Claude Morlet

Cobordisme

Séminaire Henri Cartan, tome 16, n° 2 (1963-1964), exp. n° 21, p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1963-1964__16_2_A6_0>

COBORDISME

par Claude MORLET

1. La dernière étape de la démonstration de la formule d'Atiyah-Singer.

En conclusion de l'exposé précédent, nous sommes amenés à étudier deux fonctions j_a et j_t définies sur l'ensemble E' des couples (V , ξ) , où V est une variété différentiable, orientée, de dimension paire, compacte et sans bord, et ξ un élément de $K(V)$. Plus exactement, E' est l'ensemble des classes d'isomorphisme de couples (V , ξ) , l'isomorphisme étant défini de manière évidente. Ces fonctions possèdent les propriétés suivantes :

(0) S'il existe (W , η) , où W est une variété différentiable orientée compacte, et η un élément de $K(W)$, tels que (V , ξ) soit isomorphe à $(\partial W , \eta|\partial W)$, alors $j_i(V , \xi) = 0$ $(i = a , t)$;

(1) $j_i(V , \xi) + j_i(V' , \xi') = j_i(V + V' , \xi + \xi')$ $(i = a , t)$;

(2) $j_i(V , \xi) + j_i(V , \eta) = j_i(V , \xi \underset{V}{\oplus} \eta)$ $(i = a , t)$;

(3) $j_i(V , \xi) \cdot j_i(V' , \xi') = j_i(V \times V' , \xi \otimes \xi')$ $(i = a , t)$.

(On note $V + V'$ la réunion disjointe de V et V' , et on note $\xi + \xi'$ le fibré de base $V + V'$, dont la restriction à V est ξ et la restriction à V' est ξ' .)

Remarque. - On a déjà démontré que l'indice analytique et l'indice topologique vérifient les conditions (1) et (2). Les propriétés (0) et (3) résulteront de ce qui suit pour l'indice topologique, et d'exposés ultérieurs pour l'indice analytique ; d'ailleurs, elles ont été démontrées dans l'exposé n° 20 pour l'indice topologique.

Sur E' , la réunion disjointe donne une loi de monoïde abélien. L'ensemble des éléments de E' qui sont des bords (au sens de la condition (0)) est un sous-monoïde. On notera A' le quotient (la relation d'équivalence est la suivante : a est équivalent à b si et seulement s'il existe e et f dans le sous-monoïde tels que $a + e = b + f$). A' est un monoïde abélien avec élément neutre (la classe des bords), qu'on notera additivement. C'est un groupe : pour avoir l'opposé de (V , ξ) , on prend $(V \times I , \alpha)$, où α est l'extension de ξ à $V \times I$; le bord de $(V \times I , \alpha)$ est $(V , \xi) + (V^- , \xi)$ où V^- est la variété V munie de l'orientation opposée ; (V^- , ξ) est donc l'opposé de (V , ξ) dans A' .

Le produit tensoriel $[(V , \xi) , (V' , \xi')] \to (V \times V' , \xi \otimes \xi')$ induit sur A' une loi d'algèbre commutative. Les conditions (0) , (1) et (3) expriment alors que j_i $(i = a , t)$ est un homomorphisme de A' dans $\underset{\sim}{Q}$.

On peut faire les mêmes constructions à partir de l'ensemble E des classes de couples (V , ξ) , où V est une variété compacte sans bord de dimension quelconque (orientée), et ξ un élément de $K(V)$. On obtient une algèbre A graduée (par la dimension des variétés), anticommutative, et A' est alors la sous-algèbre des éléments de degré pair.

Soit alors I le sous-groupe de A engendré par les éléments qui s'écrivent

$$(V , \xi) + (V , \eta) - (V , \xi \underset{V}{\oplus} \eta) .$$

I **est un idéal.**

On posera

$$I' = I \cap A' , \quad B = A/I \quad \text{et} \quad B' = A'/I' .$$

B' s'identifie à la sous-algèbre de B formée des éléments de degré pair. Les conditions (0) , (1) , (2) , (3) expriment alors que j_i $(i = a , t)$ définit un homomorphisme de B' dans $\underset{\sim}{Q}$ (homomorphisme d'algèbres) ; il induit donc un homomorphisme de $B' \underset{\underset{\sim}{Z}}{\otimes} Q$ dans $\underset{\sim}{Q}$.

Le résultat fondamental de cet exposé s'énonce :

THÉORÈME 1. – $B \underset{\underset{\sim}{Z}}{\otimes} \underset{\sim}{Q}$ <u>est isomorphe à une algèbre de polynômes en les variables</u> p_i <u>de degré</u> $4i$ (i <u>entier</u> ≥ 1) <u>et</u> c_1 <u>de degré</u> 2 , <u>où l'on peut choisir pour</u> p_i <u>la classe de</u> $(P_{2i}(\underset{\sim}{C}) , 1)$ <u>et pour</u> c_1 <u>la classe de</u> $(P_1(\underset{\sim}{C}) , E_1(\underset{\sim}{C}))$.

[On a noté 1 le fibré trivial de dimension 1 .]

COROLLAIRE 1. – $B' \underset{\underset{\sim}{Z}}{\otimes} Q$ <u>est isomorphe à</u> $B \underset{\underset{\sim}{Z}}{\otimes} \underset{\sim}{Q}$.

COROLLAIRE 2. – <u>Les fonctions</u> j_a <u>et</u> j_t <u>coïncident si et seulement si elles coïncident sur</u> $(P_{2i}(\underset{\sim}{C}) , 1)$ <u>pour</u> $i \geq 1$, <u>et sur</u> $(P_1(\underset{\sim}{C}) , E_1(\underset{\sim}{C}))$.

Le théorème 1 sera démontré au § 7 de cet exposé. Nous aurons besoin pour cela d'un certain nombre de résultats de cobordisme que nous allons démontrer tout d'abord (dans les paragraphes 2 à 5). Par ailleurs, nous vérifierons au § 8 que j_a et j_t coïncident effectivement sur $(P_{2i}(\underset{\sim}{C}) , 1)$ et sur $(P_1(\underset{\sim}{C}) , E_1(\underset{\sim}{C}))$.

