SÉMINAIRE JEAN LERAY.
SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

JEAN LERAY

Calcul, par réflexions, des fonctions M-harmoniques dans une bande plane vérifiant aux bords M conditions différentielles, à coefficients constants

Séminaire Jean Leray, n^o 1 (1963-1964), p. 1-77
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1963-1964___1_1_0>

CALCUL, PAR RÉFLEXIONS, DES FONCTIONS M - HARMONIQUES DANS UNE BANDE PLANE VÉRIFIANT AUX BORDS M CONDITIONS DIFFÉRENTIELLES, A COEFFICIENTS CONSTANTS,

par

Jean LERAY

Introduction

Divers Auteurs ont étudié les solutions d'une équation elliptique d'ordre $2M$, vérifiant M conditions différentielles aux limites d'ordres quelconques : Agmon, Douglis, Nirenberg [1] ont résolu explicitement le cas le plus simple (demi-espace; opérateurs à coefficients constants) et obtenu dans le cas général des majorations a priori, permettant la preuve de théorèmes d'existence; Hans Lewy [6], F. Sloss [7] et D. Brown [2] ont établi un "théorème de réflexion" prolongeant analytiquement ces solutions dans le domaine complexe.

En pratique, on rencontre de tels problèmes et on a besoin de les résoudre explicitement. Le théorème de réflexion permet de résoudre, par transformation de Laplace, les plus simples d'entre eux; en particulier le problème de la flexion de la bande élastique à bords libres (n° 28 et [4]), qui présente l'intérêt suivant : il permet de résoudre approximativement un grand nombre de problèmes de flexion de plaques, importants en pratique : voir J.C. Leray [5].

SOMMAIRE. - Le <u>chapitre</u> II construit explicitement la fonction de Green

$$G(z,z') \qquad [z = x + iy \ , \ z' = x' + iy']$$

qui est M-harmonique dans la bande plane $|x| < a$ et qui vérifie sur chacun de ses bords M conditions différentielles, à coefficients constants et d'ordres quelconques. $G(z,z')$ est <u>unique</u> quand on lui impose une allure <u>anti-asymptotique</u> : il doit exister une exponentielle polynome $\tilde{G}(z,z')$, bornée dans la bande, telle que $G(z,z') - \tilde{G}(z,z')$ $[G + \tilde{G}]$ et ses dérivées tendent rapidement vers 0 quand $y-y'$ tend vers $+\infty \, [-\infty]$. La structure de G est la suivante :

$$G(z,z') = \operatorname{Re} \mathcal{V}(x,x',\alpha,\frac{d}{dz})\Phi(z-z') + \operatorname{Re}\mathcal{W}(x,x',\alpha,\frac{d}{dz})\Phi(z+\bar{z}') \ ,$$

$\mathcal{V}(x,x',\tau,t)$ et $\mathcal{W}$ étant des polynomes de (x,x',τ,τ^{-1},t) explicitement connus, α étant la translation :

$$\alpha \, \Phi(z) = \Phi(z+a) \ ,$$

$\Phi(z)$ étant une fonction holomorphe. Elle vérifie une équation[1] de convolution; elle est la transformée de Laplace d'une distribution $\mathcal{L}^{-1}[\Phi]$; cette distribution est caractérisée par une fonction, pouvant avoir un nombre fini de singularités polaires; cette fonction a pour expression un déterminant de rang 2M .

Le <u>chapitre</u> I a préalablement étudié les fonctions holomorphes anti-asymptotiques et les fonctions dont elles sont les transformées de Laplace : ce sont des fonctions indéfiniment différentiables, ayant un nombre fini de pôles et, à l'infini, une décroissance exponentielle.

---

1) C'est l'équation dont Hans Lewy, F. Sloss et D. Brown déduisent leurs théorèmes de réflexion.

Les derniers chapitres particularisent ces résultats :

Le chapitre III suppose G biharmonique $(M = 2)$; il explicite $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ et $\mathcal{L}^{-1}[\Phi]$; il simplifie ces expressions de $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ et $\mathcal{L}^{-1}[\Phi]$ quand les conditions aux limites sont les mêmes sur les deux bords de la bande.

Le chapitre IV suppose G biharmonique, ces conditions les mêmes sur les deux bords et homogènes en $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$: le calcul de $\Phi(z)$ équivaut à celui de deux fonctions méromorphes $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ vérifiant le système de convolution, où ρ est un paramètre :

$$4\rho a \frac{d\varphi(z)}{dz} = \psi(z+2a) - \psi(z-2a)$$

$$4\rho a \frac{d\psi(z)}{dz} = \varphi(z+2a) - \varphi(z-2a) \quad ;$$

$\varphi(z)$ et $\psi(z)$ ont pour pôles respectifs ceux de

$\operatorname{tg} \frac{\pi z}{4a}$ et $\operatorname{cotg} \frac{\pi z}{4a}$, sauf $z = 0$; si $|\rho| < 1$, les développements de φ et ψ suivant les puissances de ρ sont très simples.

C'est le cas, quand on étudie la flexion de la bande élastique; de nouvelles simplifications se produisent dans les expressions de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$; $G(z,z')$ est symétrique en (z,z') : ce cas, qui est important en technique, est celui où nos résultats se prêtent le mieux aux calculs numériques.

Note. - Nous ne traitons pas le cas encore plus simple : $M = 1$, G harmonique; rappelons que A. Weinstein [8] puis G. Hoheisel [3] l'ont étudié.

Chapitre I

TRANSFORMATION DE LAPLACE

Ce chapitre rappelle qu'une fonction holomorphe dans une bande, à décroissance rapide ou à croissance lente, est transformée de Laplace d'une fonction ou distribution définie sur la droite réelle; puis il étudie les fonctions holomorphes anti-asymptotiques.

1. FONCTIONS HOLOMORPHES A DÉCROISSANCE RAPIDE. - Soit $z = x + iy$ une variable numérique complexe; soit $a > 0$; nous notons

$B(a)$ <u>la bande</u> : $|x| < a$

et $b(a)$ toute bande $|x| < c$ où $0 < c < a$.

<u>Définition</u> : $\mathfrak{X}(c)$ désigne l'ensemble des fonctions numériques complexes $F(z)$ holomorphes dans $B(a)$ et à décroissance rapide : quels que soient $b(a)$ et le nombre n , $y^n F(z)$ tend vers 0 aux deux bouts de $b(a)$.

On peut construire ces fonctions comme suit :

<u>Définition</u>. - Soit t une variable numérique réelle. $\mathfrak{D}(a)$ désigne l'ensemble des fonctions numériques complexes, $f(t)$ indéfiniment différentiables et vérifiant la condition

$$\operatorname{Sup.}_t \left| e^{ct} \frac{d^n f}{dt^n} \right| < \infty ,$$

quels que soient l'entier $n \geqslant 0$ et le nombre c tel que $|c| < a$.

