Louis Boutet de Monvel

Passage des variétés de dimension paire aux variétés de dimension quelconque

Séminaire Henri Cartan, tome 16, nº 2 (1963-1964), exp. nº 24, p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1963-1964__16_2_A9_0>

Séminaire CARTAN-SCHWARTZ
16e année, 1963/64, n° 24

15 juin 1964

PASSAGE DES VARIÉTÉS DE DIMENSION PAIRE AUX VARIÉTÉS DE DIMENSION QUELCONQUE

par Louis BOUTET de MONVEL

Le but de ce paragraphe est de démontrer pour les variétés de dimension impaire la formule d'Atiyah-Singer. Pour cela, nous nous servons de la formule du produit

$$i(A \otimes B) = i(A).i(B) ,$$

valable simultanément pour l'indice topologique et pour l'indice analytique : il suffira de vérifier la formule d'Atiyah-Singer pour un opérateur de Calderon-Zygmund d'indice non nul sur une variété de dimension impaire. On l'en déduira pour tous les autres, par division, à partir de la même formule, qui a été démontrée pour les opérateurs sur une variété de dimension paire.

Le modèle pris est le cercle X des nombres complexes de module 1, avec son orientation usuelle. z désignera un point du cercle ; θ son argument. Nous le munissons de sa mesure ordinaire (masse 2π).

Considérons l'opérateur de convolution par

$$\mathrm{vp}\, \frac{i}{2\pi} \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2} .$$

La distribution $\mathrm{vp}\, \frac{i}{2\pi} \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2}$ est C^∞ dans le complémentaire de l'origine de X, et, au voisinage de $\theta = 0$, s'écrit $\mathrm{vp}\, \frac{i}{\pi\theta}$ + fonction C^∞ .

L'opérateur considéré est donc un opérateur de Calderon-Zygmund qui a pour symbole $Y(\xi) - Y(-\xi)$ (comme le montre un calcul élémentaire de transformées de Fourier), $Y(\xi)$ désignant la fonction de Heaviside :

$$Y(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi > 0 \\ -1 & \text{si } \xi < 0 . \end{cases}$$

Par ailleurs, la transformée de Fourier de $\frac{i}{2\pi}\, \mathrm{vp} \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2}$ a pour coefficients

$$a_n = \begin{cases} +1 & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 . \\ -1 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

A partir de cela, nous nous construisons deux opérateurs intégraux singuliers :

$$A = \frac{i}{4\pi}\, \mathrm{vp} \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2} ,$$

qui a pour symbole $\sigma_A(\xi) = Y(\xi)$ et pour coefficients de Fourier

$$a_n = \begin{cases} +1 & \text{si } n \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}.$$

$$B = -\frac{i}{4\pi} \text{vp} \cot g \frac{\theta}{2} + \frac{\delta}{2} - \frac{1}{2},$$

qui a pour symbole $\sigma_B(\xi) = Y(-\xi)$ et pour coefficients de Fourier

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geqslant 0 \\ +1 & \text{si } n < 0 \end{cases}.$$

Dans l'espace de Hilbert $L^2(X, \frac{\theta}{2\pi})$, qui possède une base orthonormale formée des $e_n = e^{ni\theta}$,

> A est la projection orthogonale sur le demi-espace $\bigoplus_{n\geqslant 0} \underset{\sim}{C} e_n$,
>
> B est la projection orthogonale sur le demi-espace $\bigoplus_{n<0} \underset{\sim}{C} e_n$.

