Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux
dérivées partielles

Hans Lewy

La réflexion des fonctions harmoniques

Séminaire Jean Leray (1962-1963), p. 181-189
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1962-1963____181_0>

© Séminaire Jean Leray (Collège de France, Paris), 1962-1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Jean Leray » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

LA RÉFLEXION DES FONCTIONS HARMONIQUES

par

Hans LEWY

...OBLE I
...E
...ES PURES
...RIER

THÉORÈME 1 : Soit $u(x,y)$ une fonction harmonique dans un domaine D limité en partie par un segment ouvert σ de l'axe des x : D est un demi-voisinage de σ du côté $y < 0$. Soit $u \in C^1(D \cup \sigma)$ et soit v une harmonique conjuguée de u. Si u satisfait sur σ à une relation

(1) $$\frac{\partial u}{\partial y} = A(x,u,v,\frac{\partial u}{\partial x})$$

où A est fonction analytique de ses arguments pour toutes les valeurs prises sur σ, alors u et v sont analytiques sur σ ; [1][2] .

Dans le cas d'une (1) linéaire

(1L) $$\frac{\partial u}{\partial y} = a_1(x)u + a_2(x)v + a_3(x)\frac{\partial u}{\partial x} + a_4(x)$$

il y a davantage : si les fonctions $a_j(z)$, $j = 1,\dots,4$ sont holomorphes pour $z = x + iy$ dans $D \cup \sigma$ (et réelles sur σ) $\underline{u}$ et $\underline{v}$ peuvent être prolongés harmoniquement dans $D \cup \sigma \cup \bar{D}$, où $\bar{D} = \left\{ (x,y) \mid (x,-y) \in D \right\}$, pourvu que D soit simplement connexe. On peut admettre que D fait partie d'une surface de Riemann et l'on interprètera $D \cup \sigma \cup \bar{D}$ de la même manière.

<u>Preuve</u> :

Posons $2F(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$; $F(z)$ est connue et C^1 dans $D \cup \sigma$. Il s'agit de prolonger $F(z)$ du côté $y > 0$ à travers σ. Soit maintenant z un point de $\bar{D}$; posons $G(z) = \bar{F}(\bar{z})$, la barre désignant la complexe conjuguée.

$G(z)$ est connue et C^1 dans $\bar{D} \cup \sigma$ et analytique dans $\bar{D}$.

Sur σ on a $u(x,0) = F(x) + G(x)$, $v(x,0) = -i\ (F(x) - G(x)\ )$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = F'(x) + G'(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = i\ (F'(x) - G'(x)\ ).$$

Portons ces expressions dans (1) et remplaçons partout x par z. On obtient ainsi une équation différentielle E du premier ordre entre z, $F(z)$, $G(z)$, remplie par hypothèse pour z sur σ. Nous employons E pour construire $G(z)$ dans D, en choisissant un point initial x_0 sur σ. Il est vrai que la démonstration classique de l'existence et d'unicité de la solution $G(z)$ suppose que le point initial fasse partie du domaine complexe tandis qu'ici il se trouve sur sa frontière. Mais on peut se servir du théorème d'existence pour les équations différentielles à variable indépendante réelle, en commençant la construction de $G(z)$ sur un segment s perpendiculaire a σ au point x_0 et en procédant ensuite sur des parallèles à l'axe des x passant par les points de s. Le résultat $G(z)$ doit être holomorphe dans D près de x_0 en vertu du théorème classique pour les domaines complexes et continue en x et y en vertu de la continuité par rapport au paramètre y de l'équation E et des valeurs initiales sur s. Or, sur σ, nous connaissons une solution $G(z) = G(x)$ de E, à savoir $G(x) = \bar{F}(x)$. A cause de l'unicité, ce $G(x)$ est donc celui de notre construction et la limite de $G(z)$ quand $z \in D$ s'approche d'un point x de σ. Par définition $G(z)$ est continu aussi dans $\sigma \cup \bar{D}$. Donc $G(z)$ est holomorphe au voisinage de x_0, et x_0 est arbitraire sur σ. D'où le théorème 1 relatif à la condition (1). Dans le cas de (1L) l'équation E sera linéaire et de premier ordre. Il s'ensuit qu'on obtient $G(z)$ dans tout D par des quadratures. Ceci équivaut à dire que $F(z)$ se prolonge analytiquement et explicitement dans $\bar{D}$.

