

# SÉMINAIRE HENRI CARTAN

LUC ILLUSIE

**Opérateur  $D_0$**

*Séminaire Henri Cartan*, tome 16, n° 2 (1963-1964), exp. n° 17, p. 1-6

<[http://www.numdam.org/item?id=SHC\\_1963-1964\\_\\_16\\_2\\_A2\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SHC_1963-1964__16_2_A2_0)>

© Séminaire Henri Cartan  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1963-1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

OPÉRATEUR  $D_0$

par Luc ILLUSIE

Soit  $X$  une variété  $C^\infty$  riemannienne compacte orientée de dimension paire. Soit  $B(X)$  (resp.  $S(X)$ ) le fibré en boules unité (resp. sphères unité) associé au fibré cotangent  $T^*(X)$ . Il résulte de l'exposé précédent que  $K(B(X), S(X)) \otimes \underline{\mathbb{Q}}$  est un module libre à un générateur sur  $K(X) \otimes \underline{\mathbb{Q}}$ . Nous allons maintenant construire un opérateur différentiel elliptique  $D_0$  sur  $X$ , tel que l'image de son symbole dans  $K(B(X), S(X)) \otimes \underline{\mathbb{Q}}$  soit un générateur de ce module. Ceci nous définira un isomorphisme de  $K(X) \otimes \underline{\mathbb{Q}}$  sur  $K(B(X), S(X)) \otimes \underline{\mathbb{Q}}$  et nous permettra de considérer les deux membres de la formule d'Atiyah-Singer, indice analytique et indice topologique, comme des fonctions sur  $K(X) \otimes \underline{\mathbb{Q}}$ , ce qui est une étape importante dans la démonstration de la formule ([1] et [2]).

1. Définitions et notations.

1.1. - Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension  $n$ , muni d'un produit scalaire euclidien  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Ce produit scalaire s'étend à l'algèbre extérieure  $E = \bigoplus_p \Lambda^p E$  par la formule :

$$\langle x_1 \dots x_p, y_1 \dots y_p \rangle = \det \langle x_i, y_j \rangle,$$

et définit sur  $E$  une structure d'espace euclidien, pour laquelle  $\Lambda^p E$  est orthogonal à  $\Lambda^q E$  si  $p \neq q$ . Si  $e_1, \dots, e_n$  forment une base orthonormale de  $E$ , les éléments  $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$ ,  $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$ , forment une base orthonormale de  $\Lambda E$ . Soit  $E_{\underline{\mathbb{C}}} = E \otimes_{\underline{\mathbb{R}}} \underline{\mathbb{C}}$  le complexifié de  $E$ . On définit un produit scalaire hermitien  $( | )$  sur  $\Lambda_{\underline{\mathbb{C}}}(E_{\underline{\mathbb{C}}}) = (\Lambda_{\underline{\mathbb{R}}} E)_{\underline{\mathbb{C}}}$  par la formule  $(x|y) = \langle x, \bar{y} \rangle$ . Toute base orthonormale de  $\Lambda E$  sur  $\underline{\mathbb{R}}$  (pour le produit euclidien) est une base orthonormale de  $\Lambda E_{\underline{\mathbb{C}}}$  sur  $\underline{\mathbb{C}}$  (pour le produit hermitien).

1.2. - Supposons  $E$  orienté par le choix d'un élément  $e \in \Lambda^n E$  tel que  $\langle e, e \rangle = 1$ . Notons  $\star$  l'opérateur de dualité qui à  $x \in \Lambda E$  fait correspondre le produit intérieur droit de  $e$  par  $x$  [3]. Autrement dit,  $\star$  est défini par la formule :

$$(1) \quad \langle \star x, y \rangle = \langle e, x \wedge y \rangle.$$

Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base orthonormale de  $E$  telle que

$$e = e_1 \wedge \dots \wedge e_n ,$$

on a

$$\star(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}) = e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_q} ,$$

si  $(i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q)$  est une permutation paire de  $(1, 2, \dots, n)$ . Il en résulte que

$$(\star)^2 x = (-1)^{p(n-p)} x \text{ pour } x \in \Lambda^p E .$$

L'opérateur  $\star$  est donc une isométrie, qui pour chaque  $p$  est un isomorphisme de  $\Lambda^p E$  sur  $\Lambda^{n-p} E$ . Enfin, on a la formule

$$\langle x, y \rangle e = x \wedge \star y ,$$

qui aurait pu servir de définition à  $\star$ .