<u>Définition</u>. - La transformation de Laplace $\mathfrak{L}$ transforme $f \in \mathfrak{D}(a)$ en $\mathfrak{L}[f] \in \mathfrak{X}(a)$, définie par

$$(1.1) \qquad \mathfrak{L}[f](z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-tz}\, dt \quad \text{où} \quad z \in B(a) .$$

Les propriétés de $\mathcal{L}$ que voici sont évidentes et classiques :

(1.2) $$P(z)\,\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[P(\tfrac{d}{dt})\,f(t)]$$, P étant un polynome;

(1.3) $$P(\tfrac{d}{dz})\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[P(-t)\,f(t)]$$;

(1.4) $$e^{-cz}\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[f(t-c)]$$, c étant une constante réelle;

(1.5) $$\mathcal{L}[f(t)]\,(\tfrac{z}{c}) = |c|\,\mathcal{L}[f(ct)]\,(z)$$, où $f(ct) \in \mathcal{D}(a|c|)$

(1.6) $$\mathcal{L}[f(t)]\,(z-z') = \mathcal{L}[f(t)e^{tz'}](z)$$, où $z' = x' + iy' \in B(a)$ et $z \in B(a-|x'|)$

La formule d'inversion, que voici, est classique : si $F(z) = \mathcal{L}[f(t)]$, alors $\mathcal{L}^{-1}[F]$ désigne f et est donnée par l'intégrale :

(1.7) $$\mathcal{L}^{-1}[F]\,(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} F(z)\,e^{tz}\,dz \quad ;$$

le chemin d'intégration est dans l'une des bandes $b(a)$.

Cette formule (1.7) définit $\mathcal{L}^{-1}[F] \in \mathcal{D}(a)$, quel que soit $F \in \mathcal{H}(a)$; donc $\mathcal{L}$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}(a)$ sur $\mathcal{H}(a)$.

2. FONCTIONS HOLOMORPHES A CROISSANCE LENTE. -

Définition. - $\mathcal{H}'(a)$ désigne l'ensemble des fonctions numériques complexes $F(z)$, holomorphes dans $B(a)$ et à croissance lente : quel que soit $b(a)$, il existe un polynome $P(z)$, dépendant de $b(a)$, tel que $F(z)/P(z)$ soit borné dans $b(a)$.

On peut construire ces fonctions comme suit :

Définition. - $\mathcal{D}'(a)$ désigne l'ensemble des distributions numériques complexes $f(t)$ telles que, quel que soit $c < a$ il existe un polynome P

et une fonction mesurable $g(t)$, dépendant de c et vérifiant les conditions :

$f(t) = P(\frac{d}{dt})\, g(t)$, au sens de la théorie des distributions;

$$\operatorname*{Sup}_{t} \left| g(t)\, e^{c|t|} \right| < \infty \ .$$

<u>Définition</u>. - La transformation de Laplace transforme

$$f \in \mathcal{D}'(a) \quad \text{en} \quad \mathcal{L}[f] \in \mathcal{H}'(a) \ ,$$

définie par la formule

$$(2.1) \qquad \mathcal{L}[f](z) = P(z) \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-tz}\, dt \ .$$

Cette définition de $\mathcal{L}[f]$ est indépendante des choix de P et g ; elle possède les propriétés (1.2) ... (1.6) : la preuve[2] en est aisée et classique.

<u>La formule d'inversion</u> que voici est classique : si $F(z) = \mathcal{L}[f(t)]$, alors $\overset{-1}{\mathcal{L}}[F]$ désigne f et est donnée par l'intégrale

$$(2.2) \qquad \overset{-1}{\mathcal{L}}[F] = P(\frac{d}{dt}) \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{F(z)}{P(z)}\, e^{tz}\, dz \ ;$$

2) On peut prouver comme suit que $\mathcal{L}[f]$ est indépendant des choix de P et g . Soit $k(t)$ une fonction indéfiniment dérivable, à support compact : $k \in \mathcal{D}(a)$. Soit $f * k$ sa convolution avec f : $f * k \in \mathcal{D}(a)$. On montre que: $\mathcal{L}[f * k] = \mathcal{L}[f] \cdot \mathcal{L}[k]$, $\mathcal{L}[f * k]$ et $\mathcal{L}[k]$ étant définis par (1.1), $\mathcal{L}[f]$ par (2.1) .

le chemin d'intégration est choisi dans une bande $b(a)$; $P(z)$ est choisi tel que $F(z)\ (1+|z|^2)/P(z)$ soit borné dans $b(a)$.

Cette formule (2.2) définit $\overset{-1}{\mathcal{L}}[F] \in \mathcal{D}'(a)$ et est indépendante du choix de P , quel que soit $F \in \mathcal{H}'(a)$; donc $\mathcal{D}'(a)$ est un espace vectoriel, comme $\mathcal{H}'(a)$ et $\mathcal{L}$ <u>est un isomorphisme de</u> $\mathcal{D}'(a)$ <u>sur</u> $\mathcal{H}'(a)$. Evidemment

$$\mathcal{D}(a) \subset \mathcal{D}'(a) , \quad \mathcal{H}(a) \subset \mathcal{H}'(a) . \tag{2.3}$$

<u>Exemples</u>. - 1°) Si $f(t) = P(\frac{\partial}{\partial t})\, g(t)$, g étant une fonction mesurable à support compact, alors la formule (1.1)

$$\mathcal{L}[f]\,(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-tz}\, dt \,, \tag{2.4}$$

vaut évidemment au sens de la théorie des distributions.

En particulier, $\delta(t)$ étant la mesure de Dirac :

$$\mathcal{L}[\,(\tfrac{d}{dt})^p\, \delta(t-c)\,] = z^p\, e^{-cz} \qquad (c : \text{nombre réel}). \tag{2.5}$$

2°) Une application immédiate de (2.1), où l'on prend $P = 1$, $f = g$, donne, pour $|x'| \geqslant |a|$:

$$\mathcal{L}[\,\tfrac{1}{2}\,(\mathrm{sgn.}\ t - \mathrm{sgn.}\ x')\, e^{tz'}\,] = \frac{1}{z-z'} \qquad (\mathrm{sgn.} : \text{signe de } ...) \tag{2.6}$$

Nous allons en déduire les formules importantes pour la suite :

$$\mathcal{L}[\,\frac{|c|}{\mathrm{ch}(ct)}\,] = \frac{\pi}{\cos\frac{\pi z}{2c}} \qquad (c \text{ réel} ;\ a < |c|\,) ; \tag{2.7}$$

$$\mathcal{L}[\,\frac{|c|}{\mathrm{sh}(ct)}\,] = -\,\pi\ \mathrm{tg}\,\frac{\pi z}{2c} ; \tag{2.8}$$

cette dernière formule emploie la

<u>Définition</u>. - $\frac{c}{\mathrm{sh}(ct)}$ et $\frac{1}{t}$ désignent les distributions définies comme suit : quelle que soit la fonction $k(t)$, indéfiniment dérivable et à support compact, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(t) \frac{c}{\mathrm{sh}(ct)} dt = \mathrm{P.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} k(t) \frac{c}{\mathrm{sh}(ct)} \, dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(t) \frac{dt}{t} = \mathrm{P.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} k(t) \frac{dt}{t}$$

$$\text{où} \quad \mathrm{P.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \right] .$$

<u>Note</u>. - L'intérêt de la distribution $\frac{1}{\mathrm{sht}}$ est qu'elle est un élément de $\mathfrak{D}'(a)$ possédant un pôle simple, alors(3) que $\frac{1}{t} \notin \mathfrak{D}'(a)$.