Remarquons qu'une transformation conforme permet toujours de remplacer une frontière analytique quelconque par un segment de droite sans changer le caractère harmonique de u et v ou l'analycité de la condition aux limites (1). Notons que le théorème a des applications intéressantes dans l'hydrodynamique des fluides idéaux.

Surfaces minima.

On sait que toute courbe Γ de Jordan de l'espace à trois dimensions est frontière d'une surface minima, S , image conforme d'un cercle ou d'un demi plan. Supposons que Γ est rectifiable et contient une portion régulière, soit p. Peut-on affirmer que S se comporte régulièrement au voisinage de p ? Par exemple, est-ce que S possède un plan tangent aux points de p ? A ce que je sais, on ne connait pas de réponse sans hypothèse ultérieure, même si p est C^{∞}.

Si p est analytique, la réponse est affirmative, et il y a prolongement analytique de S à travers de p. [3] Ce problème est semblable à celui du théorème 1 en ce qu'il concerne le prolongement de fonctions harmoniques, mais sa solution est plus difficile. Il s'agit maintenant de trois fonctions $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$, $\zeta(x,y)$, harmoniques et bornées dans tout $y > 0$, continues dans $y \geqslant 0$ et satisfaisant aux conditions

$$\xi_x^2 + \eta_x^2 + \zeta_x^2 = \xi_y^2 + \eta_y^2 + \zeta_y^2 ,$$

$$(2) \qquad \xi_x \xi_y + \eta_x \eta_y + \zeta_x \zeta_y = 0 ,$$

et qui appliquent $y = 0$ sur Γ de sorte que l'axe des x , près de $x = 0$, devient l'image monotone de la courbe analytique p

$$(3) \qquad \eta = \varphi(\xi)\ ,\ \zeta = \psi(\xi)\ ,$$

(où l'on peut supposer $\xi(0,0) = 0$, $\varphi(0) = \psi(0) = \varphi'(0) = \psi'(0) = 0$).

Soit $\xi^*(x,y)$, $\eta^*(x,y)$, $\zeta^*(x,y)$ une surface minima conjuguée S^*, c'est-à-dire la surface formée par des harmoniques conjuguées de ξ, η, ζ . On va construire une fonction $\Xi(z)$, analytique pour $y>0$ près de l'origine et qui se réduit à $\xi(x,0)$ quand z s'approche de l'axe des x . Cela suffit évidemment pour le prolongement analytique de $\lambda(z) = \xi(x,y) + i\xi^*(x,y)$. Quant à celui de $\mu(z) = \eta(x,y) + i\,\eta^*(x,y)$ et $\nu(z) = \zeta(x,y) + i\,\zeta^*(x,y)$, on posera, pour $y<0$, $2\overline{\varphi}(\Xi(\bar z)) = \mu(z) + \overline{\mu}(\bar z)$ et $2\overline{\psi}(\Xi(\bar z)) = \nu(z) + \overline{\nu}(\bar z)$ pour obtenir leur prolongement analytique.

Voici l'équation différentielle qui dirige la construction de $\Xi(z)$:

$$(4) \quad d\,\Xi(z) \doteq [\,1 + \varphi'^2(\Xi) + \psi'^2(\Xi)\,]^{-1}\,(d\lambda(z) + \varphi'(\Xi)d\mu(z) + \\ + \psi'(\Xi)d\nu(z)\,),$$

avec $\Xi(0) = 0$.

Le signe $\doteq$ rappelle qu''on cherche une solution de (4) intégrée, précaution nécessaire dûe à l'ignorance du comportement de $\lambda(z)$, $\mu(z)$, $\nu(z)$ sur et en passant au voisinage de l'axe des x . Renvoyons à plus tard la preuve que λ , μ , ν sont continus dans $y \geqq 0$, que, sur l'axe des x , ils sont absolument continus en fonctions de la longueur d'arc s de Γ , et qu'une propriété analogue est vraie pour les images de segments perpendiculaires à l'axe. Alors la construction de $\Xi(z)$ s'obtient d'une façon pareille à celle de $G(z)$ du théorème 1 , et on a l'unicité de la solution.