L'opérateur de Calderon-Zygmund $C = A + e^{i\theta} B$ opère donc de la façon suivante :

$$e_n \rightsquigarrow \begin{cases} e_n & \text{si } n \geqslant 0 \\ e_{n+1} & \text{si } n < 0 \end{cases}.$$

Il a pour indice $\dim \operatorname{Ker} C - \dim \operatorname{Coker} C = 1$. Le symbole de C est

$$\begin{aligned} \sigma_C(\theta, \xi) &= Y(\xi) + e^{i\theta} Y(-\xi) \\ &= Y(\xi) + z\, Y(\xi). \end{aligned}$$

Examinons le fibré η correspondant au symbole de C sur $B(X)/S(X)$. Ici,

$$B(X) = [-1, +1] \times X, \qquad S(X) = \{-1, +1\} \times X.$$

η s'obtient en établissant, sur le fibré trivial

$$B(X) \times \underset{\sim}{C} = [-1, +1] \times X \times \underset{\sim}{C},$$

au-dessus de $B(X)$, la relation d'équivalence

$$(-1, z, zu) \sim (+1, z, u) \sim (+1, z', u)$$

$(z \in X,\ z' \in X,\ u \in \underset{\sim}{C})$, et en considérant le quotient comme fibré au-dessus de $B(X)/S(X)$.

Pour éviter le calcul du groupe de Grothendieck $K(B(X)/S(X))$, nous aurons recours à l'astuce suivante :

Soit S la sphère orientée (ou la droite projective complexe) obtenue en recollant les bords des deux disques D_α, D_β de nombres complexes de module $\leqslant 1$ par $(z\,,\alpha) \sim (\frac{1}{z}\,,\beta)$ pour $|z| = 1$; c'est la sphère de Riemann usuelle. (Prolongeons en effet cette application $(z\,,\alpha) \rightsquigarrow (\frac{1}{z}\,,\beta)$ à $\underset{\sim}{C} - \{0\}$; on retrouve les deux cartes usuelles de la sphère de Riemann sur $\underset{\sim}{C}$, avec l'identification $(z\,,\alpha) \rightsquigarrow (\frac{1}{z}\,,\beta)$ de $\underset{\sim}{C} - \{0\}$ sur $\underset{\sim}{C} - \{0\}$.) Soit f l'application de S sur $B(X)/S(X)$ définie par

$$(z\,,\alpha) \rightsquigarrow (|z| - 1\,, \frac{z}{|z|})\,, \qquad (z\,,\beta) \rightsquigarrow (1 - |z|\,, \frac{\bar z}{|z|})\,.$$

S $\qquad$ $B(X)/S(X) \simeq S/A$

(identification des 2 pôles nord et sud de S)

Si A est l'ensemble des deux pôles nord et sud de S, f se factorise en $S \to S/A \xrightarrow{g} B(X)/S(X)$, où g est un homéomorphisme. En outre, f et g conservent l'orientation. Le fibré image réciproque $f^*\eta$ s'obtient, comme on le voit géométriquement, en recollant les fibrés triviaux $D_\alpha \times \underset{\sim}{C}$ et $D_\beta \times \underset{\sim}{C}$ (sur D_α et D_β) par

$$(z\,,\alpha\,,\frac{1}{z}u) \sim (\bar z\,,\beta\,,u) = (\frac{1}{z}\,,\beta\,,u) \qquad \text{pour } |z| = 1\,,\ u \in \underset{\sim}{C}\,.$$

$f^*(\eta)$ est donc l'inverse du fibré de Hopf (qu'on obtient en recollant deux fibrés triviaux sur D_α, D_β par $(z\,,\alpha\,,u) \sim (\frac{1}{z}\,,\beta\,,\frac{1}{z}u)$ au bord). $f^*(\eta)$ est donc le générateur <u>positif</u> de $K(S)$.

Nous devons maintenant calculer l'indice topologique de C à partie du fibré η sur $B(X)/S(X)$. La classe de Todd est 1, parce que le fibré tangent de $B(X)$ est trivial. Nous devrons donc prendre la valeur de

$$\mathrm{ch}\,\eta \in H^*(B(X)\,, S(X)\,; \underset{\sim}{Q})$$

sur la classe fondamentale de $B(X)$ mod $S(X)$, ou encore la valeur de $g^*\eta$ sur la classe fondamentale de S mod A, ou de $f^*\eta$ sur la classe fondamentale de S ; c'est 1. Donc, la formule de l'indice est vraie pour l'opérateur C sur X, ce qui achève de démontrer la formule générale.