procédera en trois étapes :

1° On définit un opérateur elliptique sur (X, Y) comme un couple d'opérateurs $A = (d, b) : \Gamma_X(E) \to \Gamma_X(F) \oplus \Gamma_Y(G)$ (où E et F sont deux fibrés vectoriels complexes C^∞ sur X, et G est un fibré vectoriel complexe C^∞ sur Y) dont les symboles $\sigma(d)$, $\sigma(b)$ satisfont à certaines conditions permettant de définir un indice analytique.

2° On construit un invariant cohomologique de A, $\operatorname{ch} A \in H^*(X, Y; \mathbb{Q})$, et l'on définit l'indice topologique de A par la formule

$$i_t(A) = \langle (\operatorname{ch} A)\, \tau(X), [X] \rangle .$$

3° On démontre l'égalité des deux indices.

1. Définition d'un opérateur elliptique au bord.

Soit X une variété (C^∞, compacte) de dimension n, ayant un bord $Y = \partial X$. Soient E et F deux fibrés (vectoriels complexes C^∞ de dimension m) sur X, et $d : \Gamma_X(E) \to \Gamma_X(F)$ un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant k$. On se propose, dans ce qui suit, d'étudier les "propriétés au bord" du k-symbole de d, $\sigma(d)$. En chaque point $x \in X$,

$$\sigma(d)_x \in \operatorname{Hom}(E_x, F_x) \otimes S^k(T_x(X)),$$

$S^k(T_x(X))$ désignant la puissance symetrique k-ième de $T_x(X)$, ou encore l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré k sur $T^*_x(X)$.

Plaçons-nous maintenant en un point $x = y \in Y$. On a une suite exacte :

$$0 \to N_y \to T^*_y(X) \xrightarrow{p} T^*_y(Y) \to 0 ,$$

où N_y est la conormale en y. Soit v un point de $T^*_y(Y)$, et notons L_v la droite affine $p^{-1}(v)$, parallèle à N_y. Alors $\sigma(d)_{L_v} \in \operatorname{Hom}(E_y, F_y) \otimes \Lambda_v$, Λ_v étant l'algèbre des fonctions polynomiales sur L_v à valeurs complexes. Pour des raisons de commodité qui apparaîtront plus loin, nous considérerons, de préférence à $\sigma(d)$, son adjoint $\sigma(d)^*$. On a donc : $\sigma(d)^*_{L_v} \in \operatorname{Hom}(F^*_y, E^*_y) \otimes \Lambda_v$; par suite, $\sigma(d)^*_{L_v}$ définitun homomorphisme Λ_v-linéaire $F^*_y \otimes \Lambda_v \to E^*_y \otimes \ _v$, dontnous désignerons le conoyau par M_v. Supposonsdésormais que d soit k-elliptique. Alors si l'on identifie le spectre premier de Λ_v à l'ensemble $L_v \otimes \underset{\sim}{C}$, on a :

$$(\mathrm{Supp}\, M_v) \cap L_v = L_v \cap \{0_y\} \ ,$$

M_v étant considéré comme Λ_v-module ; cette condition implique, en particulier, que, pour tout $v \neq 0$,