2. Le foncteur Ω_* .

Soit X un espace topologique. Considérons les couples (V , f) , où V est une variété (différentiable, compacte, orientée, sans bord) et f une application continue de V dans X . On considérera que deux tels couples (V , f) et (V' , f') sont isomorphes s'il existe un difféomorphisme orienté h de V sur V' tel que $f = f' \circ h$. L'ensemble quotient sera noté $E(X)$. La loi de composition

$$[(V , f) , (V , f')] \to (V + V' , f + f')$$

fait de $E(X)$ un monoïde abélien, qu'on notera additivement. (Ici, on note $f + f'$ l'application de $V + V'$ dans X dont la restriction à V est f et la restriction à V' est f' .) On dira que (V , f) est un bord s'il existe un couple (W , g) , où W est une variété (différentiable, orientée, compacte) à bord, telle que (V , f) soit isomorphe à $(\partial W , g|\partial W)$. L'ensemble des bords est un sous-monoïde de $E(X)$. On notera $\Omega_*(X)$ le quotient. $\Omega_*(X)$ est un groupe (l'élément neutre est la classe des bords, l'opposé de (V , f) est (V^- , f) , car $(V , f) + (V^- , f)$ est le bord de $(V \times I , f \circ p_1)$). Ce groupe est gradué par la dimension de V .

Soit A un sous-espace de X . On notera $E(X , A)$ l'ensemble des classes de couples (V , f) , où V est une variété différentiable compacte orientée et f une application continue de V dans X telle que $f(\partial V)$ soit contenu dans A . Dans $E(X , A)$, on définit une somme par la formule :

$$((V , \partial V) \xrightarrow{f} (X , A)) + ((V' , \partial V') \xrightarrow{f'} (X , A)) = ((V + V' , \partial V + \partial V') \xrightarrow{f + f'} (X , A)) ;$$

elle fait de $E(X , A)$ un monoïde abélien.

On dit que (V , f) est un bord s'il existe une variété W compacte orientée, de dimension égale à la dimension de V plus 1 , et une application g de W dans X ainsi qu'un plongement de V dans le bord de W , tels que $g_{|V} = f$ et que $g(\overline{\partial W - V})$ soit contenu dans A . Et le quotient de $E(X , A)$ par le sous-monoïde des bords est un groupe $\Omega_*(X , A)$ gradué par la dimension des variétés.

On obtient ainsi un foncteur $(X , A) \rightsquigarrow \Omega_*(X , A)$, défini sur les paires d'espaces topologiques. Et on vérifie que $\Omega_*(X) = \Omega_*(X , \emptyset)$. Nous allons montrer que ce foncteur $\Omega_*(X , A)$ vérifie les axiomes d'Eilenberg-Steenrod, sauf l'axiome de dimension. (Un foncteur qui vérifie ces axiomes sera appelé foncteur homologique sans axiome de dimension.)

A. Suite exacte d'homologie.

Définissons l'opérateur bord. Soit (V , f) un élément de $E(X , A)$; $(\partial V , f|_{\partial V})$ est un élément de $E(A)$ (de dimension un de moins), et ceci nous donne une application

$$\Omega_n(X , A) \to \Omega_{n-1}(A) .$$

Les inclusions $A \to X$ et $(X , \emptyset) \xrightarrow{j} (X , A)$ permettent alors d'écrire la suite d'homomorphismes :

$$\Omega_n(A) \longrightarrow \Omega_n(X) \xrightarrow{j_*} \Omega_n(X , A) \xrightarrow{\partial} \Omega_{n-1}(A) \longrightarrow \Omega_{n-1}(X) .$$

PROPOSITION 1. - Cette suite est exacte.

L'exactitude en $\Omega_n(X)$ et en $\Omega_{n-1}(A)$ est évidente. Il est trivial que $\partial \circ j_* = 0$. Il reste à montrer que $\operatorname{Ker} \partial \subset \operatorname{Im} j_*$.

LEMME 1. - Soient V une variété de dimension n , et f une application de V dans X telle que $f(\partial V) \subset A$. Soit V' une sous-variété de dimension n de V (fermée dans V). Supposons que $f^{-1}(A)$ contienne l'adhérence de $V - V'$; alors (V , f) et $(V' , f|_{V'})$ ont même image dans $\Omega_n(X , A)$.

Démonstration du lemme (Pour tout ce qui concerne les questions d'arrondissement des angles, je renvoie aux exposés de DOUADY [6]). - Modulo arrondissement des angles, $\partial(V \times I)$ est une variété à bord dont le bord est obtenu en recollant les trois variétés $V \times \{0\}$, $V \times \{1\}$ et $(\partial V) \times I$. On a donc deux plongements $V \to V \times \{0\}$ et $V' \to V' \times \{1\}$ de V et V' dans le bord de $V \times I$ (le second plongement étant avec changement d'orientation). Le couple $(V \times I , f \circ p_1)$ réalise alors l'équivalence à zéro de $(V , f) - (V' , f|_{V'})$.

Démontrons maintenant que $\operatorname{Ker} \partial \subset \operatorname{Im} j_*$. Soit $(V , \partial V , f)$ dans $E_n(X , A)$. Dire que son image dans $\Omega_{n-1}(A)$ est nulle, c'est dire qu'il existe W , de bord ∂V , et $g : W \to A$, tels que $g|_{\partial V} = f|_{\partial V}$. Considérons la variété recollée $V \cup_{\partial V} W = V_o$. C'est une variété sans bord, et $f \cup g$ est une application de V_o dans X . D'après le lemme, l'image de $(V_o , f \cup g)$ dans $\Omega_n(X , A)$ est la même que celle de (V , f) .

B. Homotopie.

PROPOSITION 2. - Soit φ une homotopie entre les deux applications φ_o et φ_1 de X dans Y . Alors les applications φ_{o*} et φ_{1*} de $\Omega_*(X)$ dans $\Omega_*(Y)$ sont égales.

En effet, si (V, f) est dans $E(X)$, il faut montrer que $(V, \varphi_0 \circ f)$ et $(V, \varphi_1 \circ f)$ ont même image dans $\Omega_*(Y)$. L'équivalence est réalisée par $(V \times I, \varphi_0(f \times id_I))$.

C. Excision.

PROPOSITION 3. - Soient A et B deux ensembles ouverts qui recouvrent X. L'injection $(B, A \cap B) \to (X, A)$ induit un isomorphisme de $\Omega_*(B, A \cap B)$ sur $\Omega_*(X, A)$.

Montrons la surjectivité. Soit $(V, \partial V, f)$ un élément de $E(X, A)$; il existe une fonction différentiable φ sur V, à valeurs dans $[0, 1]$, égale à 1 sur $\partial V \cup f^{-1}(X - B)$ et à zéro sur $f^{-1}(X - A)$, et qui est transversale sur la valeur $1/2$. Posons alors $V' = \varphi^{-1}[1/2, 0]$; V' est une variété différentiable, et d'après le lemme 1, $(V, \partial V, f)$ et $(V', \partial V', f_{|V'})$ ont même image dans $\Omega_*(X, A)$; mais $(V', \partial V', f_{|V'})$ appartient à $E(B, A \cap B)$.