Remplaçons (2) par l'équation équivalente

$$(2') \qquad \xi_x \, \xi_x^* + \eta_x \, \eta_x^* + \zeta_x \, \zeta_x^* = 0$$

pour $y > 0$. Si l'on savait que (2') reste vrai pour $y = 0$ presque partout par rapport à s, on conclurait $\Xi(x) = \xi(x,0)$. En effet, en substituant $\xi(x,0)$ à $\Xi(x)$ dans (4), on trouve l'identité

$$d\,\xi(x,0) \doteq [1 + \varphi'^2(\xi(x,0)) + \psi'^2(\xi(x,0))]^{-1} \cdot \{d\xi(x,0) + \varphi'(\xi)d\eta(x,0) + \psi'(\xi)d\zeta(x,0) + i(d\,\xi^*(x,0) + \varphi'(\xi)d\eta^*(x,0) + \psi'(\xi)d\zeta^*(x,0))\}$$

vu que $\eta = \varphi(\xi)$, $\zeta = \psi(\xi)$, et que la pertie imaginaire s'annulle à cause de (2'). Puisque $\Xi(0) = \xi(0,0) = 0$, l'unicité donne donc $\Xi(x) = \xi(x,0)$, d'où l'analycité de $\lambda(z)$ pour $y \geqslant 0$.

Reste à démontrer que $\lambda(z)$, $\mu(z)$, $\nu(z)$ sont absolument continus en fonctions de la longueur d'arc s de Γ, qu'un fait analogue se produit pour les segments perpendiculaires à l'axe des x, et que (2') est vrai sur l'axe. Notons que toutes surfaces S_α : $\xi\cos\alpha + \xi^*\sin\alpha$, $\eta\cos\alpha + \eta^*\sin\alpha$, $\zeta\cos\alpha + \zeta^*\sin\alpha$ sont des surfaces minima et que la longueur d'une courbe de S_α, image d'une courbe du demi plan $y > 0$, ne dépend pas d'α. On démontre le lemme que a) la longueur de la courbe C_0 image de $y = y_0 = \text{const}$ est fonction continue de y_0 pour $y_0 \geqslant 0$ et b) que la longueur de l'image d'un segment $x = \text{const}$ est inférieure à un multiple fixe de la longueur de Γ. En dérivant la longueur de C_0 par rapport à α pour $y_0 = 0$ on obtient (2') sur $y = 0$. a) et b) suffisent à faire rentrer la construction de $\Xi(z)$ dans le cadre d'idées des approximations successives habituelles.

L'analycité de $\xi(x,0)$, $\eta(x,0)$, $\zeta(x,0)$ étant acquise, des développements de Taylor au point origine donnent l'existence d'un plan tangent à l'origine.

Signalons encore le problème d'une surface S d'aire minimum dont la frontière est située en partie sur une surface compacte donnée T et en partie est fournie par un arc de Jordan Γ aux bouts A et B tels que $T \cap \Gamma = A \cup B$. L'existence de S ayant été démontrée par Courant sous des conditions plus larges, cherchons à déterminer la nature de l'intersection $S \cap T$ dans le cas de T analytique. Remarquons que notre méthode s'applique encore, bien que les détails soient beaucoup plus laborieux [4]. On trouve qu'il existe toujours une S telle que $S \cap T$ est une courbe analytique. Dans ce problème on aura à formuler, au lieu de (4), un système de trois équations différentielles ordinaires faisant intervenir les fonctions analytiques qui déterminent T .

La méthode de réflexion au moyen de la résolution d'équations différentielles ordinaires s'étend aux fonctions biharmoniques satisfaisant à deux conditions aux limites sur une portion analytique de la frontière du domaine de définition, voir [5].

Passons maintenant aux fonctions harmoniques u de trois variables, et étudions le problème le plus simple [6] :

$\Delta u(x,y,z) = 0$ et $u \in C^{\infty}$ dans un demi-voisinage $z \leq 0$ de l'origine, soit D , et satisfaisant à une condition linéaire

(5) $\quad B[u] \equiv u_z + f(x,y)\, u = 0$ sur $z = 0$.

Ecartons le cas trivial de $f(x,y) = \text{const}$, alors $B[u]$ est harmonique et on peut effectuer la réflexion de $B[u]$ en fonction harmonique dans le domaine $\bar{D}$ symétrique, puis intégrer l'équation différentielle ordinaire, obtenue ainsi pour u, par rapport à z et en tirer u sur tout segment parallèle à l'axe des z et contenu dans $\bar{D}$. Admettons au contraire que

$$f(x,y) = a + bx + cx^2$$

a, b, c, des constantes.