<u>Preuve de</u> (2.7). - On a, la série du second membre convergeant pour $t \neq 0$ et ayant des sommes partielles uniformément bornées :

$$\frac{1}{\mathrm{cht}} = (\mathrm{sgn}\ t + 1) [e^{-t} - e^{-3t} + e^{-5t} - \dots] - (\mathrm{sgn}\ t - 1)[e^{t} - e^{3t} + \dots] \quad ;$$

d'où, en appliquant (2.6)

$$\frac{1}{2} \mathfrak{L}\left[\frac{1}{\mathrm{cht}}\right] = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3} + \frac{1}{z+5} - \dots - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-3} - \dots$$

$$= \frac{\pi}{4} \mathrm{cotg} \frac{\pi}{4} (z+1) - \frac{\pi}{4} \mathrm{cotg} \frac{\pi}{4}(z-1) = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\cos \frac{\pi z}{2}} .$$

---

3) En effet, la restriction de $\mathfrak{L}[f]$ à $x = 0$ est la transformée de Fourier $\mathfrak{F}[f]$; or $\mathfrak{F}[1/t] = |y|$ n'est pas holomorphe.

Preuve de (2.8). - On a de même, la série du second membre convergeant pour $t \neq 0$ et ayant des sommes partielles uniformément bornées :

$$\frac{t}{\operatorname{sh} t} = t(\operatorname{sgn} t + 1)\,[e^{-t} + e^{-3t} + \dots] + t(\operatorname{sgn} t - 1)\,[e^{t} + e^{3t} + \dots] \quad ;$$

d'où, vu (2.6) et (1.3)

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}\left[\frac{t}{\operatorname{sh} t}\right] = \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{(z+3)^2} + \dots + \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-3)^2} + \dots = \frac{d}{dz}\left[\frac{\pi}{2}\ \operatorname{tg}\frac{\pi z}{2}\right];$$

d'où, vu (1.3) et l'imparité de $\mathcal{L}\left[\frac{1}{\operatorname{sh} t}\right]$

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{\operatorname{sh} t}\right] = -\ \pi\ \operatorname{tg}\frac{\pi z}{2} \quad .$$

3. FONCTIONS HOLOMORPHES, ANTI-ASYMPTOTIQUES A DES EXPONENTIELLES-POLYNOMES. - Ces fonctions sont importantes pour la suite.

Définition. - $\tilde{\mathcal{H}}(a)$ désigne l'ensemble des fonctions $F(z) \in \mathcal{H}'(a)$ auxquelles on peut associer une exponentielle-polynome

(3.1) $\quad \tilde{F}(z) = i \sum_j P_j(z)\, e^{-t_j z}$ $\quad$ ($\sum_j$: somme finie; P_j : polynome; t_j : nombre réel) telle que, quelle que soit $b(a)$:

(3.2) $\quad F(z) - \tilde{F}(z)$ tende rapidement[4] vers 0 quand z tend vers $i\infty$ dans $b(a)$;
$\quad F(z) + \tilde{F}(z)$ .... $-i\infty$.

On dit que $F(z)$ est anti-asymptotique (à $\tilde{F}$) dans $B(a)$; la donnée de F détermine $\tilde{F}$, car l'exponentielle - polynome (3.1) est nulle si elle tend vers 0 quand z tend vers $i\infty$ dans $b(a)$.

---

(4) plus vite que $|y|^{-n}$, quel que soit n .

Exemple. – $tg(cz)$ est anti-asymptotique à i dans $B(a)$ si $a < c$.

Cet exemple permet d'énoncer comme suit la définition précédente :

Définition (variante). – $\tilde{\mathcal{H}}(a)$ est l'ensemble des fonctions $F(z)$ auxquelles on peut associer un système fini de polynomes P_j , de nombres réels t_j et $c_j > a$ tels que

$$(3.3) \quad F(z) - \sum_j P_j(z)\, tg \frac{\pi z}{2\,c_j}\, e^{-t_j z} \in \mathcal{H}(a)$$

Définition. – $\tilde{\mathcal{D}}(a)$ est le sous-espace de $\mathcal{D}'(a)$ que l'isomorphisme $\mathcal{L}$ transforme en $\tilde{\mathcal{H}}(a)$.

D'où, vu la définition (3.3) de $\tilde{\mathcal{H}}$, vu les formules (2.8), (1.2) et (1.4) :

Définition (variante). – $\tilde{\mathcal{D}}(a)$ est l'ensemble des distributions $f(t)$ auxquelles on peut associer un système fini de polynomes P_j , de nombres réels t_j et $c_j > a$ tels que

$$(3.4) \quad f(t) + \frac{1}{\pi} \sum_j P_j\left(\frac{d}{dt}\right) \frac{c_j}{sh\, c_j(t-t_j)} \in \mathcal{D}'(a) \quad ;$$

au premier membre, $\frac{1}{sh\, c_j(t-t_j)}$ représente une distribution, à laquelle on applique $P_j(\frac{d}{dt})$ au sens de la théorie des distributions.

Propriétés. – 1°) On a évidemment

$$\mathcal{H}(a) \subset \tilde{\mathcal{H}}(a) \subset \mathcal{H}'(a) \quad , \quad \mathcal{D}(a) \subset \tilde{\mathcal{D}}(a) \subset \mathcal{D}'(a) \quad .$$

2°) Soit $f(t) \in \tilde{\mathcal{D}}(a)$; la distribution $f(t)$ est une fonction, sauf en un nombre fini de points : ses "pôles" t_j ; la connaissance de la fonction $f(t)$ caractérise la distribution $f(t)$; nous identifierons cette fonction et cette distribution. Cela permet l'énoncé suivant : soit une fonction $f(t)$; pour que $f(t) \in \tilde{\mathcal{D}}(a)$, il faut et il suffit qu'il existe un polynome $P(t)$ tel que

(3.5) $$P(t)\ f(t) \in \tilde{\mathfrak{D}}(a) \quad ,$$

le produit $P(t)\ f(t)$ étant celui des deux fonctions $P(t)$ et $f(t)$

3°) La définition (3.5) de $\tilde{\mathfrak{D}}(a)$ a les conséquences évidentes que voici : Un élément de $\tilde{\mathfrak{D}}(a)$ est transformé en élément de $\tilde{\mathfrak{D}}(a)$ quand il est translaté, dérivé ou multiplié par une fonction indéfiniment dérivable, à croissance lente. <u>Pour que des distributions</u> $f_j(t) \in \tilde{\mathfrak{D}}(a)$ <u>vérifient une relation</u>

$$\sum_j A_j(t, \frac{d}{dt})\ f_j(t-t_j) = 0 \quad ,$$

<u>où les</u> t_j <u>sont des constantes et les</u> A_j <u>des opérateurs différentiels à coefficients indéfiniment dérivables, à croissance lente, il faut et suffit que les fonctions</u> f_j <u>vérifient cette relation</u>

4°) En particulier, dans $\tilde{\mathfrak{D}}(a)$, la division par un polynome non nul est possible d'une façon et d'une seule.

<u>Note</u>. - Ce n'est pas vrai dans $\mathfrak{D}'(a)$, puisque $t^{n+1}(\frac{d}{dt})^n\ \delta(t) = 0$; donc $(\frac{d}{dt})^n\ \delta(t) \notin \tilde{\mathfrak{D}}(a)$.