$$(\mathrm{Supp}\, M_v) \cap L_v = \emptyset \ .$$

Il en résulte, pour tout $v \neq 0$, une décomposition directe : $M_v = M_v^+ \oplus M_v^-$, où M_v^+ (resp. M_v^-) est le sous-module de M_v défini par la condition que les points de son support aient une partie imaginaire > 0 (resp. < 0). D'autre part, le coefficient dominant de $\sigma(d)^*_{L_v}$ est indépendant de v , et est un isomorphisme de F_y^* sur E_y^* ; après identification de F_y^* et E_y^* au moyen de cet isomorphisme, la division des polynômes montre alors que M_v est un espace vectoriel sur $\underset{\sim}{C}$ de dimension mk (cela résulte aussi du fait que le déterminant de $\sigma(d)^*_{L_v}$ est de degré mk) et munit la réunion des M_v pour $v \in T_y^*(Y)$ et $y \in Y$ d'une structure de fibré vectoriel complexe de dimension mk sur $T^*(Y)$, isomorphe d'ailleurs à l'image réciproque de $(E_Y^*)^k$ sur $T^*(Y)$. De plus, en raison de la continuité par rapport à v de la décomposition $M_v = M_v^+ \oplus M_v^-$, la réunion des M_v^+ (resp. M_v^-) pour $v \in T_y^*(Y) - \{0\}$, $y \in Y$, est un sous-fibré vectoriel complexe M^+ (resp. M^-) du fibré M restreint au complémentaire de la section nulle dans $T^*(Y)$ et l'on a:

$$M_{T^*(Y) - \{0\}} = M^+ \oplus M^- \ .$$

Une métrique ayant été choisie sur X , notons, comme il est d'usage, $B(X)$ et $S(X)$ (resp. $B(Y)$ et $S(Y)$) les fibrés en boules et en sphères associés à $T^*(X)$ (resp. $T^*(Y)$) ; notons également $B(X)_Y$ et $S(X)_Y$ les restrictions à Y de $B(X)$ et $S(X)$. On vient de voir qu'à tout opérateur elliptique d sur X sont associés deux invariants topologiques

$$[\sigma(d)] \in K(B(X)\ ,\ S(X)) \quad \text{et} \quad [M^+] \in K(S(Y)) \ .$$

Il est naturel de se demander s'il n'existe pas de relation entre ces deux invariants. La réponse est donnée par le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - Notons $[\sigma(d)^*]_Y$ la restriction de $[\sigma(d)^*]$ à $K(B(X)_Y , S(X)_Y)$, et η l'homomorphisme composé :

$$K(S(Y)) \xrightarrow{\beta} K^{-2}(S(Y)) \xrightarrow{\delta} K^{-1}(B(Y)\ ,\ S(Y)) \xrightarrow{j} K(B(X)_Y\ ,\ S(X)_Y) \ ,$$

où β est l'isomorphisme de Bott, δ l'opérateur bord de la suite exacte de

K-cohomologie, et j l'isomorphisme évident. On a alors la relation :

$$\eta([M^+]) = - [\sigma(d)^*]_Y .$$

Considérons maintenant un couple d'opérateurs différentiels

$$A = (d , b) : \Gamma_X(E) \to \Gamma_X(F) \oplus \Gamma_Y(G) ,$$

où E et F sont des fibrés vectoriels complexes C^∞ de dimension m sur X, et G un fibré vectoriel complexe C^∞ de dimension p sur Y. Nous supposerons (c'est le cas le plus intéressant dans la pratique), que d est d'ordre $\leq k$, et que b est d'ordre $\leq (\ell_1 , \ldots , \ell_r)$. (c'est-à-dire qu'on a $G = \bigoplus_{i=1}^{r} G_i$, où les G_i sont des fibrés de dimension m_i tels que $\sum_{i=1}^{r} m_i = p$, et $b = (b_1 , \ldots , b_r)$ chaque b_i étant d'ordre $\leq \ell_i$; le ℓ-symbole de b est par définition la suite $\sigma_\ell(b) = (\sigma_{\ell_1}(b_1) , \ldots , \sigma_{\ell_r}(b_r))$ des ℓ_i-symboles des b_i.)

DÉFINITION 1. - On dit que le couple $A = (d , b)$ est un opérateur (k , ℓ)-elliptique sur la variété à bord X (ou encore que A définit un problème elliptique sur X) si les conditions suivantes sont réalisées :

(i) d est k-elliptique ;

(ii) l'homomorphisme $\tau(b , d) : G^* \to M^+$ (G étant étendu à $S(Y)$) égal, au-dessus de chaque $v \in S_y(Y)$, au composé

$$G_y^* \xrightarrow{\sigma(b)^*} E_y^* \otimes \Lambda_v \longrightarrow M_v^+ ,$$

est un isomorphisme.