Pour montrer l'injectivité, si deux éléments (V, f) et (W, g) de $E(B, A \cap B)$ sont équivalents dans $\Omega_*(X, A)$ par une construction analogue à la précédente, on remplace la variété qui réalisait l'équivalence par une plus petite dont l'image est contenue dans B.

3. Le morphisme naturel du foncteur Ω_* dans le foncteur $X \rightsquigarrow H_*(X \times BSO ; \mathbb{Z})$.

Soit (V, f) dans $E(X, A)$. Soit ψ_V l'application classifiante du fibré tangent stable de V (ψ_V envoie V dans BSO, et en fait, seule la classe d'homotopie de cette application est définie). L'application $f \times \psi_V$ de V dans $X \times BSO$ induit sur les homologies une application

$$H_*(V, \partial V ; \mathbb{Z}) \to H_*(X \times BSO, A \times BSO ; \mathbb{Z}) .$$

On notera $\varphi(V, f)$ l'image de la classe fondamentale de $(V, \partial V)$ par cette application.

THÉORÈME 2.

(a) $\varphi(V, f)$ ne dépend que de la classe de (V, f) dans $\Omega_*(X, A)$;

(b) l'application φ ainsi définie de $\Omega_*(X, A)$ dans $H_*(X \times BSO, A \times BSO ; \mathbb{Z})$ est un homomorphisme de groupes, et φ définit un morphisme du foncteur homologique Ω_* dans le foncteur homologique $X \rightsquigarrow H(X \times BSO ; \mathbb{Z})$.

Seul (a) n'est pas trivial ; nous allons donc montrer que $\varphi(V, f)$ est nul quand (V, f) est un bord.

Si A est vide, supposons que $V = \partial W$ et $f = g_{|V}$. (On sait que l'application classifiante ψ_V est la restriction à V de l'application classifiante ψ_W.) Ecrivons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_{n+1}(W , \partial W) & \longrightarrow & H_n(\partial W) = H_n(V) \\ \Big\downarrow (g \times \psi_W)_* & & \Big\downarrow (f \times \psi_V)_* \\ H_{n+1}(X \times BSO , X \times BSO) & \longrightarrow & H_n(X \times BSO) \end{array} .$$

La classe fondamentale de ∂W est dans l'image de $H_{n+1}(W , \partial W)$, puisque c'est l'image de la classe fondamentale de $(W , \partial W)$; son image dans $H_n(X \times BSO)$ est donc nulle.

Si A n'est pas vide, V est une sous-variété plongée dans le bord ∂W d'une variété W. On vient de voir que l'image de la classe fondamentale de ∂W par $((g \times \psi_W)_{|\partial W})_*$ est nulle ; considérons donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} H_n(\partial W) \arrow[r] \arrow[d, "((g \times \psi_W)_{|\partial W})_*"] & H_n(\partial W , \partial W\text{-intérieur } V) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & H_n(V , \partial V) \arrow[dl, "(f \times \psi_V)_*"] \\ H_n(X \times BSO) \arrow[r] & H_n(X \times BSO , A \times BSO) & \end{tikzcd} .$$

La classe fondamentale de $(V , \partial V)$ est l'image de celle de ∂W, donc son image est nulle.

4. Structures multiplicatives.

DÉFINITION. - <u>On dira que le foncteur homologique</u> T <u>est multiplicatif si, quelles que soient les paires d'espaces</u> (X , A) <u>et</u> (Y , B), <u>où</u> A <u>est ouvert dans</u> X <u>et</u> B <u>ouvert dans</u> Y, <u>on a un homomorphisme</u>

$$T(X , A) \otimes T(Y , B) \xrightarrow{p} T(X \times Y , (X \times B) \cup (A \times Y))$$

<u>de telle façon que</u> p <u>définisse un homomorphisme du foncteur</u>

$$((X , A) , (Y , B)) \rightsquigarrow T(X , A) \otimes T(Y , B)$$

<u>dans le foncteur</u>

$$((X , A) , (Y , B)) \rightsquigarrow T(X \times Y , (X \times B) \cup (A \times Y)) .$$

<u>Exemples</u>. - Le foncteur "homologie singulière" est multiplicatif.

On en déduit que le foncteur $(X, A) \rightsquigarrow H_*(X \times BSO, A \times BSO, \underset{\sim}{Z})$ est multiplicatif. En effet,

$$H_*(X \times BSO, A \times BSO) \otimes H_*(Y \times BSO, B \times BSO)$$

s'envoie dans

$$H_*(X \times Y \times BSO \times BSO, ((X \times B) \cup (A \times Y)) \times BSO \times BSO)$$

qui s'envoie dans

$$H_*(X \times Y \times BSO, ((X \times B) \cup (A \times Y)) \times BSO)$$

grâce à la loi de Hopf de BSO.

THÉORÈME 3.
(a) Ω_* <u>est un foncteur homologique multiplicatif</u> ;
(b) <u>l'homomorphisme</u> φ <u>respecte les structures multiplicatives</u>.

En effet, $E(X, A) \times E(Y, B)$ s'envoie naturellement dans

$$\Omega_*(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y)) .$$

Pour cela, à $V \xrightarrow{f} X$ et $W \xrightarrow{g} Y$, on associe

$$V \times W \xrightarrow{f \times g} X \times Y .$$

(En fait, il se pose un problème d'arrondissement d'angles, et si l'élément de

$$E(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y))$$

n'est pas bien déterminé, sa classe dans Ω_* l'est.) On vérifie alors facilement que cette application passe au quotient et définit une structure multiplicative sur Ω_*.

Pour démontrer (b), il suffit de remarquer que la classe fondamentale de $(V \times W, \partial(V \times W))$ est le produit des classes fondamentales de $(V, \partial V)$ et de $(W, \partial W)$.