$\mathfrak{L}$ transforme les propriétés 2°) et 4°) en les deux suivantes :

5°) Si $F(z) \in \tilde{\mathfrak{H}}(a)$, alors il existe un polynome P tel que

$$P(\frac{d}{dz})\ F(z) \in \mathfrak{H}(a) \quad .$$

6°) Etant donnés $F(z) \in \tilde{\mathfrak{H}}(a)$ et un polynome P il existe dans $\tilde{\mathfrak{H}}(a)$ une solution et une seule H l'équation différentielle

$$P(\frac{d}{dz})\ H(z) = F(z) \quad ;$$

c'est

$$H = \mathcal{L}\left[\frac{1}{P(-t)} \quad \mathcal{L}^{-1}[F]\right] .$$

On peut expliciter H ; le n° 4 le fait dans les deux cas les plus simples : $P(t) = t^{n+1}$; $P(t)$ a toutes ses racines réelles.

<u>Définition</u>. - Soit $f \in \tilde{\mathcal{D}}(a)$; $\mathcal{L}[f]$ est anti-asymptotique à une exponentielle-polynome, qui sera notée $\tilde{\mathcal{L}}[f]$ et dont voici l'expression :

(3.6) $$\tilde{\mathcal{L}}[f] = - \quad i \quad \text{rés}\,[f(t)\, e^{-tz}] \quad ;$$

rés ... désigne la somme des résidus des pôles <u>réels</u> :

si $g(t) - \sum_j \frac{g_j(t)}{(t-t_j)^{n_j+1}}$ est continu et si les t_j sont réels, alors

$$\text{rés}\,[g(t)] = \sum_j \frac{1}{(n_j)!} \quad \frac{d^{n_j} g_j(t)}{dt^{n_j}}$$

<u>Preuve de</u> (3.6). - Supposons

(3.4) vérifié; alors on a (3.1), c'est-à-dire

$$\tilde{\mathcal{L}}[f] = i \sum_j P_j(z)\, e^{-t_j z}$$

Or (3.4) donne

$$- \pi i \text{ rés}\,[f(t)\, e^{-tz}] = i \text{ rés}\,[e^{-tz} \sum_j P_j(\tfrac{d}{dt}) \frac{1}{t-t_j}]$$

$$= i \sum_j P_j(z)\, e^{-t_j z} \quad ,$$

car

$$\text{rés}\,[e^{-tz}(\tfrac{d}{dt})^n \frac{1}{t-tj}] = \text{rés}\,[e^{-tz} \frac{(-1)^n n!}{(t-t_j)^{n+1}}] = (-1)^n\, [(\tfrac{d}{dt})^n\, e^{-tz}]\; t = t_j$$

$$= z^n\, e^{-t_j z} \quad .$$

<u>Note</u>. - Supposons que la fonction de t $f \in \tilde{\mathfrak{D}}(a)$ soit en outre fonction holomorphe d'un paramètre λ ; la définition de la distribution f et le calcul de $\mathcal{L}[f]$ emploient les pôles réels t_j de f ; <u>$[f]$ est fonction holomorphe de λ si ces pôles réels t_j sont fonctions holomorphes de λ</u> : cette condition n'est pas vérifiée quand le nombre de ces pôles change.

4. LA PRIMITIVE DE $F(z) \in \tilde{\mathcal{L}}(a)$. - Nous venons de voir qu'il existe une primitive d'ordre $n+1$ de $F(z)$ et une seule $\in \tilde{\mathcal{L}}(a)$; nous aurons à l'utiliser par la suite; construisons-la explicitement, c'est-à-dire sans recourir à $\mathcal{L}$.

Puisque $F(z) - \tilde{F}(z)$ $[$resp. $F + \tilde{F}]$ tend rapidement vers 0 quand z tend vers $i\infty$ $[$resp. $-i\infty]$ dans $b(a)$,

(4.1)
$$F(z) - \tilde{F}(z) \text{ a pour primitive d'ordre } n+1 : \int_{i\infty}^{z} \frac{(z-w)^n}{n!}[F(w) - \tilde{F}(w)]\,dw ,$$
$$F(z) + \tilde{F}(z) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \int_{-i\infty}^{z} \frac{(z-w)^n}{n!}[F(w) + \tilde{F}(w)]\,dw ;$$

ces intégrales sont calculées dans $b(a)$:la première [la seconde] tend rapidement vers 0 quand z tend vers $i\infty[-i\infty]$ dans $b(a)$.

Notons

$$(4.2)\quad \int^{z} \frac{(z-w)^n}{n!} F(w)\,dw = \frac{1}{2}\int_{i\infty}^{z} \frac{(z-w)^n}{n!}[F(w) - \tilde{F}(w)]\,dw + \frac{1}{2}\int_{-i\infty}^{z} \frac{(z-w)^n}{n!}[F(w)+\tilde{F}(w)]\,dw ;$$

remarquons que la fonction de z

$$(4.3)\quad \frac{1}{2}\int_{z}^{i\infty} \frac{(z-w)^n}{n!}\,[F(w) - \tilde{F}(w)]\,dw + \frac{1}{2}\int_{-i\infty}^{z} \frac{(z-w)^n}{n!}\,[F(w) + \tilde{F}(w)]\,dw$$

est une exponentielle-polynome, puisque sa dérivée d'ordre $(n+1)$ est l'exponentielle-polynome $\tilde{F}(z)$.

Les formules (4.1) montrent que $\int^{z} \frac{(z-w)^n}{n!} F(w)dw$ <u>est une primitive d'ordre</u> $n+1$ <u>de</u> $F(z)$, <u>anti-asymptotique à l'exponentielle-polynome</u> (4.3).

<u>Exemple</u>. - En employant la définition de $\mathfrak{L}$ sur $\tilde{\mathfrak{D}}(a)$, on a :

$$(4.4)\qquad \mathfrak{L}\left[\frac{1}{t\ \mathrm{sh}(ct)}\right] = -\,2\log\left[2\cos\frac{\pi z}{2c}\right]\ ,\quad (c>0)\ ,$$

en prenant la détermination de $\log[\dots]$ réelle pour $-c<z<c$;

$$(4.5)\qquad \tilde{\mathfrak{L}}\left[\frac{1}{t\ \mathrm{sh}(ct)}\right] = \pi i z\ .$$

<u>Preuve</u>. - On applique $-\frac{1}{c}\int^{z}$ à (2.8) ; au premier membre, on emploie (1.3) ; au second on obtient $-\log\left[k\cos\frac{\pi z}{2c}\right]$, k étant une constante >0 , qu'on choisit telle que $\log\left[k\cos\frac{\pi z}{ec}\right]$ soit anti-asymptotique : cela donne $k=2$. On tire (4.5) de (3.6).

