P. Malliavin

Un théorème taubérien relié aux estimations de valeurs propres

Séminaire Jean Leray (1962-1963), p. 224-231
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1962-1963____224_0>

UN THEOREME TAUBERIEN RELIE AUX ESTIMATIONS DE VALEURS PROPRES

par

P. MALLIAVIN

On se propose de démontrer un théorème taubérien à reste correspondant à un besoin spécifique issu de récents travaux sur les opérateurs elliptiques.

Rappelons le principe de la méthode de Carleman. L_x désigne un opérateur elliptique sur un domaine D, on se donne des conditions aux limites conduisant à une extension selfadjointe $\tilde{L}$ de L_x. Supposons le spectre de $\tilde{L}$ discret ; $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \dots \leqslant \lambda_n \leqslant \dots$, notons par $v_{\lambda_n}(x)$ un vecteur propre associé à λ_n. Choisissons la suite des $\left\{v_{\lambda_n}(x)\right\}_{n=1}^{+\infty}$ de telle sorte qu'elle soit orthonormée.

Posons

$$\theta(x,y,\lambda) = \sum_{\lambda_n<\lambda} v_{\lambda_n}(x)\,\overline{v_{\lambda_n}(y)}$$

Notons par $N(\lambda)$ le nombre de valeurs y propres $< \lambda$, on a alors

$$N(\lambda) = \int_D \theta(x,x,\lambda)dx$$

D'autre part si r est un entier, $z \in \mathbb{C}$, la fonction de Green $G_z(x,y)$ de $z + \tilde{L}^r$ s'écrit

$$G_z(x,y) = \int_0^{+\infty} (z + \lambda^r)^{-1} d(\theta(x,y,\lambda))$$

d'où

$$\int_D G_z(x,x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{dN(\lambda)}{z + \lambda^r}$$

Posant $\sigma(\lambda) = N(\lambda^{1/r})$ alors

$$S(z) = \int_D G_{-z}(x,x)dx$$

où $S(z)$ est la transformée de Stieljes de σ

$$S(z) = \int_0^{+\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{z-\lambda}$$

On est ainsi amené au problème Taubérien.

Supposant connu un développement asymptotique de $S(z)$, peut-on en déduire un développement asymptotique de σ ?

La réponse que l'on peut donner à ce problème dépend essentiellement du domaine de validité du développement asymptotique de S. Si celui-ci est valable simplement sur l'axe réel positif, un théorème d'Hardy Littlewood donne alors la partie principale de σ ; l'estimation du reste que l'on peut obtenir sous ces hypothèses est médiocre, on obtient l'ordre de la partie principale divisé par un facteur logarithmique. Ceci ne peut pas être amélioré si le domaine de validité de S est un angle ayant l'axe réel négatif pour bissectrice.

Félix Browder a obtenu [1] des estimées de la résolvante sur des courbes de la forme

$$y = \pm |x|^{\gamma} \qquad z = x + iy \qquad x > 0 .$$

Dans une conversation personnelle, Félix Browder me posa la question de savoir ce qu'il était possible de déduire d'estimées sur de telles courbes. Dans cette direction on a l'énoncé suivant :

<u>Théorème :</u> <u>Soit</u> $d\sigma$ <u>une mesure positive, portée par l'axe réel.</u>

<u>Posons</u>

$$\sigma(R) = \int_0^R d\sigma$$

(1.1) $$S(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{z-t}$$

- Soient α, β, γ trois nombres réels donnés

$$-1 < \alpha < 0, \quad \beta < \alpha, \qquad 0 \leqslant \gamma < 1,$$

Notons par Γ la courbe

$$y = \pm x^{\gamma}, \quad x > 0, \quad z = x + iy$$

Notons par

$$a(\alpha) = \frac{\pi(\alpha+1)}{\sin \pi\alpha} e^{-i\pi\alpha}$$

$$\theta = \max\left\{ \beta + 1, \alpha + \gamma \right\}$$

Alors l'hypothèse

(1.2) $S(z) = a(\alpha) z^{\alpha} + O(z^{\beta}) \quad z \in \Gamma, z \to \infty, 0 < \arg z < 2\pi$

entraîne :

Si $\theta \geqslant 0$, que

(1.3) $$\sigma(T) = T^{\alpha+1} + O(T^{\theta}\log T), \quad T \to +\infty,$$

Si $\theta < 0$, qu'il existe une constante A telle que

(1.4) $$\sigma(T) = T^{\alpha+1} + A + O(T^{\theta}\log T), \quad T \to +\infty.$$

Après la publication de [2] j'ai reçu une lettre de M. Ake Pleijel me disant qu'il connaissait des résultats de ce type qu'il n'avait pas jusqu'alors publiés, et que sa méthode d'approche était fondée sur l'utilisation de la formule 7 de [3].

(2) Démonstration : Réduction du problème.