5. Calcul de $\Omega_* \otimes \underset{\sim}{Q}$.

Par tensorisation avec $\underset{\sim}{Q}$, l'homomorphisme φ donne un homomorphisme Φ du foncteur homologique

$$(X, A) \rightsquigarrow \Omega_*(X, A) \otimes \underset{\sim}{Q}$$

dans le foncteur homologique

$$(X, A) \rightsquigarrow H_*(X \times BSO, A \times BSO ; \underset{\sim}{Z}) \otimes \underset{\sim}{Q} .$$

De plus, Φ respecte les structures multiplicatives. Dans la suite, on identifiera $H_*(X \times BSO ; Z) \otimes \underset{\sim}{Q}$ à $H_*(X \times BSO ; \underset{\sim}{Q})$ grâce à la formule des coefficients universels.

THÉORÈME 4. - Φ est un isomorphisme de foncteurs.

(a) Il suffit (à cause du lemme des cinq et des suites exactes d'homologie) de démontrer que pour tout espace X l'homomorphisme

$$\Omega_*(X) \otimes \underset{\sim}{Q} \xrightarrow{\Phi(X)} H_*(X \times BSO ; \underset{\sim}{Q})$$

est un isomorphisme.

(b) On sait que c'est vrai quand X est un point. C'est le résultat fondamental de THOM (cf. [1]).

(c) On en déduit par suspension que $\Phi(S^n)$ est un isomorphisme pour tout n. (On montre que, pour un foncteur homologique T quelconque, on a un isomorphisme fonctoriel T_{p+n} $(S^n$, point) sur T_p (point) $(p \in \underset{\sim}{Z})$; d'où un isomorphisme fonctoriel de T_{p+n} (S^n) sur T_p (point) $\oplus$ T_{p+n} (point) ; ce qui entraîne immédiatement (c).)

(d) $\Phi(X)$ est un isomorphisme si X est un polyèdre fini. Ceci se démontre en ajoutant les cellules les unes après les autres ; le procédé est analogue à celui qui a été employé dans l'exposé 15 pour le foncteur K.

(e) Pour passer des polyèdres finis au cas de X quelconque, nous allons utiliser la remarque suivante : quel que soit X, on peut considérer le système inductif des applications des polyèdres finis dans X. (Un objet de ce système inductif est une application $K_f \xrightarrow{f} X$, où K_f est un polyèdre fini. Un morphisme est une application $\varphi_{fg} : K_g \to K_f$, telle que $g = f \circ \varphi_{fg}$.) Par application du foncteur $\Omega_* \otimes \underset{\sim}{Q}$, ce système inductif nous donne un système inductif de groupes.

LEMME. - Ceci définit $\Omega_*(X) \otimes \underset{\sim}{Q}$ comme la limite inductive des $\Omega_*(K_f) \otimes \underset{\sim}{Q}$.

C'est absolument évident à partir de la définition de $\Omega_*(X)$.

De même, $H_*(X \times BSO ; \underset{\sim}{Q})$ s'identifie à la limite inductive des $H_*(K_f \times BSO ; \underset{\sim}{Q})$. Et puisque Φ est un isomorphisme pour les polyèdres, c'est aussi un isomorphisme pour X.

Observons que, d'après la formule de Künneth, on a

$$H_*(X \times BSO ; \underset{\sim}{Q}) \approx H_*(X ; \underset{\sim}{Q}) \otimes_{\underset{\sim}{Q}} H_*(BSO ; \underset{\sim}{Q}) \approx H_*(X ; \underset{\sim}{Z}) \otimes_{\underset{\sim}{Z}} H_*(BSO ; \underset{\sim}{Q}) .$$

Ceci met en évidence sur $H_*(X \times BSO \,;\, \mathbb{Q})$ une structure de <u>module gradué sur l'algèbre graduée</u> $H_*(BSO \,;\, \mathbb{Q})$. D'ailleurs, par l'application naturelle $X \times pt \to X$, $\Omega_*(X) \otimes \mathbb{Q}$ est un module gradué sur l'algèbre de Thom $\Omega_*(pt) \otimes \mathbb{Q}$. Si on identifie l'algèbre de Thom à $H_*(BSO \,;\, \mathbb{Q})$, l'isomorphisme

$$\Phi : \Omega_*(X) \otimes \mathbb{Q} \to H_*(X \,;\, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} H_*(BSO \,;\, \mathbb{Q})$$

est un <u>isomorphisme pour les structures de module sur</u> $H_*(BSO \,;\, \mathbb{Q})$.

6. Structure de $B \otimes \mathbb{Q}$ comme module sur l'algèbre $H_*(BSO \,;\, \mathbb{Q})$.

Ce qui précède s'applique en particulier lorsqu'on prend pour X l'espace $\mathbb{Z} \times BU$. Compte tenu du fait que l'ensemble des classes d'applications $V \to \mathbb{Z} \times BU$ s'identifie à $K(V)$, on voit que le groupe additif (gradué) de l'algèbre A définie au § 1 s'identifie à $\Omega_*(\mathbb{Z} \times BU)$; donc $A \otimes \mathbb{Q}$ s'identifie à $\Omega_*(\mathbb{Z} \times BU) \otimes \mathbb{Q}$, qui, par Φ , est isomorphe à $H_*(\mathbb{Z} \times BU) \otimes H_*(BSO \,;\, \mathbb{Q})$.

Au § 1, on a considéré le sous-module I de A engendré par les éléments de la forme $(V , \xi \oplus \eta) - (V , \xi) - (V , \eta)$. Or l'addition des fibrés correspond à une loi de Hopf sur $\mathbb{Z} \times BU$. Plus généralement, soit X un espace de Hopf. Soit $I(X)$ le sous-groupe de $\Omega_*(X)$ engendré par les classes d'éléments de la forme

$$(V , f.g) - (V , f) - (V , g) ,$$

où f , g sont des applications $V \to X$, et où $f.g$ est la composée

$$V \xrightarrow{\text{diag.}} V \times V \xrightarrow{f \times g} X \times X \longrightarrow X$$

(la dernière application étant celle de la loi de Hopf de X).

PROPOSITION 3. - <u>Par l'isomorphisme</u> Φ , <u>le sous-module</u> $I(X) \otimes \mathbb{Q}$ <u>de</u> $\Omega_*(X) \otimes \mathbb{Q}$ <u>s'applique sur le sous-module de</u> $H_*(X \,;\, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} H_*(BSO \,;\, \mathbb{Q})$ <u>engendré par les éléments de la forme</u>

$$(uv) \otimes w - (\varepsilon u)v \otimes w - (\varepsilon v)u \otimes w ,$$

<u>où</u> $u , v \in H_*(X \,;\, \mathbb{Q})$, $w \in H_*(BSO \,;\, \mathbb{Q})$, <u>et où</u> $\varepsilon : H_*(X \,;\, \mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$ <u>est l'augmentation en homologie (définie par l'application</u> $X \to pt)$; uv <u>désigne le produit de</u> u et v <u>pour la structure d'algèbre de</u> $H_*(X \,;\, \mathbb{Q})$ <u>définie par la loi de Hopf de</u> X .