<u>Note</u>. - Une généralisation évidente de la définition de $\int^{z}$ prouve ceci : soit $P(t)$ un polynome à racines toutes <u>réelles</u> : la solution élémentaire de $P\left(\frac{d}{dz}\right)$ est

$$E(z) = \text{rés.}\left[\frac{e^{tz}}{P(t)}\right] \qquad \text{(rés. : somme des résidus)}\ ;$$

elle est à croissance lente dans toute bande $B(a)$; on peut donc définir, si $F\in\tilde{\mathcal{H}}(a)$:

$$\int^{z} E(z-w)\,F(w)\,dw = \frac{1}{2}\int_{i\infty}^{z} E(z-w)\,[F(w)-\tilde{F}(w)]dw + \frac{1}{2}\int_{-i\infty}^{z} E(z-w)\,[F(w)+\tilde{F}(w)]dw\ ;$$

c'est une fonction $\in \tilde{\mathcal{H}}(a)$, anti-asymptotique à l'exponentielle-polynome

$$\frac{1}{2}\int_z^{i\infty} E(z-w)\,[F(w)-\tilde{F}(w)]\,dw + \frac{1}{2}\int_{-i\infty}^{z} E(z-w)\,[F(w)+\tilde{F}(w)]\,dw \quad ;$$

c'est la solution $\in \tilde{\mathcal{H}}(a)$ de l'équation différentielle

$$P\left(\frac{d}{dz}\right)\int^z E(z-w)\,F(w)\,dw = F(z) \quad .$$

5. FONCTIONS AYANT DES SINGULARITÉS SUR UNE DROITE DE $B(a)$. -

Soit σ un nombre réel tel que $|\sigma| < a$; soit $F(z)$ une fonction holomorphe dans la bande $-a < x < \sigma$ et dans la bande $\sigma < x < a$:

$F(z + \frac{\sigma - a}{2})$ est holomorphe pour $z \in B(\frac{a+\sigma}{2})$;

$F(z + \frac{\sigma + a}{2})$ $\qquad \in B(\frac{a-\sigma}{2})$.

Définition. - $\mathcal{H}(a,\sigma)$ désigne l'ensemble des fonctions $F(z)$, holomorphes dans la réunion de ces deux bandes, et telles que

$$F(z + \frac{\sigma-a}{2}) \in \mathcal{H}(\frac{a+\sigma}{2}) \quad , \quad F(z + \frac{\sigma+a}{2}) \in \mathcal{H}(\frac{a-\sigma}{2}) \quad .$$

On définit de même $\mathcal{H}'(a,\sigma)$ et $\tilde{\mathcal{H}}(a,\sigma)$, en remplaçant $\mathcal{H}$ par $\mathcal{H}'$ et $\tilde{\mathcal{H}}$.

Définition. - $\mathcal{D}(a,\sigma)$ désigne l'ensemble des couples de fonctions $f_{\pm} = (f_-, f_+)$ tels que

$$f_-(t)e^{-\frac{\sigma-a}{2}t} \in \mathcal{D}(\frac{a+\sigma}{2}) \quad , \quad f_+(t)e^{-\frac{\sigma+a}{2}t} \in \mathcal{D}(\frac{a-\sigma}{2})$$

On définit de même $\mathcal{D}'(a,\sigma)$ et $\widetilde{\mathcal{D}}(a,\sigma)$.

<u>Définition</u>. - La transformation de Laplace $\mathcal{L}$ transforme $f_{\pm} \in \mathcal{D}'(a,\sigma)$ en la fonction $\mathcal{L}[f_{\pm}] = F(z)$ que voici :

si $-a < x < \sigma$,

$$F(z+c) = \mathcal{L}[f_-(t)e^{-ct}] \quad \text{où} \quad c = \frac{\sigma - a}{2} \quad ;$$

si $\sigma < x < a$,

$$F(z+c) = \mathcal{L}[f_+(t)e^{-ct}] \quad \text{où} \quad c = \frac{\sigma + a}{2} \quad .$$

Evidemment : $\mathcal{L}$ possède encore les propriétés (1.2), ..., (1.6) ;

$\mathcal{L}$ applique isomorphiquement

$$\mathcal{D}(a,\sigma) \subset \widetilde{\mathcal{D}}(a,\sigma) \subset \mathcal{D}'(a,\sigma) \quad \text{sur} \quad \mathcal{H}(a,\sigma) \subset \widetilde{\mathcal{H}}(a,\sigma) \subset \mathcal{H}'(a,\sigma) \quad ;$$

si $f_{\pm} \in \mathcal{D}'(a,\sigma)$, si $f_+ = f_-$ et est noté f , alors $f \in \mathcal{D}'(a)$

et $\mathcal{L}[f_{\pm}] = \mathcal{L}[f]$.

Si $F \in \mathcal{H}'(a,\sigma)$ et si $f_{\pm} = \mathcal{L}^{-1}[F]$, alors f_+ et f_- sont notées :

$$f_+ = \mathcal{L}^{-1}_+[F] \ , \ f_- = \mathcal{L}^{-1}_-[F] \ .$$

Supposons que $F(z)$ ait pour seules singularités dans $B(a)$ un nombre fini de points; alors

$$\mathcal{L}^{-1}_+[F] - \mathcal{L}^{-1}_-[F] = \text{rés}\,[F(z)\,e^{tz}] \tag{5.1}$$

(rés : somme des résidus de ces points singuliers) .

<u>Preuve de (5.1)</u>. - La formule (2.2) donne

$$2\pi i\,[f_+(t) - f_-(t)] = e^{\frac{\sigma+a}{2}t}\, P\left(\frac{d}{dt}+\frac{\sigma+a}{2}\right)\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{F(z+\frac{\sigma+a}{2})\,e^{tz}\,dz}{P(z+\frac{\sigma+a}{2})}$$

$$- e^{\frac{\sigma-a}{2}t}\, P\left(\frac{d}{dt}+\frac{\sigma-a}{2}\right)\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{F(z+\frac{\sigma-a}{2})}{P(z+\frac{\sigma-a}{2})}\, e^{tz}\,dz$$

$$= P\left(\frac{d}{dt}\right)\int_{\frac{\sigma+a}{2}-i\infty}^{\frac{\sigma+a}{2}+i\infty} \frac{F(z)}{P(z)}\, e^{tz}\,dz - P\left(\frac{d}{dt}\right)\int_{\frac{\sigma-a}{2}-i\infty}^{\frac{\sigma-a}{2}+i\infty} \frac{F(z)}{P(z)}\, e^{tz}\,dz$$

$$= P\left(\frac{d}{dt}\right)\oint \frac{F(z)}{P(z)}\, e^{tz}\,dz = 2\pi i \;\; \text{rés}\,[F(z)e^{tz}] \;.$$

<u>Exemples</u>. - Si $z' = x' + iy'$ et $|x'| < a \leqslant c$, on a, avec $\sigma = x'$:

(5.2) $\mathcal{L}[(\mathrm{sgn.}\; t \pm 1)\, e^{tz'}] = \dfrac{2}{z-z'}$,

(5.3) $\mathcal{L}[(\coth(ct) \pm 1)\, e^{tz'}] = \dfrac{\pi}{c}\; \mathrm{cotg}\, \dfrac{\pi(z-z')}{2c}$.

<u>Preuve</u>. - Vu (1.6), il suffit de prouver ces formules quand $y' = 0$; vu la définition de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{D}(a,\sigma)$, (5.2) et (5.3) équivalent à

(5.4) $\mathcal{L}[(\mathrm{sgn}\; t \pm 1)\, e^{\mp\frac{at}{2}}] = \dfrac{2}{z \pm \frac{a}{2}}$

$$(5.5) \quad \mathcal{L}[(\coth ct \pm 1)\, e^{\mp \frac{at}{2}}] = \frac{\pi}{c} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2c}\left(z \pm \frac{a}{2}\right);$$

or (5.4) résulte de (2.6) ; vu (1.6), (5.5) résulte de la formule

$$\mathcal{L}[(\coth ct \pm 1)\, e^{\mp ct}] = \frac{\pi}{c} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2c} (z \pm c)$$

qui est identique à (2.8) .