Nous allons d'abord faire apparaître le reste

$$\sigma_1(T) = \sigma(T) - T^{\alpha+1} \qquad T > 0$$

$$\sigma_1(T) = \sigma(T) \qquad T < 0$$

L'identité

(2.1) $$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha}}{z-t}\, dt = \frac{e^{-i\pi\alpha}}{\sin \pi\alpha} z^{\alpha}$$

donne que 1.2 s'écrit

.2) $$S_1(z) = \int_0^{+\infty} \frac{d\sigma_1(t)}{z-t} = O(z^{\beta}) \qquad z \in \Gamma .$$

Nous allons effectuer une transformation conforme pour transformer Γ en deux droites parallèles à l'axe réel.

Remarquons d'abord qu'en appliquant le principe de Phragmen-Lindelöf 2.2 vaut non seulement sur Γ mais dans le domaine $\tilde{\Gamma}$ limité par Γ et l'axe imaginaire. L'application du principe de Phragmen Lindelöf est légitime puisque, dans $\tilde{\Gamma}$, $S_1(z)$ est borné. Effectuons la représentation conforme

$$u = v + iw = z^{1-\gamma}$$

La demi-droite $w = 1$, $w > 0$ a pour image la courbe Γ_1

$$y = \lambda(x)\, x^{\gamma} \quad \text{où} \quad \lambda(x) \longrightarrow \frac{1}{1-\gamma} \quad \text{quand} \quad x \longrightarrow +\infty .$$

Cette courbe est contenue dans $\tilde{\Gamma}$. Par suite posant

$$M(u) = S_1\,(u^{\frac{1}{1-\gamma}})$$

on obtient que 2.2 s'écrit

.3) $$M(v \pm i) = O\,(v^{\frac{\beta}{1-\gamma}}) \qquad v \longrightarrow +\infty$$

Approchons la mesure σ_1 par une suite de mesures ρ_n composées de combinaisons linéaires de masses de Dirac. On peut choisir les mesures ρ_n de telle sorte que

$$T_n(z) = \int \frac{d\,\rho n(t)}{z-t}$$

convergent uniformément sur Γ vers $S_1(z)$.

$T_n(z)$ est une fonction méromorphe. Il en sera de même de

$$M_n(u) = T_n\,(u^{\frac{1}{1-\gamma}}) .$$

Notons par $d\,\mu_n(v)$ la mesure qui est constituée en plaçant en chaque pôle de $M_n(u)$ son résidu. La relation

$$\text{Rés}_{x^{1-\gamma}}(M_n) = (1-\gamma)\, x^{-\gamma}\,\text{Rés}_x\,(T_n)$$

implique que

$$d\,\mu_n(x^{1-\gamma}) = (1-\gamma)\, x^{-\gamma}\, d\rho_n\,(x)$$

La limite vague de $d\rho_n$ existe donc quand $n \longrightarrow \infty$, soit $d\mu$ cette limite. On a alors

2.4) $$d\,\mu\,(x^{1-\gamma}) = (1-\gamma)\, x^{-\gamma}\, d\,\sigma_1(x)$$

Nous allons dans le paragraphe 4 évaluer $d\mu$ par un "calcul de résidus". Auparavant nous établirons quelques lemmes.

3) <u>Lemmes préliminaires</u>

3.1) <u>Lemme</u> : <u>Il existe une constante</u> A_2 , <u>indépendante de</u> n , <u>telle que</u>

$$\left|M_n(u)\right| < A_2\,|w|^{-1} \qquad \begin{array}{l} u = v + iw \\ |w| < .1 \end{array}$$

<u>Preuve:</u>

L'hypothèse faite dans le théorème de la convergence absolue de la transformée de Stieljès entraîne que

3.2) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma\,(t)}{t+1} = A_1 < \infty$$

On a pu choisir les mesures ρ_n approchant σ de telle sorte qu'elles satisfassent uniformément à 3.2

$$\left|T_n(z)\right| < A_1 \sup_t \left|\frac{t+1}{z-t}\right| < 2\,A_1 \left|\frac{x}{y}\right|$$

d'où en revenant à la variable u on obtient 3.1.

Pour pouvoir appliquer de façon utile le théorème des résidus, nous devrons au préalable multiplier $M_n(u)$ par des multiplicateurs convenables ayant pour objet de compenser la croissance près de $w = 0$.

3.3) Lemme : Donnons-nous $a \geqslant 2$, notons par R_a le rectangle

$$|v| < 10 \log a , \quad |w| < 1 \qquad (u = v + iw)$$

Alors on peut trouver une fonction $h(u)$, holomorphe dans R_a vérifiant

3.4) $$h(v) > 0 \qquad v \in R_a \qquad v \text{ réel},$$

3.5) $$h(v) > \frac{1}{4} \quad \text{si} \quad -1 < v < +1$$

3.6) $$h(v \pm i) = 1 \qquad |v| < 10 \log a$$

3.7) $$|h(\pm 10 \log a \pm iw)| = \frac{|w|}{a}$$

De même pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver une constante numérique $A_2 \geqslant 1$, telle que notant par $\tilde{R}$, le rectangle

$$|v| < A_2 \quad , \quad |w| < 1$$

on puisse trouver une fonction $\tilde{h}$ holomorphe dans R , satisfaisant 3.4 et 3.5 tandis que 3.7 vaut encore sur les côtés verticaux de $\tilde{R}$ et 3.6 étant remplacé par

3.8) $$\tilde{h}(v \pm i) = a^{\varepsilon}$$

Preuve : h et $\tilde{h}$ seront choisies sans zéros dans l'intérieur de R_a et $\tilde{R}$. Alors 3.6 , 3.7 et 3.8 déterminent complètement $\log h$ et $\log \tilde{h}$. Pour obtenir 3.5 , il suffit d'évaluer la mesure harmonique des côtés verticaux de R_a (resp de $\tilde{R}$) relativement à l'origine.