<u>Démonstration</u>. - Soit (f , g) l'application composée de la diagonale $V \to V \times V$ et de l'application produit $V \times V \xrightarrow{f \times g} X \times X$. On a

$$f = \pi_1 \circ (f , g) , \qquad g = \pi_2 \circ (f , g) ,$$

en appelant π_1 et π_2 les deux projections $X \times X \to X$. Le couple $(V , (f , g))$ définit un élément de $\Omega_*(X \times X)$, et tout élément de $\Omega_*(X \times X)$ peut être obtenu de cette manière. Comme

$$\Phi : \Omega_*(X \times X) \otimes \underset{\sim}{Q} \to H_*(X \times X ; \underset{\sim}{Q}) \otimes_{\underset{\sim}{Q}} H_*(BSO ; \underset{\sim}{Q})$$

est un isomorphisme, on voit que l'image de $I(X) \otimes \underset{\sim}{Q}$ par $\Phi(X)$ est égale à l'image de l'application

$$H_*(X \times X ; \underset{\sim}{Q}) \otimes_{\underset{\sim}{Q}} H_*(BSO ; \underset{\sim}{Q}) \to H_*(X ; \underset{\sim}{Q}) \otimes_{\underset{\sim}{Q}} H_*(BSO ; \underset{\sim}{Q})$$

égale à $(\alpha_* - (\pi_1)_* - (\pi_2)_*) \otimes 1$, où $\alpha : X \times X \to X$ désigne la loi de Hopf. Or

$$H_*(X \times X ; \underset{\sim}{Q}) \approx H_*(X ; \underset{\sim}{Q}) \otimes_{\underset{\sim}{Q}} H_*(X ; \underset{\sim}{Q})$$

d'après KÜNNETH ; tout élément de $H_*(X \times X ; \underset{\sim}{Q}) \otimes_{\underset{\sim}{Q}} H_*(BSO ; \underset{\sim}{Q})$ est donc une somme d'éléments de la forme $u \otimes v \otimes w$, et la proposition est établie.

La proposition 3 met en évidence le fait que $I(X) \otimes \underset{\sim}{Q}$ est un sous-module de $\Omega_*(X) \otimes \underset{\sim}{Q}$ pour sa structure de module sur l'algèbre de Thom, ce qui est d'ailleurs facile à voir directement. D'une façon précise, l'isomorphisme Φ induit

$$(*) \qquad (\Omega_*(X)/I(X)) \otimes \underset{\sim}{Q} \approx (H_*(X ; \underset{\sim}{Q})/D(X)) \otimes_{\underset{\sim}{Q}} H_*(BSO ; \underset{\sim}{Q}) ,$$

en notant $D(X)$ le sous-espace vectoriel (sur $\underset{\sim}{Q}$) de $H_*(X ; \underset{\sim}{Q})$ engendré par les éléments de la forme

$$uv - (\varepsilon u)v - (\varepsilon v)u .$$

Nous nous intéresserons au cas où $X = \underset{\sim}{Z} \times BU$, la loi de Hopf étant

$$(n , x).(n' , x') = (n + n' , xx') ,$$

où xx' désigne le composé de x et $x' \in BU$ pour la loi de Hopf de BU qui correspond à l'addition des fibrés.

PROPOSITION 4. - *L'injection* $x \to (1 , x)$ *de* BU *dans* $\underset{\sim}{Z} \times BU$ *induit une surjection*

$$\lambda : H_*(BU ; \underset{\sim}{Q}) \to H_*(\underset{\sim}{Z} \times BU ; \underset{\sim}{Q})/D(\underset{\sim}{Z} \times BU) ,$$

dont le noyau est le sous-espace N *des éléments "décomposables" de l'algèbre graduée* $H_*(BU ; \underset{\sim}{Q})$, *c'est-à-dire le sous-espace engendré par les produits* uv, *où* u *et* v *sont homogènes de degrés* ≥ 1.

Pour le voir, considérons plus généralement un espace de Hopf connexe Y (ici, ce sera BU). L'algèbre d'homologie $H_*(\underset{\sim}{Z} \times Y ; \underset{\sim}{Q})$ s'identifie à $\underset{\sim}{Z} \times H_*(Y ; \underset{\sim}{Q})$ muni de la loi de multiplication

$$(n , y).(n' , y') = (n + n' , yy') ,$$

en notant yy' le produit des éléments y et y' de l'algèbre d'homologie $H_*(Y ; \underset{\sim}{Q})$. Ainsi $D(\underset{\sim}{Z} \times Y)$, qu'on notera simplement D , est le sous-espace $\underset{\sim}{Q}$-vectoriel engendré par les éléments de la forme

$$\text{(i)} \qquad (n + n' , yy') - (n , (\varepsilon y')y) - (n' , (\varepsilon y)y') .$$

En particulier, si y et y' sont de degrés $\geqslant 1$, on a $(1 , yy') \in D$; donc λ induit une application linéaire

$$\lambda' : H_*(Y ; \underset{\sim}{Q})/N \to H_*(\underset{\sim}{Z} \times Y ; \underset{\sim}{Q})/D .$$

On veut montrer que c'est un isomorphisme. Soit $e \in H_0(Y ; \underset{\sim}{Q})$ l'élément unité de l'algèbre d'homologie, qui constitue une base de l'espace vectoriel $H_0(Y ; \underset{\sim}{Q})$. Définissons une application linéaire

$$\mu : H_*(\underset{\sim}{Z} \times Y ; \underset{\sim}{Q}) \to H_*(Y ; \underset{\sim}{Q})/N$$

comme suit : μ envoie la classe de (n , e) dans la classe de ne et, pour y homogène de degré $\geqslant 1$, envoie (n , y) dans y . Les éléments de la forme (i) sont envoyés par μ dans 0 : on le vérifie lorsque $y = y' = e$, puis lorsque y est de degré 1 et $y' = e$, et enfin lorsque y et y' sont tous deux homogènes et de degré $\geqslant 1$ (dans ce dernier cas, μ envoie l'élément (i) en $yy' \in N$). Ainsi μ passe au quotient et définit une application linéaire

$$\mu' : H_*(\underset{\sim}{Z} \times Y ; \underset{\sim}{Q})/D \to H_*(Y ; \underset{\sim}{Q})/N ,$$

et il est immédiat de vérifier que cette application est réciproque de l'application λ' .