6. PROLONGEMENT ANALYTIQUE DE $\mathcal{L}[f]$ HORS DE $B(a)$. - Notons

$$(6.1) \qquad \alpha^k F(z) = F(z+ka) \qquad (k\text{: nombre réel}) \quad ;$$

α est donc la translation $0 \to a$.

<u>Lemme</u>. - Soit $r(t)$ une fonction rationnelle et

$$F(z) = \mathcal{L}\left[\frac{r(t)}{\operatorname{sh}(at)}\right] \in \tilde{\mathcal{H}}(a) \quad ;$$

$F(z)$ est holomorphe dans le plan z muni des deux coupures réelles

$$[-\infty, -a] \quad , \quad [a, +\infty]$$

Pour prolonger analytiquement $F(z)$ hors de $B(a)$, on peut employer la formule :

$$(\alpha - \alpha^{-1})\, F(z) = \pm 2\pi i \ \text{rés}[r(t)\, e^{-tz}] \quad , \quad \text{où} \ \pm y > 0 \quad ;$$

rés désigne la somme des résidus des pôles réels de $r(t)\, e^{-tz}$.

<u>Preuve</u>. - Soit un polynome $p(t)$ et

$$F(z) = \mathcal{L}\left[\frac{1}{p(t)\operatorname{sh}(at)}\right] \quad ;$$

vu (1.3) et (2.8)

$$p\left(-\frac{d}{dz}\right) F(z) = -\frac{\pi}{a} \operatorname{tg} \frac{\pi z}{2a} \quad :$$

$F(z)$ est donc holomorphe dans le plan z muni des deux coupures réelles $[-\infty, -a]$ et $[a, \infty]$; puisque $\operatorname{tg} \frac{\pi z}{2a}$ a la période $2a$,

$$p\left(-\frac{d}{dz}\right)\left[F(z+a) - F(z-a)\right] = 0 \quad ;$$

$F(z+a) - F(z-a)$ est donc une exponentielle-polynome dans chacun des deux demi-plans $y > 0$ et $y < 0$ ou elle est définie; donc

$$F(z+a) - F(z-a) = \pm\left[\tilde{F}(z+a) - \tilde{F}(z-a)\right] \quad .$$

Or d'après (3.6)

$$\tilde{F}(z) = -\pi i \text{ rés } \frac{e^{-tz}}{p(t)\,\mathrm{sh}(at)}$$

Donc

$$F(z+a) - F(z-a) = \mp \pi i \text{ rés } \frac{e^{-t(z+a)} - e^{-t(z-a)}}{p(t)\,\mathrm{sh}(at)} = \pm 2\pi i \text{ rés } \frac{e^{-tz}}{p(t)}$$

En appliquant $q\left(\frac{d}{dz}\right)$ (q : polynome) à cette formule, on obtient le lemme.

<u>Lemme</u>. - Soit

$$F(z) = \mathcal{L}\left[\frac{r(t)}{\mathrm{ch}(at)}\right] \in \tilde{\mathcal{H}}(a) \quad ;$$

$F(z)$ est holomorphe dans le plan muni des deux mêmes coupures. Pour prolonger $F(z)$ hors de $B(a)$, on peut employer la formule :

$$(\alpha + \alpha^{-1})\,F(z) = \mp 2\pi i \text{ rés }\left[r(t)\,e^{-tz}\right] \quad .$$

<u>Preuve</u> analogue. - Soit

$$F(z) = \mathcal{L}\left[\frac{1}{p(t)\,\mathrm{ch}(at)}\right] \quad ;$$

vu (1.3) et

$$p\left(-\frac{d}{dz}\right) F(z) = \frac{\pi}{\cos \frac{\pi z}{2a}} \quad ;$$

donc

$$p\left(-\frac{d}{dz}\right)[F(z+a)+F(z-a)] = 0 \quad ;$$

$$F(z+a)+F(z-a) = \pm[\tilde{F}(z+a)+\tilde{F}(z-a)] = \mp \pi i \ \text{rés}\left[\frac{e^{-t(z+a)}+e^{-t(z-a)}}{p(t)\,\mathrm{ch}(at)}\right]$$

$$= \mp 2\pi i \ \text{rés}\,\frac{e^{-tz}}{p(t)} \ .$$

Les deux lemmes précédents permettent d'établir le suivant, où $\mathfrak{D}$ et $\tilde{\mathfrak{H}}$ pourraient être remplacés par $\mathfrak{D}'$ et $\mathfrak{X}'$:

<u>Lemme</u> 6.1. - Supposons que $f(t) \in \tilde{\mathfrak{D}}(a)$ et qu'il existe deux fonctions rationnelles $r_1(t)$ et $r_2(t)$ telles que

$$f(t) - \frac{1}{4} r_1(t)\left[\frac{1}{\mathrm{ch}(at)} - \frac{1}{\mathrm{sh}(at)}\right] - \frac{1}{4} r_2(t)\left[\frac{1}{\mathrm{ch}(at)} + \frac{1}{\mathrm{sh}(at)}\right] \in \tilde{\mathfrak{D}}(a+2c)$$

où $0 < c$. Alors $F(z) = \mathfrak{L}[f]$ est holomorphe dans $B(a+2c)$ muni des deux coupures réelles

$$[-a-2c\ ,\ -a]\ ,\quad [a\ ,\ a+2c]\ .$$

Pour prolonger analytiquement $F(z)$ hors de $B(a)$, on peut employer la propriété que voici : soit

$$p(\tau, t) = p_o(t) + \tau p_1(t) + \tau^{-1} p_2(t) \ ,$$

les p_i étant des polynomes; soit, en notant $\pm y > 0$:

$$\psi(z) = p\left(\alpha, \frac{d}{dz}\right) F(z) \pm \pi i \ \text{rés}\,[p_1(-t)\, r_1(t)\, e^{-tz}] \ , \text{ pour } o < x < 2c \ ;$$

$$\psi(z) = p\left(\alpha, \frac{d}{dz}\right) F(z) \pm \pi i \ \text{rés}\,[p_2(-t)\, r_2(t)\, e^{-tz}] \ , \text{ pour } -2c < x < 0 \ .$$

On a, si $2c \leqslant a$:

(6.1) $$\psi \in \tilde{\mathfrak{H}}(2c, o) \ ,$$

(6.2) $\overset{-1}{\mathcal{L}}_{+}[\psi] = p(e^{-at}, -t)\ f(t) - p_1(-t)\ r_1(t)$,

(6.3) $\overset{-1}{\mathcal{L}}_{-}[\psi] = p(e^{-at}, -t)\ f(t) - p_2(-t)\ r_2(t)$.