Observons 1°) que l'opérateur $\Theta = x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}$ et le Laplacien Δ sont permutables et que Θ se réduit à $x\frac{\partial}{\partial z}$ sur $z = 0$. Notons 2°) qu'il existe, dans la portion D' de D, formée par les segments de D issus de, et perpendiculaires à $z = 0$, une fonction v, harmonique et C^∞, telle que $v_z = u$ dans D'. En effet, soit $F(x,y)$ une solution C^∞ de l'équation de Poisson à deux variables indépendantes

$$\Delta F + u_z(x,y,0) = 0 . \text{ Alors}$$

$$v(x,y,z) = \int_0^z u(x,y,z')\,dz' + F(x,y).$$

En répétant le raisonnement, on trouve V, harmonique et C^∞ dans D' et tel que $V_{z^3} = u$. Alors (5) devient

$$B'[V] \equiv V_{z^4} + a\,V_{z^3} + b\left(x\frac{\partial}{\partial x} - z\frac{\partial}{\partial x}\right)V_{z^2} +$$

$$+ c\left(x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 V_2 + c\left(x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}\right)V_x = 0$$

sur $z = 0$. En vertu de 1°), $B'[V]$ est harmonique dans D' et s'annulle sur $z = 0$. On peut donc étendre $B'[V]$ harmoniquement dans le domaine sym étrique $\bar{D}$. Reste à tirer $V_{z^3} = u$ de la connaissance de $B'[V]$. Ajoutons à $B'[V]$ un "multiple" de ΔV, soit $P_2\Delta V$ où P_2 est un opérateur différentiel du second ordre à coefficients constants. On peut choisir P_2 de sorte que l'opérateur $B' + P_2\Delta$ devienne hyperbolique à deux nappes caractéristiques distinctes. De plus on peut faire que ces nappes cont tiennent à l'intérieur un rayon parallèle à l'axe des z et l'approximent d'aussi près qu'on veut. D'après un théorème de Pétrovski-Leray on aura donc une solution unique $V \in C^{\infty}$ d'une telle équation hyperbolique à données initiales sur $z = 0$, et cela dans une portion arbitrairement proche du total de $\bar{D}'$. Finalement, on vérifie que $\Delta V = 0$ dans $\bar{D}'$ puisque ΔV satisfait à une équation hyperbolique analogue, mais homogène, du quatrième ordre, aux données initiales nulles sur $z = 0$. Donc V est harmoniquement prolongable dans $\bar{D}'$, d'où la même chose pour u.

Ce procédé s'applique aussi bien au cas de f = polynôme quelconque en x et y. Toutefois il faut observer que l'ordre de l'équation hyperbolique auxiliaire tend vers l'infini avec le degré du polynôle f, fait qui introduit des difficultés nouvelles quand on prend pour f une fonction analytique plus générale.

Le problème de réflexion se pose pareillement pour une équation quelconque, et tout d'abord pour les équations à coefficients constants. Disons un mot sur l'équation $\Delta' u \equiv u_{xx} - u_{yy} + u_{zz} = 0$

Vu l'existence de la solution du problème de Cauchy pour des données spatiales, le problème n'a guère d'intérêt dans ce cas. Au contraire, il n'en est plus ainsi quand on se donne la condition (5), le plan $z = 0$ étant temporel. Rien n'est connu dans ce cas, même pour $f(x,y) \equiv x$. La raison en est qu'on n'arrive plus à formuler un problème correctement posé pour la l'obtention de V à partir de $B'[V]$, bien que subsiste le formalisme qui donne $B'[V]$ dans $\bar{D}'$. Fait curieux : le raisonnement marche pour une condition aux limites

$$u_z + \alpha u_x + xu = 0 \quad \text{sur} \quad z = 0$$

avec $\alpha = \text{const} \neq 0$, mais arbitrairement petit, et la réflexion de u s'effectue.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GERBER (R.). Sur une condition de prolongement analytique des fonctions harmoniques, C.R.Ac. Paris vol. 233 (1951) pp. 1560-1562.

[2] LEWY (H.). A note on harmonic functions and a hydrodynamical application, Proc. Am. Math. Soc. vol. 3 (1952) pp. 111-113.

[3] LEWY (H.). On the boundary behavior of minimal surfaces, Proc. Nat. Ac. Sc. vol. 32, n°2, pp. 103-110, Feb. 1951.

[4] LEWY (H.). On minimal surfaces with partially free boundary, Comm. Pures Appl. Math. vol. IV n°1 pp. 1-13 (1951).

[5] SLOSS (J.). Reflexion of biharmonic functions across analytic boundary conditions, Pac Journ. Math, à paraître.

[6] FILIPPENKO (V.I.). travail inédit.