C. Q. F. D.

La proposition 4 et l'isomorphisme (*) montrent que Φ <u>induit un isomorphisme de</u> $B \otimes \underset{\sim}{Q}$ <u>(comme module sur l'algèbre de Thom</u> $\Omega_*(pt) \otimes \underset{\sim}{Q}$) <u>sur</u>

$$(H_*(BU ; \underset{\sim}{Q})/N) \otimes_{\underset{\sim}{Q}} H_*(BSO ; \underset{\sim}{Q})$$

<u>comme module sur l'algèbre</u> $H_*(BSO ; \underset{\sim}{Q})$.

7. Structure de $B \otimes \underset{\sim}{Q}$ comme algèbre.

Au § 1, on a considéré sur $A \otimes \underset{\sim}{Q}$ et sur son quotient $B \otimes \underset{\sim}{Q}$ une structure de

Q-algèbre graduée, la multiplication étant définie par le produit tensoriel des fibrés :

$$(V , \xi) \times (W , \eta) = (V \times W ; \xi \otimes \eta) , \qquad \xi \in K(V) , \quad \eta \in K(W) .$$

L'isomorphisme $\Phi : A \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\approx} H_*(\mathbb{Z} \times BU ; \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} H_*(BSO ; \mathbb{Q})$ est un isomorphisme d'algèbres, à condition de considérer sur $\mathbb{Z} \times BU$ non plus la structure d'espace de Hopf envisagée au § 6, mais celle qui correspond au produit tensoriel des fibrés. Si on note $(x , x') \to x \wedge x'$ l'application $BU \times BU \to BU$ qui correspond au produit tensoriel des fibrés, la structure d'espace de Hopf de $\mathbb{Z} \times BU$ considérée désormais est

$$((n , x) , (n' , x')) \to (nn' , x \wedge x') .$$

Puisque I est un idéal de l'algèbre A, et que Φ applique $I \otimes \mathbb{Q}$ sur $D(\mathbb{Z} \times BU) \otimes_{\mathbb{Q}} H_*(BSO ; \mathbb{Q})$ (avec les notations du § 6), $D(\mathbb{Z} \times BU)$ est un idéal de $H_*(\mathbb{Z} \times BU ; \mathbb{Q})$ pour la structure d'algèbre considérée maintenant, et Φ induit un isomorphisme d'algèbres

$$B \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\approx} (H_*(\mathbb{Z} \otimes BU ; \mathbb{Q})/D(\mathbb{Z} \times BU)) \otimes_{\mathbb{Q}} H_*(BSO ; \mathbb{Q}) .$$

De plus, l'injection $x \to (1 , x)$ de BU dans $\mathbb{Z} \times BU$ est compatible avec les structures d'espace de Hopf considérées maintenant ; donc l'isomorphisme défini dans la proposition 4 :

$$H_*(BU ; \mathbb{Q})/N \xrightarrow{\approx} H_*(\mathbb{Z} \times BU ; \mathbb{Q})/D(\mathbb{Z} \times BU)$$

est un isomorphisme d'algèbres. En résumé, Φ définit un isomorphisme de l'algèbre graduée $B \otimes \mathbb{Q}$ sur le produit tensoriel des algèbres graduées $H_*(BU ; \mathbb{Q})/N$ et $H_*(BSO ; \mathbb{Q})$, étant entendu que la structure multiplicative de $H_*(BU ; \mathbb{Q})/N$ est celle définie par le produit tensoriel des fibrés.

Il reste à expliciter les deux algèbres $H_*(BU ; \mathbb{Q})/N$ et $H_*(BSO ; \mathbb{Q})$. Cette dernière est connue : d'après THOM, c'est une algèbre de polynômes

$$\mathbb{Q}[p_1 , \dots , p_i , \dots]$$

où $p_i \in H_{4i}(BSO ; \mathbb{Q})$ est l'image de la classe fondamentale de l'espace projectif complexe $P_{2i}(\mathbb{C})$ par l'application classifiante $P_{2i}(\mathbb{C}) \to BSO$ du fibré tangent (stable) de $P_{2i}(\mathbb{C})$. Il s'ensuit que si on considère p_i comme un élément de $B \in \mathbb{Q}$, cet élément est défini par le couple $(P_{2i}(\mathbb{C}) , 1)$, en notant 1 le fibré trivial de dimension 1, de base $P_{2i}(\mathbb{C})$.

Reste à déterminer l'algèbre $H_*(BU ; \mathbb{Q})/N$. Rappelons d'abord (cf. [3], § 1) que $H_*(BU ; \mathbb{Z})$, pour la structure d'algèbre définie par l'addition des fibrés, est une algèbre de polynômes

$$\underset{\sim}{Z}[c_1 , \dots , c_n , \dots]$$

où chaque c_n , de degré $2n$, est l'image de la classe fondamentale de $P_n(\underset{\sim}{C})$ par l'application classifiante $P_n(\underset{\sim}{C}) \to BU$ du fibré canonique $E_n(\underset{\sim}{C})$, de base $P_n(\underset{\sim}{C})$, à fibres de dimension (complexe) 1 . Donc, $H_*(BU ; \underset{\sim}{Q})/N$ est un $\underset{\sim}{Q}$-module **libre** ayant pour base les images des c_n (notées encore c_n), à condition de rajouter $c_o = 1$. Il reste maintenant à trouver la table de multiplication des c_n pour la structure multiplicative définie par le produit tensoriel des fibrés.

Le produit $c_p \circ c_q \in H_{2(p+q)}(BU ; \underset{\sim}{Q})/N$ est la classe (modulo le sous-espace N des éléments décomposables) de l'image, dans $H_{2(p+q)}(BU ; \underset{\sim}{Q})$, de la classe fondamentale de la variété $P_p(\underset{\sim}{C}) \times P_q(\underset{\sim}{C})$, par l'application

$$P_p(\underset{\sim}{C}) \times P_q(\underset{\sim}{C}) \to BU$$

qui est classifiante pour le fibré $E_p(\underset{\sim}{C}) \otimes E_q(\underset{\sim}{C})$.

Pour tout $\xi \in K(V)$, $(\dim V = 2n)$, l'image de la classe fondamentale de la variété V par l'application classifiante $V \to BU$ du fibré ξ est un élément de $H_{2n}(BU ; \underset{\sim}{Q})$, dont l'image dans $H_*(BU ; \underset{\sim}{Q})/N$ est un multiple entier de c_n , qu'on notera $\lambda(\xi)\ c_n$. On attache ainsi à tout (V , ξ) un nombre entier $\lambda(\xi)$.