Preuve. - Notons

$$F_o(z) = \mathcal{L}\left[f - \frac{r_2 - r_1}{4\operatorname{sh}(at)} - \frac{r_2 + r_1}{4\operatorname{ch}(at)}\right] \in \tilde{\mathcal{H}}(a+2c)$$

$$F_1(z) = \mathcal{L}\left[\frac{r_2 - r_1}{4\operatorname{sh}(at)}\right] , \quad F_2(z) = \mathcal{L}\left[\frac{r_2 + r_1}{4\operatorname{ch}(at)}\right] ;$$

on a donc

$$F(z) = F_o(z) + F_1(z) + F_2(z) .$$

Puisque F_1 et F_2 sont holomorphes dans le plan muni des deux coupures $[-\infty, -a]$, $[a, +\infty]$, $F(z)$ est donc holomorphe dans $B(a + 2c)$ muni de ces deux coupures.

Vu (1.6) et les lemmes précédents, on a, pour $|x| < c \leqslant 2a$ $y \neq 0$ et $\pm y > 0$:

$$F_o(z + a + c) = \mathcal{L}\left[\left(f - \frac{r_2 - r_1}{4\operatorname{sh} at} - \frac{r_2 + r_1}{4\operatorname{ch} at}\right) e^{-(a+c)t}\right] \in \tilde{\mathcal{H}}(c) ,$$

$$F_1(z + a + c) - F_1(z - a + c) \mp 2\pi i \ \text{rés}\left[\frac{r_2 - r_1}{4} \ e^{-(z+c)t}\right] = 0 ,$$

$$F_1(z - a + c) = \mathcal{L}\left[\frac{r_2 - r_1}{4\operatorname{sh} at} \ e^{(a-c)t}\right] \in \tilde{\mathcal{H}}(c) ,$$

$$F_2(z + a + c) + F_2(z - a + c) \pm 2\pi i \ \text{rés}\left[\frac{r_2 + r_1}{4} \ e^{-(z+c)t}\right] = 0 ,$$

$$- F_2(z - a + c) = \mathcal{L}\left[-\frac{r_2 + r_1}{4\operatorname{ch} at} \ e^{(a-c)t}\right] \in \tilde{\mathcal{H}}(c) .$$

D'où, en ajoutant membre à membre ces relations :

$$F(z+a+c) \pm \pi i \text{ rés } [r_1 e^{-(z+c)t}] = \mathcal{L} [(f e^{-at} - r_1) e^{-ct}] \in \tilde{\mathcal{H}}(c) .$$

En appliquant $p_1(d/dz)$ à la relation précédente et $p_o(d/dz) + \alpha^{-1} p_2(d/dz)$ à $F(z+c) = \mathcal{L}[f e^{-ct}]$, on obtient :

$$\psi(z+c) = \mathcal{L}[\{ p(e^{-at}, -t) f(t) - p_1(-t) r_1(t) \} e^{-ct}] \in \tilde{\mathcal{H}}(c) .$$

Un calcul analogue donne

$$\psi(z-c) = \mathcal{L}[\{ p(e^{-at}, -t) f(t) - p_2(-t) r_2(t) \} e^{ct}] \in \tilde{\mathcal{H}}(c) .$$

Ces deux dernières formules équivalent à (6.1), (6.2), (6.3) .

<u>Lemme</u> 6.2. - Soit M un entier > 1 . Supposons que $f \in \tilde{\mathcal{D}}(M a)$ et qu'il existe deux fonctions rationnelles r_1 et r_2 telles que

$$(6.4) \quad f(t) - \frac{1}{4} r_1(t) \left[\frac{1}{ch(Mat)} - \frac{1}{sh(Mat)} \right] - \frac{1}{4} r_2(t) \left[\frac{1}{ch(Mat)} + \frac{1}{sh(Mat)} \right] \in \tilde{\mathcal{D}}(Ma+2c)$$

où $0 < c$. Alors, si $c \leq a$:

$$(6.5) \quad e^{(M-1)at} f(t) - \frac{1}{4} r_2(t) \left[\frac{1}{ch(at)} + \frac{1}{sh(at)} \right] \in \tilde{\mathcal{D}}(a+2c)$$

$$(6.6) \quad e^{(1-M)at} f(t) - \frac{1}{4} r_1(t) \left[\frac{1}{ch(at)} - \frac{1}{ch(at)} \right] \in \tilde{\mathcal{D}}(a+2c)$$

<u>Preuve de (6.5)</u>. -

$$r_1(t) e^{(M-1)at} \left[\frac{1}{ch(M at)} - \frac{1}{sh(M at)} \right] = - \frac{2 r_1 e^{-at}}{sh(2 M at)} \in \tilde{\mathcal{D}}((2M-1)a) ;$$

$$r_2(t) e^{(M-1)at} \left[\frac{1}{ch(M at)} + \frac{1}{sh(M at)} \right] - r_2 \left[\frac{1}{ch(at)} + \frac{1}{sh(at)} \right] =$$

$$= 2\, r_2 \left[\frac{e^{(2M-1)at}}{\mathrm{sh}(2M\, at)} - \frac{e^{at}}{\mathrm{sh}(2\, at)} \right] \in \tilde{\mathfrak{D}}(3\, a) \quad .$$

Le lemme 6.2 permet de généraliser comme suit le lemme 6.1 :

<u>Proposition</u> 6. - Soit un entier $M \geqslant 1$; supposons $0 < 2c < a$; faisons l'hypothèse (6.4) . Alors $F(z) = \mathfrak{L}[f]$ est holomorphe dans $B(Ma + 2c)$, muni des deux coupures réelles :

$$[-Ma - 2c\, ,\, -Ma]\ ,\ [Ma\, ,\, Ma + 2\, c] \ .$$

Pour prolonger analytiquement $F(z)$ hors de $B(M\, a)$, on peut employer la propriété que voici : soit

$$p(\tau, t) = \sum_{m=-M}^{M} \tau^m p_m(t) \ , \quad p_m \text{ étant un polynome;}$$

soit, en notant $\pm y > 0$:

$$\psi(z) = p\left(\alpha, \frac{d}{dz}\right) F(z) \pm \pi i \ \text{rés}\, [p_M(-t)\, r_1(t)\, e^{-tz}] \ , \text{ pour } 0 < x < 2c$$

$$\psi(z) = p\left(\alpha, \frac{d}{dz}\right) F(z) \pm \pi i \ \text{rés}\, [p_{-M}(-t)\, r_2(t)\, e^{-tz}] \ , \text{ pour } -2c < x < 0$$

On a, si $2c \leqslant a$:

$$\psi \in \tilde{\mathcal{H}}(2c\, ,\, 0) \ ,$$

$$\mathfrak{L}^1_+ [\psi] = p(e^{-at}, -t)\, f(t) - p_M(-t)\, r_1(t) \ ,$$

$$\mathfrak{L}^1_- [\psi] = p(e^{-at}, -t)\, f(t) - p_{-M}(-t)\, r_2(t) \ .$$

<u>Note</u> . - Ces rés. sont évidemment des exponentielles-polynomes

<u>Preuve</u>. - Si $p_M = p_{-M} = 0$, alors (1.3) et (1.6) prouvent cette proposition; on a $\psi \in \tilde{\mathcal{H}}(a)$. Si $M = 1$, cette proposition est identique au lemme 6.1. Il suffit donc de la prouver quand on a $M > 1$ et

$$p(\tau,t) = \tau^{-M} p_{-M}(t) \quad \text{ou} \quad = \tau^M p_M(t) \quad ;$$

elle s'obtient alors en remplaçant dans le lemme 6.1

$$f(t) \quad \text{par} \quad e^{(M-1)at} f(t) \quad \text{ou} \quad e^{(1-M)at} f(t)$$

et en employant le lemme 6.2 .