On peut montrer que la définition 1 est essentiellement la même que celle donnée dans [3], chapitre X. Notons, pour $y \in Y$, $\mathcal{E}_y$ l'espace des fonctions C^∞ à valeurs complexes sur $T_y(X)$. Le symbole de d au point y définit un opérateur différentiel à coefficients constants $d_y : \mathcal{E}_y \otimes E_y \to \mathcal{E}_y \otimes F_y$. Si $v \in T_y^*(Y)$, le sous-espace $\mathfrak{M}_v$ de $\operatorname{Ker} d_y$ formé des fonctions qui s'écrivent $\exp i\langle \; , v\rangle f$, où f est une fonction C^∞ sur $T_y(X)/T_y(Y)$, est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$, isomorphe à M_v, l'isomorphisme étant donné par une dualité canonique. Dans cette dualité, M_v^+ (resp. M_v^-) correspond au sous-espace $\mathfrak{M}_v^+$ (resp. $\mathfrak{M}_v^-$) de $\mathfrak{M}_v$ formé des fonctions bornées sur la normale positive (resp. négative).

D'autre part, le symbole de b au point y définit un opérateur différentiel à coefficients constants $b_y : \mathcal{E}_y \otimes E_y \to \mathcal{E}_y \otimes G_y$. La condition (ii) de la définition 1 exprime que l'homomorphisme composé

$$\mathfrak{M}_v^+ \xrightarrow{b_y} \mathcal{E}_y \otimes G_y \xrightarrow{\varepsilon} G_y$$

(où ε est défini par $\varepsilon(f) = f(0)$) est un isomorphisme pour tout $v \in T_y^*(Y)$ non nul et tout $y \in Y$.

Si $A = (d , b)$ est un opérateur (k , ℓ)-elliptique sur X , Ker A et Coker A sont des espaces vectoriels de dimension finie ([3], loco citato) ; l'indice analytique de A , $i_a(A) = \dim \operatorname{Ker} A - \dim \operatorname{Coker} A$, est donc défini.

Si d est un opérateur elliptique donné, il n'existe pas toujours d'opérateur b formant avec d un couple elliptique. Plus précisément, le théorème 1 implique que, si d est un opérateur elliptique donné, une condition nécessaire pour qu'il existe un opérateur b tel que le couple (d , b) soit elliptique est que

(1) $$[\sigma(d)]_Y = 0 \quad (^1).$$

Il y a donc une obstruction de nature topologique à l'existence de "conditions elliptiques au bord". Il est probable que la condition (1) est aussi suffisante si l'on travaille dans la "zone stable", i. e. si les dimensions des fibrés sont assez grandes pour que "stablement trivial" soit équivalent à "trivial". Donnons pour terminer un exemple. Soit X une variété à bord de dimension 2 ; soit y un point du bord ; $S(Y)_y$ se compose seulement de deux points $\{-1\}$ et $\{+1\}$; comme $M^+_{\{-1\}} = M^-_{\{+1\}}$, la condition (1) exprime seulement que $\dim M^+_{\{+1\}} = \dim M^-_{\{-1\}}$, c'est-à-dire que les fibrés M^+ et M^- ont la même dimension.

Lorsque X est de dimension > 2 , la condition (1) n'exprime plus, en général, que M^+ et M^- ont la même dimension, mais fournit une généralisation naturelle.