1.3. - Prolongeons  $\star$  à  $\Lambda E_{\mathbb{C}}$  de façon  $\mathbb{C}$ -linéaire. Soit  $\alpha$  l'opérateur ([1] et [2]) sur  $\Lambda E_{\mathbb{C}}$  défini par

$$\alpha|_{\Lambda^p E_{\mathbb{C}}} = i^{p(p+1)-m} \star \text{ si } n = 2m ,$$

$$\alpha|_{\Lambda^p E_{\mathbb{C}}} = i^{p(p+1)-m-1} \star \text{ si } n = 2m + 1 .$$

On a  $\alpha^2 = 1$ . Soit  $\Lambda^+ E$  (resp.  $\Lambda^- E$ ) le sous-espace propre de  $\Lambda E_{\mathbb{C}}$  correspondant à la valeur propre  $+1$  (resp.  $-1$ ). On a :

$$\Lambda E_{\mathbb{C}} = \Lambda^+ E \oplus \Lambda^- E ,$$

la décomposition étant donnée par  $x = 1/2(x + \alpha x) + 1/2(x - \alpha x)$ . Les sous-espaces  $\Lambda^+ E$  et  $\Lambda^- E$  sont d'ailleurs orthogonaux, car on vérifie aussitôt que  $\alpha$  est hermitien.

1.4. - Soit  $X$  une variété  $C^\infty$  riemannienne compacte orientée de dimension  $n$ . En chaque point  $x \in X$ ,  $T_x^*(X)$  est un espace euclidien orienté ; on a donc des opérateurs  $\star$  et  $\alpha$  sur  $\Lambda T_x^*(X)_{\mathbb{C}}$ . Soit  $\Omega$  (resp.  $\Omega_{\mathbb{C}}$ ) l'espace des sections  $C^\infty$  de  $\Lambda T^*(X)$  (resp.  $\Lambda T^*(X)_{\mathbb{C}}$ ).  $\alpha$  opère sur  $\Omega_{\mathbb{C}}$ , et  $\Omega_{\mathbb{C}}$  est

somme directe des sous-espaces propres  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$  correspondant aux valeurs propres 1 et -1. On définit d'autre part un produit scalaire euclidien (resp. hermitien) global sur  $\Omega$  (resp.  $\Omega_{\mathbb{C}}$ ) par la formule :

$$\langle a, b \rangle = \int_X \langle a_x, b_x \rangle dx \quad (\text{resp. } (a, b) = \int_X (a_x, b_x) dx),$$

où  $dx$  désigne l'élément de volume. Soit maintenant  $\overset{\dagger}{d}$  l'opérateur égal à  $1/2\pi i$  fois l'opérateur usuel de différentiation extérieure sur  $\Omega$ .

A partir de maintenant, dans cet exposé, on écrira  $d$  au lieu de  $\overset{\dagger}{d}$  pour simplifier l'écriture.

Soit  $\delta$  l'adjoint du nouvel opérateur  $d$  ;  $\delta$  est donc défini par la formule

$$(da|b) = (a|\delta b) ;$$

un calcul facile montre que  $\delta = (-1)^{np} \star d \star$  sur  $\Omega_{\mathbb{C}}^p$ , en particulier

$$\delta = \star d \star$$

si  $n$  est pair. On vérifie par ailleurs les formules :

$$(2) \quad \delta \alpha = - \alpha d, \quad d \alpha = - \alpha \delta.$$

(On remarquera que ces formules, jointes à  $\alpha^2 = 1$  et au fait que  $\alpha$  coïncide avec  $\star$  sur les formes de degré  $2m$  si  $n = 4m$ , déterminent entièrement  $\alpha$ .) L'opérateur différentiel  $D_0 = d + \delta$  est un opérateur hermitien sur  $\Omega_{\mathbb{C}}$ . En vertu des relations (2),  $D_0$  envoie  $\Omega^+$  dans  $\Omega^-$ , et vice-versa. (Désormais, et sauf mention expresse du contraire, nous considérerons  $D_0$  comme opérant de  $\Omega^+$  dans  $\Omega^-$ .) L'opérateur  $D_0$  est elliptique. En effet, calculons son symbole  $s(D_0)$ . Soit  $s(d)$  (resp.  $s(\delta)$ ) le symbole de  $d$  (resp.  $\delta$ ). On a :