PROPOSITION 5. - <u>Soient</u> $\xi \in K(V)$, $\dim V = 2p$, <u>et</u> $\eta \in K(W)$, $\dim W = 2q$. <u>Alors</u>

$$\lambda(\xi \otimes \eta) = (p , q)\ \lambda(\xi)\ \lambda(\eta) ; \qquad \text{avec} \quad (p , q) = \frac{(p + q)!}{p!\ q!} .$$

Si on admet pour un instant cette proposition, et qu'on observe que $\lambda(E_p(\underset{\sim}{C})) = 1$, $\lambda(E_q(\underset{\sim}{C})) = 1$ (d'après la définition de c_p et de c_q), on obtient

$$c_p \cdot c_q = \lambda(E_p(\underset{\sim}{C}) \otimes E_q(\underset{\sim}{C}))\ c_{p+q} = (p , q)\ c_{p+q} .$$

Cette loi de multiplication montre que l'<u>algèbre</u> $H_*(BU ; \underset{\sim}{Q})/N$ <u>est une algèbre de polynômes à un générateur</u> c_1 , <u>de degré</u> 2 . L'élément correspondant de l'algèbre $B \otimes \underset{\sim}{Q}$ est défini par le couple $(P_1(\underset{\sim}{C}) , E_1(\underset{\sim}{C}))$, ce qui achève de prouver le théorème 1 du § 1.

Il ne reste plus qu'à démontrer la proposition 5. Pour cela, on observe que le caractère de Chern $ch(\xi \otimes \eta)$ est égal au produit $ch(\xi).ch(\eta)$, pour la multiplication externe en cohomologie

$$H^*(V ; \underset{\sim}{Q}) \otimes H^*(W ; \underset{\sim}{Q}) \to H^*(V \times W ; \underset{\sim}{Q}) .$$

Si on prend la valeur du caractère de Chern sur la classe fondamentale d'homologie, on a donc

$$(**) \qquad \langle [V \times W] \ , \ ch(\xi \otimes \eta) \rangle = \langle [V] \ , \ ch(\xi) \rangle . \langle [W] \ , \ ch(\eta) \rangle \ .$$

Dans $H^*(BU \ ; \ \underset{\sim}{Q})$, le caractère de Chern est un élément dont on notera ch_n la composante de degré $2n$. On sait ([3], § 1) que ch_n est orthogonal aux éléments décomposables de $H_{2n}(BU \ ; \ \underset{\sim}{Q})$, et que

$$\langle c_n \ , \ ch_n \rangle = 1/n!$$

(cela provient du fait suivant. Si on note $c_i^! \in H^{2i}(BU \ ; \ \underset{\sim}{Q})$ les classes de Chern, on a $\langle c_n \ , \ (c_1^!)^n \rangle = 1$, et c_n est orthogonal à tous les monômes autres que $(c_1^!)^n$ (cf. [3], § 1) ; de plus, le coefficient de $(c_1^!)^n$ dans ch_n est évidemment égal à $1/n!$).

Ainsi ch_n définit une forme linéaire sur l'espace des éléments de degré $2n$ de $H_*(BU \ ; \ \underset{\sim}{Q})/N$, et, pour un $\xi \in K(V)$, $\dim V = 2p$, on a

$$\langle [V] \ , \ ch(\xi) \rangle = \frac{1}{p!} \lambda(\xi) \ .$$

Ceci, joint à la relation (**), donne aussitôt, pour $\dim V = 2p$, $\dim W = 2q$, et en posant $p + q = n$:

$$\frac{1}{n!} \lambda(\xi \otimes \eta) = \frac{1}{p!} \lambda(\xi) \ . \ \frac{1}{q!} \lambda(\eta) \ ,$$

ce qui établit la proposition 5.

8. Calcul des indices j_a et j_t sur les générateurs de l'algèbre de cobordisme $B \otimes \underset{\sim}{Q}$.

Rappelons (Exposé 20, page 20-09) que, pour tout $W \in K(X)$ (où X est une variété orientée de dimension paire), on a posé

$$j_a(W) = i_a(W.\chi_o) \ , \qquad j_t(W) = i_t(W.\chi_o) \ ,$$

avec $\chi_o = \chi(\sigma_1(D_o))$, élément de $K(B(X) \ , \ S(X))$ défini par l'opérateur D_o de l'exposé 17. Nous voulons vérifier que j_a et j_t sont égaux sur les générateurs de l'algèbre $B \otimes \underset{\sim}{Q}$, c'est-à-dire :

(i) sur les éléments $(P_{2n}(\underset{\sim}{C}) \ , \ 1)$, où 1 désigne le fibré trivial de dimension 1 , de base $P_{2n}(\underset{\sim}{C})$;

(ii) sur l'élément $(P_1(\underset{\sim}{C}) \ , \ E_1(\underset{\sim}{C}))$.

Commençons par le cas (i). Cela revient à prouver que $i_a(\chi_o) = i_t(\chi_o)$ pour chacune des variétés orientées $P_{2n}(\underset{\sim}{C})$. Or on a vu (exposé 17, proposition 2.2) que l'indice analytique de l'opérateur D_o d'une variété X orientée de dimension $4n$ est égal à l'index de Thom-Hirzebruch de X, c'est-à-dire à l'indice d'inertie de la forme quadratique définie par l'application bilinéaire (symétrique), composée des applications

$$H^{2n}(X ; \underset{\sim}{R}) \times H^{2n}(X ; \underset{\sim}{R}) \to H^{4n}(X ; \underset{\sim}{R}) \to \underset{\sim}{R} ,$$

la première application étant le cup-produit, la seconde définie par la valeur sur la classe fondamentale d'homologie. Si X est connexe, la seconde application est un isomorphisme. Dans le cas (qui nous intéresse) où $X = P_{2n}(\underset{\sim}{C})$, l'algèbre de cohomologie est une algèbre de polynômes tronquée à un générateur $c \in H^2(X)$, la dimension de $H^{2n}(X)$ est 1, et la forme quadratique est positive, puisque le générateur de $H^{4n}(X)$ est c^{2n}, carré du générateur c^n de $H^{2n}(X)$. Donc l'index de Thom-Hirzebruch de $P_{2n}(C)$ est égal à 1. Quant à l'indice topologique de D_o, il est donné par la formule (cf. Exposé 19, page 19-12)

$$\langle L_n(p_1 , \dots , p_n) , [X]\rangle$$

pour une variété X de dimension $4n$, où L_n désigne le polynôme de Hirzebruch en les classes de Pontrjagin du fibré tangent à X (cf. [7], ch. I, § 1) ; or, pour l'espace projectif $P_{2n}(\underset{\sim}{C})$, la valeur de $L_n(p_1 , \dots , p_n)$ sur la classe fondamentale d'homologie est 1 (cf. [7], lemme 1.5.1).