2. Construction de l'indice topologique.

Si X est une variété sans bord, et d un opérateur elliptique sur X , le symbole de d définit, comme on sait, un élément $[\sigma(d)]$ de $K(B(X) , S(X))$, c'est-à-dire de $K(B(X) , \partial B(X))$, $\partial B(X)$ étant le bord de $B(X)$. Si maintenant X a un bord $Y \neq \emptyset$, $\partial B(X)$ n'est plus égal à $S(X)$, mais à $S(X) \cup B(X)_Y$. Or soit $A = (d , b)$ un opérateur elliptique sur X au sens de la définition 1 du § 1. On voudrait associer à A un élément $[\sigma(A)] \in K(B(X) , \partial B(X))$, de manière à obtenir, après application du caractère de Chern et de l'inverse de l'isomorphisme de Thom-Gysin, un élément $\operatorname{ch} A \in H^*(X , Y ; \mathbb{Q})$. Le symbole de d définit seulement un élément $[\sigma(d)] \in K(B(X) , S(X))$. Mais considérons la suite exacte :

$$K(B(X) , B(X)_Y \cup S(X)) \to K(B(X) , S(X)) \to K(B(X)_Y , S(X)_Y)$$

---

(1) En effet la condition (ii) entraîne que M^+ est isomorphe à la restriction à $S(Y)$ d'un fibré sur $B(Y)$.

définie par la suite exacte de paires :

$$(B(X)_Y\ ,\ S(X)_Y) \to (B(X)\ ,\ S(X)) \to (B(X)\ ,\ B(X)_Y \cup S(X)) .$$

La condition (1) du § 1 signifie précisément que l'image de $[\sigma(d)]$ dans $K(B(X)_Y\ ,\ S(X)_Y)$ est nulle, donc que $[\sigma(d)]$ provient d'un élément de $K(B(X)\ ,\ B(X)_Y \cup S(X))$. Le problème consiste donc à choisir, de façon canonique, pour chaque opérateur elliptique A , un élément $[\sigma(A)] \in K(B(X)\ ,\ B(X)_Y \cup S(X))$ dont l'image, dans $K(B(X)\ ,\ S(X))$, soit égale à $[\sigma(d)]$. Pour cela, il faut utiliser la condition (ii) de la définition 1 du § 1. La question peut être envisagée de la manière que voici.

Notons ν (resp. $-\nu$) la section de $S(X)_Y$ définie par la normale unité rentrante (resp. sortante) le long de Y . Pour $v \in S(Y)_y$, considérons le demi-cercle C_v joignant v à $\pm\nu_y$, défini paramétriquement par $v \sin\theta - \nu_y \cos\theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$, La restriction de $\sigma(d)$ à C_v est un polynôme homogène de degré k en $\cos\theta$, $\sin\theta$, donc peut se mettre sous la forme

$$\sigma(d)(v\ ,\ \theta) = \exp(-ki\theta)\ p_v(z)$$

où $p_v(z)$ est un polynôme en $z = \exp(2i\theta)$ à valeurs dans $\mathrm{Hom}(E_y\ ,\ F_y)$. Comme $\sigma(d)(v\ ,\ \theta)$ est un isomorphisme pour tout $v \in S(Y)_y$ et tout θ , $p_v(z)$ est un isomorphisme pour tout v et tout z de module 1 . De plus, si la droite L_v du § 1 est représentée paramétriquement par $v + t\nu$, $-\infty < t < +\infty$, on a

$$\sigma(d)_{L_v}(t) = \sigma(d)(v + t\nu) = \sigma(d)(v\ ,\ \theta) \sin^{-k}\theta ,$$

lorsque t et θ sont liés par la relation

$$t = -\operatorname{Cot}\theta = i\,\frac{1 + z}{1 - z} . \tag{T}$$

Soit M'_v le conoyau de l'homomorphisme de $\mathbb{C}[z]$-modules

$$p_v^* : F_y^* \otimes \mathbb{C}[z] \longrightarrow E_y^* \otimes \mathbb{C}[z] .$$

Comme $p_v(z)$ est un isomorphisme pour $|z| = 1$, M'_v est un module de torsion tel que $\mathrm{Supp}(M'_v) \cap \{|z| = 1\} = \emptyset$, et l'on a une décomposition directe

$$M'_v = M'^{+}_v \oplus M'^{-}_v ,$$

où M'^{+}_v (resp. M'^{-}_v) est obtenu en localisant à l'intérieur (resp. extérieur) du disque unité. La transformation conforme (T) envoie l'intérieur du disque unité sur le demi-plan $\mathrm{Im}\ t > 0$, et définit un isomorphisme $M^{+}_v \approx M'^{+}_v$.