$$s(D_0) = s(d) + s(\delta).$$

Au-dessus de  $v \in T^*(X)$ ,  $s(d)$  est la multiplication extérieure à gauche par  $v$ . Comme  $d$  et  $\delta$  sont adjoints, leurs symboles le sont aussi. On a donc la formule :

$$s(D_0)(v)_x = v \wedge x + x \lrcorner v, \quad \text{pour } v \in T^*(X).$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned}
\langle s(D_0)(v)x, s(D_0)(v)y \rangle &= \langle s(D_0^2)(v)x, y \rangle \\
&= \langle v \wedge (x \lrcorner v) + (v \wedge x) \lrcorner v, y \rangle \\
&= \langle x \lrcorner v, y \lrcorner v \rangle + \langle v \wedge x, v \wedge y \rangle \\
&= \langle v, v \rangle \langle x, y \rangle .
\end{aligned}$$

Donc, au-dessus de chaque vecteur cotangent  $v$ , le symbole de  $D_0$  est une similitude de rapport  $\|v\|$ , ce qui montre que  $D_0$  est elliptique.

Remarque. Le calcul précédent montre également que le symbole de  $D_0^2 = (1/4\pi^2)\Delta$  ([5]), où  $\Delta$  est le laplacien, est, au-dessus de chaque vecteur cotangent  $v$ , la multiplication par le scalaire  $\|v\|^2$ .

## 2. Indice analytique de $D_0$ .

2.1. L'index de Thom-Hirzebruch. - Rappelons d'abord que, par le théorème de de Rham,  $H^*(X, \mathbb{C})$  s'identifie, en tant qu'algèbre, à la  $d$ -cohomologie de  $\Omega_{\mathbb{C}}$ , le cup-produit correspondant au produit extérieur des formes différentielles. L'application qui, à  $(a, b) \in H^*(X, \mathbb{C}) \times H^*(X, \mathbb{C})$ , associe  $(\star a|b)$ , valeur de  $a \cup \bar{b}$  sur la classe fondamentale d'homologie de  $X$ , est une forme ses-quilinéaire  $\phi$  sur  $H^*(X)$ . Si

$$(a, b) \in H^p(X, \mathbb{C}) \times H^{n-p}(X, \mathbb{C}),$$

$(\star a|b)$  peut encore s'interpréter comme la valeur de  $\bar{b}$  sur l'image de  $a$  par la dualité de Poincaré  $H^p(X, \mathbb{C}) \rightarrow H_{n-p}(X, \mathbb{C})$ ;  $\phi$  est une forme hermitienne sur  $H^{\text{pair}}(X, \mathbb{C})$ . Son indice d'inertie  $t(X)$  s'appelle l'index (de Thom-Hirzebruch) de la variété  $X$  ([6]). (On rappelle que l'indice d'inertie d'une forme hermitienne  $H$  sur un espace vectoriel  $E$  de dimension finie est égal à  $p^+ - p^-$ , où  $p^+$  (resp.  $p^-$ ) est le maximum des dimensions des sous-espaces  $F$  de  $E$  tels que la restriction de  $H$  à  $F$  soit positive (resp. négative) et non dégénérée.)

2.2. PROPOSITION. - Soit  $X$  une variété  $C^\infty$  riemannienne compacte orientée de dimension  $n$ . L'index de  $X$  est égal à l'indice analytique de l'opérateur  $D_0$  sur  $X$ . Il est nul si  $n \not\equiv 0 \pmod{4}$ .

Démonstration. - Notons  $i(D_0)$  l'indice analytique de  $D_0$ . Soit  $B$  l'espace des formes harmoniques complexes sur  $X$ . Posons  $B^+ = B \cap \Omega^+$ ,  $B^- = B \cap \Omega^-$ . On a  $B = B^+ \oplus B^-$ , car  $\alpha$  commute avec  $\Delta$ . D'autre part  $\text{Ker } D_0 = \text{Ker } \Delta$ ,

car  $(D_0 a | D_0 b) = (\Delta a | b)$  quels que soient  $a$  et  $b$  dans  $\Omega_{\mathbb{C}}$ . On a donc  $\text{Ker } D_0 = B^+$ , et aussi  $\text{Coker } D_0 = B^-$ , car  $D_0$  est hermitien sur  $\Omega_{\mathbb{C}}$ , d'où finalement  $i(D_0) = \dim B^+ - \dim B^-$ .