4) Calcul de Résidus.

Donnons-nous un entier q , soit v_o tel que

$$e^q \leqslant v_o < e^{q+1}$$

Soit h la fonction construite par le lemme 3.3 en prenant

$$a = e^{-q/3}$$

Posons

$$I_n(v_o) = \int_{R_a} M_n(v_o - u)\, h(u)\, du$$

En utilisant les majorations 3.2 et 2.3 on obtient uniformément

$$I_n(v_o) = O(v_o^{\frac{\beta}{1-\gamma}} q)$$

D'autre part le théorème des résidus donne

$$I_n(v_o) = 2\,i\pi \int h(v_o - \zeta)\, d\mu_n(\zeta)$$

(où on a convenu de prendre $h(v) = 0$ si $|v| > 10 \log a$)

d'où $n \longrightarrow +\infty$

(4.1) $$\int h(v_o - \zeta)\, d\mu(\zeta) = O(q\, v_o^{\frac{\beta}{1-\gamma}}), \qquad e^q \leqslant v_o < e^{q+1}$$

Nous pouvons répèter sur $\tilde{h}$ le raisonnement fait sur h. Nous obtiendrons

(4.2) $$\int \check{h}(v_o - \zeta)\, d\mu(\zeta) = O(v_o^{\frac{\beta}{1-\gamma}+\varepsilon})$$

(5) Nous allons dans ce paragraphe utiliser 4.1 et 4.2 combinés avec l'hypothèse taubérienne $d\sigma > 0$.

L'intégrale figurant dans 4.2 est minorée en vertu de 3.5 par

(5.1) $$\frac{1}{4} \int_{v_o-1}^{v_o+1} d\mu^+ - \int_{v_o-A}^{v_o+A} d\mu^-$$

Prenons ε de telle sorte que

$$\frac{\beta}{1-\gamma} + \varepsilon < \alpha ,$$

Alors 5.1 et 4.2 entraineront que

$$\int_{v_o-1}^{v_o+1} |d\mu| = O\,(v_o^{\frac{\alpha}{1-\gamma}})$$

ce qui d'après 2.4 se lit

(5.2) $$\sigma(x + x^{\gamma}) - \sigma(x) = O\,(x^{\alpha+\gamma})$$

estimé qui donne une majoration de la multiplicité d'une valeur propre.

Notons maintenant par φ la fonction caractéristique de $[\zeta, \zeta']$
$e^q < \zeta < \zeta' < e^{q+1}$. Posons

$$\psi = h * \varphi$$

Alors

$$\psi(v) = ct^e \qquad \text{si} \qquad \zeta + 10q \leqslant v \leqslant \zeta' - 10\,q$$

d'où utilisant 5.2

5.3) $$\mu(\zeta') - \mu(\zeta) = 0\left(\int (h*\varphi)\, d\mu\right) + 0\left(q \exp\left(\frac{\alpha}{1-\gamma}\, q\right)\right)$$

Utilisant 4.1. on a

$$\int h*\varphi\, d\mu = 0\left(q(\zeta' - \zeta) \exp\left(\frac{q\beta}{1-\gamma}\right)\right)$$

ce qui permet de lire 5.3

5.4) $$\sigma_1(x') - \sigma_1(x) = 0\,(x^{\theta} \log x) \qquad \text{où} \quad x < x' < ex\,.$$

En particulier on a

5.5) $$\sigma_1(e^{r+1}) - \sigma_1(e^r) = 0(r\, e^{r\theta})$$

Si $\theta > 0$ on somme 5.5 r variant de 0 à $[\log T]$, et on utilise 5.4 pour estimer $\sigma_1(T) - \sigma_1(\exp\,[\log T]\,)$

On obtient alors

$$\sigma_1(T) = 0\,(T^{\theta} \log T)$$

Si $\theta < 0$ on somme 5.5 r variant de $[\log\ T]$ à $+\infty$ et on obtient ainsi la démonstration complète du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Félix Browder.
On the Spectral Theory of elliptic differential operators.
Math. Annalen 1960 vol. 142 p. 22 à 130

[2] P. Malliavin
Un théorème Taubérien avec reste pour la transformée de Stieljies C. R. 1962 , Tome 255, p. 2351

[3] A. Pleijel. On a formula of Carleman, Matematisk Tidsskrift 1952. p. 39 - 43