Notons, pour $r \in \mathbb{Z}$, $Q_r(X)$ l'ensemble des triples $(E\ ,\ F\ ,\ a)$, où E et F

sont deux fibrés vectoriels complexes sur X, et a un isomorphisme de E sur F au-dessus de $S(X)$ dont la restriction à chaque demi-cercle C_v s'exprime par $a(v, \theta) = \exp(ri\theta)\, p_v(z)$, avec les notations ci-dessus. On a donc $\sigma(d) \in Q_{-k}(X)$. Comme précédemment, on peut associer à chaque élément (E, F, a) de $Q_r(X)$ une famille de modules $M_v'^+$ dont la réunion est un fibré sur $S(Y)$ que nous désignerons par $M'^+(a)$. Le fibré $M'^+(\sigma(d))$ est naturellement isomorphe au fibré M^+ défini au n° 1.

Notons, d'autre part, $Q_r(X, Y)$ l'ensemble des couples (a, h), où $a \in Q_r(X)$, et h est un couple formé d'un fibré H sur Y et d'un isomorphisme de H sur $M'^+(a)$ au-dessus de $S(Y)$. Si $a \in Q_r(X)$ est donné, il n'existe pas nécessairement de h tel que $(a, h) \in Q_r(X, Y)$. Cependant, notons $Q_r^*(X)$ l'ensemble des $a \in Q_r(X)$ tels que, pour tout $v \in S(Y)_y$, le polynôme $p_v(z)$ correspondant ne dépende que de y. Alors, si $a \in Q_r^*(X)$, il existe un $h(a)$ canonique tel que $(a, h(a)) \in Q_r(X, Y)$. En effet, pour $v \in S(Y)_y$, $M_v'^+(a)$ ne dépend que de y, et par suite, $M'^+(a)$ est l'image réciproque d'un fibré sur Y : on pose alors $h(a) = (M'^+(a), I)$. De plus, si $a \in Q_r^*(X)$, on peut prolonger a en un isomorphisme $\bar{a}$ de E sur F au-dessus de $B(X) = S(X) \cup B(X)_Y$: pour $y \in Y$, $v \in S(Y)_y$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $\rho > 0$, on pose

$$\bar{a}(\rho v \sin\theta - \nu_y \cos\theta) = a(v \sin\theta - \nu_y \cos\theta) .$$

On définit de manière évidente une addition dans $Q_r(X, Y)$. Enfin, on dira que deux éléments (a_0, h_0) et (a_1, h_1) de $Q_r(X, Y)$ sont homotopes s'il existe un élément a de $Q_r(X \times I)$ et un isomorphisme h d'un fibré H sur $Y \times I$ sur $M'^+(a)$ au-dessus de $S(Y) \times I$ (où I est le segment $[0, 1]$) tels que

$$(a, h)_{S(Y)\times\{0\}} = (a_0, h_0)$$

et

$$(a, h)_{S(Y)\times\{1\}} = (a_1, h_1) .$$

Cela étant, on a le résultat fondamental suivant :

PROPOSITION 1. - Il existe une application, et une seule,

$$f_r : Q_r(X, Y) \to K(B(X), \partial B(X))$$

vérifiant les propriétés suivante :

(i) $f_r(\xi) = f_r(\eta)$ si ξ et η sont homotopes,

(ii) $f_r(\xi \oplus \eta) = f_r(\xi) + f_r(\eta)$,

(iii) si $a \in Q_r^*(X)$, $f_r(a, h(a)) = [\bar{a}]$.

(La démonstration de cette proposition, ainsi que celle du théorème 1 , repose essentiellement sur la démonstration élémentaire du théorème de Bott. Voir, par exemple, [2].)