a.  $n \neq 0 \pmod{4}$ . - Dans ce cas,  $t(X) = 0$ , car  $\Phi$  est une forme neutre ([4]). ( $H^{\text{pair}}(X, \mathbb{C})$  est somme directe des deux sous-espaces totalement isotropes  $\bigoplus_{2p < n/2} H^{2p}(\tilde{X}, \mathbb{C})$  et  $\bigoplus_{2p > n/2} H^{2p}(X, \mathbb{C})$ .) D'autre part, si  $n$  est impair, on a

$$B^+ = \bigoplus_{p < n/2} (B^p \oplus B^{n-p})^+, \quad B^- = \bigoplus_{p < n/2} (B^p \oplus B^{n-p})^-;$$

mais

$$\dim (B^p \oplus B^{n-p})^+ = \dim (B^p \oplus B^{n-p})^-$$

car  $I + \alpha$  (resp.  $I - \alpha$ ) est un isomorphisme de  $B^p$  sur  $(B^p \oplus B^{n-p})^+$  (resp.  $(B^p \oplus B^{n-p})^-$ ), d'où  $i(D_0) = 0$ . Enfin, si  $n = 2m$ ,  $m$  impair, on a

$$B^+ = B^{m+} \oplus \bigoplus_{p < m} (B^p \oplus B^{n-p})^+, \quad B^- = B^{m-} \oplus \bigoplus_{p < m} (B^p \oplus B^{n-p})^-;$$

mais  $B^{m+}$  et  $B^{m-}$  sont isomorphes, car  $\alpha$  coïncide avec  $i\star$  sur  $\Omega_{\mathbb{C}}^m$ ; on a donc encore  $i(D_0) = 0$ .

b.  $n = 0 \pmod{4}$ . - Posons  $n = 4m$ . On voit comme précédemment que  $i(D_0) = \dim B^{2m+} - \dim B^{2m-}$ . Mais  $B$  s'identifie, en tant qu'espace vectoriel, à  $H^*(X, \mathbb{C})$  ([5]). On peut considérer  $\Phi$  comme une forme hermitienne sur  $B^{\text{pair}}$ . Comme  $\Phi$  est neutre sur  $\bigoplus_{p \neq m} B^{2p}$ , il suffit, pour démontrer la proposition, de vérifier que  $\Phi$  est définie positive sur  $B^{2m+}$  et définie négative sur  $B^{2m-}$ , ce qui est évident, car  $\alpha$  coïncide avec  $\star$  sur  $\Omega_{\mathbb{C}}^{2m}$ .

Il sera démontré, dans l'exposé suivant, que, si  $X$  est une variété  $C^\infty$  riemannienne compacte orientée de dimension paire, l'image du symbole de  $D_0$  dans  $K(B(X), S(X)) \otimes \mathbb{Q}$  engendre  $K(B(X), S(X)) \otimes \mathbb{Q}$  comme  $K(X) \otimes \mathbb{Q}$  module. On calculera en effet le caractère de Chern de  $D_0$ , et l'on montrera que sa composante de degré zéro n'est pas nulle.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] ATIYAH (M. F.) and SINGER (I. M.). - The index of elliptic operators on compact manifolds, Bull. Amer. math. Soc., t. 69, 1963, p. 422-433.
  - [2] ATIYAH (M. F.), BOTT (R.), SINGER (I.). - Harvard University, Topology Seminar, Fall 1962. - Cambridge (Mass.), Harvard University.
  - [3] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre, Chapitre 3, 2e éd. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1044 ; Bourbaki, 7).
  - [4] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre, Chapitre 9. - Paris, Hermann, 1959 (Act. scient. et ind., 1272 ; Bourbaki, 24).
  - [5] de RHAM (Georges). - Variétés différentiables. - Paris, Hermann, 1955 (Act. scient. et ind., 1222 ; Publ. Inst. math. Univ. Nancago, 3).
  - [6] HIRZEBRUCH (F.). - Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie, 2te ergänzte Auflage. - Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer-Verlag, 1962 (Ergebnisse der Mathematik, Neue Folge, 9).
-