On a ainsi vérifié que les deux indices i_a et i_t de l'opérateur D_o coïncident sur les générateurs de l'algèbre de Thom, ce qui prouve incidemment qu'ils sont égaux pour tous les éléments de l'algèbre de Thom : cette égalité n'est autre que le théorème de Hirzebruch relatif à l'index ([7], Hauptsatz 8.2.2).

Reste le cas (ii). Il suffit de voir que i_a et i_t sont égaux pour tout opérateur elliptique sur $P_1(\underset{\sim}{C})$. On veut donc montrer que les deux homomorphismes i_a et i_t :

$$K(B(X) , S(X)) \to \underset{\sim}{Q}$$

sont égaux lorsque $X = P_1(\underset{\sim}{C})$. Or

$$K(B(X) , S(X)) \otimes \underset{\sim}{Q} \approx K(X) \otimes \underset{\sim}{Q} \qquad \text{(exposé 20, page 20-09)}$$

est ici, pour $X = P_1(\underset{\sim}{C}) = S^2$,

$$K(S^2) \otimes \underset{\sim}{Q} \approx H^{pair}(S^2 ; \underset{\sim}{Q}) ;$$

c'est donc un espace vectoriel de dimension 2 sur $\underset{\sim}{Q}$. Il suffira donc de vérifier l'égalité des indices i_a et i_t pour deux opérateurs elliptiques sur $P_1(\underset{\sim}{C})$, convenablement choisis. Prenons d'abord l'opérateur D_o ; alors i_a et i_t sont nuls, puisque la dimension 2 (de S^2) n'est pas multiple de 4 (cf. Exposé 17). Il suffit ensuite de choisir un opérateur D tel que $\varphi^{-1}(\mathrm{ch}(D))$ et $\varphi^{-1}(\mathrm{ch}(D_o))$ ne soient pas proportionnels. Or

$$\varphi^{-1}(\mathrm{ch}(D_o)) = (e^x - e^{-x})/x = 2 .$$

Prenons pour D l'opérateur d'', opérant de l'espace $\Omega^{o,o}$ des fonctions dans l'espace $\Omega^{o,1}$ des formes différentielles de type $(0, 1)$; on a (cf. Exposé 19, page 19-08)

$$\varphi^{-1}(\mathrm{ch}(d'')) = (1 - e^{-x})/x = 1 - x/2 .$$

Il n'est pas proportionnel au précédent. On a

$$\varphi^{-1}(\mathrm{ch}\ d'') . \tau(P_1(\underset{\sim}{C})) = x/(e^x - 1) = 1 - x/2 .$$

Rappelons que x désigne ici la classe de Chern du fibré cotangent à $P_1(\underset{\sim}{C})$, qui est égale à -2 fois la classe fondamentale de la variété orientée $P_1(\underset{\sim}{C})$ (cf. exposé 5, théorème 2.5). La valeur de $1 - x/2$ sur la classe fondamentale d'homologie de $P_1(\underset{\sim}{C})$ est donc 1. Tel est l'indice topologique de d'' pour $P_1(\underset{\sim}{C})$.

Pour finir, il reste à vérifier que l'indice analytique de d'' est 1. Or le noyau de d'' est le sous-espace de $\Omega^{o,o}$ formé des fonctions constantes (espace de dimension 1), et on va montrer que le conoyau de d'' est zéro, ce qui prouvera bien que l'indice analytique de d'' est 1.

Il reste simplement à prouver que, pour l'espace $P_1(\underset{\sim}{C})$ ("sphère de Riemann"), d'' applique $\Omega^{o,o}$ <u>sur</u> $\Omega^{o,1}$: toute forme différentielle ω de type $(0, 1)$ sur $P_1(\underset{\sim}{C})$ est de la forme $d''f$, pour une fonction f convenable. Pour le voir, on considère le recouvrement de la sphère de Riemann formé des deux ouverts U et U' suivants : U est le plan de la variable complexe z à distance finie, U' est le complémentaire de $z = 0$, point à l'infini compris. Il est bien connu qu'il existe dans U une fonction g telle que $d''g = \omega$ dans U ; de même, on a une fonction g' dans U', telle que $d''g' = \omega$ dans U'. Dans $U \cap U'$ (c'est-à-dire pour $0 < |z| < \infty$), on a $d''(g - g') = 0$, autrement dit $g - g'$ est holomorphe. On sait qu'on a alors

$$g - g' = h - h' ,$$

où h est holomorphe dans U, et h' holomorphe dans U'. Alors la fonction

f , égale à $g - h$ dans U , et à $g' - h'$ dans U' , est telle que $d''f = \omega$, ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

Les résultats qui ont été admis sont démontrés dans :

[1] THOM (René). - Quelques propriétés globales des variétés différentiables, Comment. Math. Helvet., t. 28, 1954, p. 18-86.

Pour d'autres renseignements :

[2] BOTH (R.), ATIYAH (M.) and SINGER (I.). - Topological seminar. Fall 1962. - Cambridge (Mass., Harvard University).

[3] CARTAN (Henri). - Démonstration homologique des théorèmes de périodicité de Bott, II : Homologie et cohomologie des groupes classiques et leurs espaces homogènes, Séminaire Cartan, t. 12, 1959/60, n° 17, 32 p.

[4] CONNER (P. E.) and FLOYD (E. E.). - Cobordism theories. Notes du Congrès de Seattle, 1963 (multigr.).

[5] DOLD (A.). - Relations between ordinary and extra-ordinary homology. Notes du Congrès de Aarhus, 1962 (multigr.).

[6] DOUADY (Adrien). - Variétés à bords anguleux et voisinages tubulaires ; Théorèmes d'isotopie et de recollement ; Arrondissement des arêtes, Séminaire Cartan, t. 14, 1961/62, n° 1, 2 et 3, 11, 16 et 25 p.

[7] HIRZEBRUCH (F.). - Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. 2te Auflage. - Berlin, Springer-Verlag, 1962 (Ergebnisse der Mathematik, Neue Folge, 9).