La proposition 1 permet de résoudre la question posée au début de ce numéro. En effet, si $A = (d , b)$ est un opérateur k-elliptique sur X , A définit un élément $\sigma(A) \in Q_{-k}(X , Y)$, et l'on pose

$$[\sigma(A)] = f_{-k}(\sigma(A)) \in K(B(X) , \partial B(X)) .$$

DÉFINITION 2. - Soient X une variété de bord Y , et A un opérateur elliptique sur X . Le caractère de Chern de A , $\operatorname{ch} A$, et l'indice topologique de A , $i_t(A)$, sont définis par les formules :

$$\operatorname{ch} A = \varphi^{-1} \operatorname{ch}[\sigma(A)] ,$$

où $\varphi : H^*(X , Y ; \mathbb{Q}) \to H^*(B(X) , \partial B(X))$ est l'isomorphisme de Thom-Gysin,

$$i_t(A) = \langle (\operatorname{ch} A)\, \tau(X) , [X] \rangle ,$$

où $\tau(X)$ est la classe de Todd de $T^*(X) \otimes \mathbb{C}$, et $[X] \in H_*(X , Y ; \mathbb{Q})$ la classe fondamentale de X .

3. La formule de l'indice.

THÉORÈME 2. - *Soit A un opérateur elliptique (au sens du § 1, Définition 1) sur une variété à bord X , de classe C^∞ , compacte, orientée. Alors, avec les définitions des § 1 et § 2, on a :*

$$i_a(A) = i_t(A) .$$

Nous ne donnerons que de très brèves indications sur la démonstration. L'idée est d'appliquer la formule de l'indice pour les variétés sans bord à $Y = \partial X$ et à la variété sans bord $\tilde{X} = X \cup_Y X$ obtenue en recollant deux exemplaires de X le long de Y . On commence par se ramener au cas où d est égal, au voisinage de Y , à Δ^s opérant sur le fibré trivial de dimension m , et où b est égal à

$$b_1 = \bigoplus_{1 \leqslant j \leqslant m} \partial^{2j-1}/\partial\nu^{2j-1}$$

ou

$$b_2 = \bigoplus_{1 \leqslant j \leqslant m} \partial^{2j-2}/\partial\nu^{2j-2} ,$$

$\partial/\partial\nu$ désignant la dérivée normale sur Y (ce qui a un sens après choix d'un voisinage tubulaire de Y dans X). Pour cela, on utilise la formule de composition

$$i_j(A_1 \circ A_2) = i_j(A_1) + i_j(A_2) \qquad (j = a \text{ ou } t) ,$$

$A_1 \circ A_2$ étant défini par $A_1 \circ A_2\, u = d_1\, d_2\, u + b_1\, d_2\, u_Y + b_2\, u$.

Si A est de la forme qu'on vient de dire, on a alors :

$$(2) \qquad i_j(d\ ,\ b_1) + i_j(d\ ,\ b_2) = i_j(\tilde{d}) \qquad (j = a \text{ ou } t),$$

$\tilde{d}$ étant le "double" de d sur $\tilde{X}$.

D'autre part, on a la formule, due à AGRANOVIČ et DYNIN,

$$(3) \qquad i_j(d\ ,\ b_1) - i_j(d\ ,\ b_2) = i_j(T) \qquad (j = a \text{ ou } t),$$

où T est un opérateur de Calderon sur Y tel que $[\sigma(T)] = [\tau(b_1,d)(\tau(b_2,d))^{-1}]$. Le théorème résulte alors de (2) et (3) et de la formule de l'indice pour Y et $\tilde{X}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ATIYAH (M. F.) and SINGER (I. M.). - The index of elliptic operators on compact manifolds, Bull. Amer. math. Soc., t. 69, 1963, p. 422-433.

[2] DOUADY (Adrien). - Démonstration élémentaire d'un théorème de périodicité de Bott, Séminaire Bourbaki, t. 16, 1963/64, n° 259, 9 p.

[3] HÖRMANDER (L.). - Linear partial differential operators. - Berlin, Springer-Verlag, 1963 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 116).