7. SOLUTIONS ANTI-ASYMPTOTIQUES D'ÉQUATIONS DE CONVOLUTION. - La proposition 6 a pour conséquence la suivante :

<u>Proposition</u> 7. - Soit

$$p(\tau,t) = \sum_{m=-M}^{M} \tau^m p_m(t) \quad , \quad q(\tau,t) = \sum_{m=-M}^{M} \tau^m q_m(t) \quad ,$$

les p_m et q_m étant des polynomes, $q_M \cdot q_{-M}$ n'étant pas identiquement nul; soit $r(t)$ une fonction rationnelle; soit

$$\Phi(z) = \mathcal{L}\left[\frac{r(t)}{q(e^{-at}, -t)}\right] \tag{7.1}$$

1°) $\Phi(z) \in \tilde{\mathcal{H}}(M a)$; $\Phi(z)$ est holomorphe dans le plan muni des deux coupures réelles

$$[-\infty, -(M+1)a] \quad , \quad [(M+1)a, \infty] \quad ;$$

elle est holomorphe sur chaque bord de ces coupures, sauf aux points[5] multiples de a .

5) Nous n'analysons pas la nature de ces singularités, alors qu'il est possible de le faire. Dans les plus simples des cas particuliers que nous rencontrerons, $F(z)$ est méromorphe ou primitive d'une fonction méromorphe.

2°) $\Phi(z)$ vérifie l'équation de convolution, qui emploie la notation (6.1) :

(7.2) $$q\left(\alpha, \frac{d}{dz}\right) \Phi(z) = \mp \pi i \text{ rés } [r(t)\, e^{-tz}] \quad (\text{rés: } \Sigma \text{ résidus pôles réels})$$

3°) Plus généralement : définissons, en notant $\pm y > 0$:

$$\psi(z) = p\left(\alpha, \frac{d}{dz}\right) \Phi(z) \pm \pi i \text{ rés } \left[\frac{p_M(-t)}{q_M(-t)} r(t) e^{-tz} \right] \text{ pour } 0 < x < a ,$$

$$\psi(z) = p\left(\alpha, \frac{d}{dz}\right) \Phi(z) \pm \pi i \text{ rés } \left[\frac{p_{-M}(-t)}{q_{-M}(-t)} r(t) e^{-tz} \right] \text{ pour } -a < x < 0 .$$

On a :

$$\psi \in \tilde{\mathcal{H}}(a, 0) ,$$

$$\mathcal{L}_+^{-1} [\psi] = \frac{p(e^{-at}, -t)}{q(e^{-at}, -t)} r(t) - \frac{p_M(-t)}{q_M(-t)} r(t) ,$$

$$\mathcal{L}_-^{-1} [\psi] = \frac{p(e^{-at}, -t)}{q(e^{-at}, -t)} r(t) - \frac{p_{-M}(-t)}{q_{-M}(-t)} r(t) .$$

<u>Preuve de</u> 3°). - Il est évident que

$$f(t) = \frac{r(t)}{q(e^{-at}, -t)} \qquad \in \tilde{\mathcal{D}}(M\, a)$$

et que l'hypothèse (6.4) est vérifiée, en prenant

$$r_1(t) = \frac{r(t)}{q_M(-t)} , \quad r_2(t) = \frac{r(t)}{q_{-M}(-t)} , \quad 2c = a .$$

Vu la proposition 6 , $\Phi(z)$ est donc holomorphe dans $B((M+1)a)$ muni des deux coupures réelle

$$[-(M+1)a \; , \; -Ma] \; , \; [Ma \; , \; (M+1)a]$$

et le 3°) de la proposition 7 est exact.

<u>Preuve de 2°) dans</u> $B(a)$. - Dans ce 3°) on choisit $p = q$; on obtient
$\psi = 0$; donc (7.2) vaut pour $z \in B(a)$, $y \neq 0$.

<u>Preuve de 1°)</u>. - (7.2) permet de calculer $p_M\left(\frac{d}{dz}\right)\Phi(z + Ma)$ en fonction des dérivées de $\Phi(z + (M-1)a)$, ..., $\Phi(z - Ma)$ et permet donc de prolonger analytiquement $\Phi(z)$ à tout le demi-plan $x > 0$, muni de la coupure réelle $[Ma, \infty]$, les seuls points singuliers des bords de cette coupure étant les multiples de a . L'équation (7.2) permet de calculer $p_{-M}\left(\frac{d}{dz}\right)\Phi(z - Ma)$ et de traiter de même le demi-plan $x < 0$. L'équation (7.2) se prolonge analytiquement à chacun des demi-plans $y > 0$ et $y < 0$.

Chapitre II

LA FONCTION DE GREEN (N+1)-HARMONIQUE

Ce chapitre étudie la fonction de Green du problème que voici :

8. UN PROBLÈME AUX LIMITES.- Dans le plan de la variable complexe $z = x + iy$, considérons la bande $B(a) : |x| < a$ et son adhérence $\overline{B(a)} : |x| \leq a$.

Problème aux limites.- On cherche sur $\overline{B(a)}$ une fonction numérique $F(x,y)$ vérifiant les conditions suivantes :

1°) $$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{N+1} F(x,y) = H(x,y) \quad \text{sur} \quad B(a),$$

la fonction ou distribution H étant donnée ;

2°) $$p_j\left(x, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) F(x,y) = K_j(x,y) \qquad (j = 0,\dots,N)$$

sur les deux bords $x = \pm a$ de $B(a)$, les K_j étant des fonctions données et les p_j des opérateurs différentiels donnés ; le plus grand de leurs ordres sera noté N_o ;

3°) $F(x,y)$ et ses dérivées d'ordres $\leq 2N + 1 + N_o$ sont continues sur $\overline{B(a)}$ et croissent lentement à l'infini.

L'hypothèse suivante sera faite : notons

$$(8.1) \qquad p_j^n(x,\zeta,\eta) = \left(x + \frac{d}{d\zeta}\right)^n p(x,\zeta,\eta) \ ; \ p_j^n(x,t) = p_j^n(x,t,it) \ ;$$

$$(8.2) \qquad P(x,t) = \text{dét}(p_j^n(x,t)) \qquad (j = 0,\dots,N \ ; \ n = 0,\dots,N) \ ;$$

nous supposons que le polynome $P(a,t)\,P(-a,t)$ de la variable t n'est pas identiquement nul.

<u>Le théorème d'unicité</u> que voici sera établi (n°12) sous cette hypothèse : ce problème aux limites, quand ses données H et K_j sont nulles, a pour seules solutions des exponentielles-polynomes :

$$\text{Re} \sum_h \overline{\omega}_h(x,z)\, e^{t_h z} \tag{8.3}$$

($\overline{\omega}_h$: polynomes ; t_h : nombres réels ; Re : partie réelle de ...) ; elles sont les combinaisons linéaires d'un nombre fini d'entre elles ; on pourrait les expliciter (comme les n°28 et 29 le font dans un cas particulier).

On sait que pour résoudre ce problème aux limites, il suffit de le résoudre dans le cas particulier suivant : les K_j sont nulles ; $H(x,y)$ est la mesure de Dirac $\delta(z - z')$, $z' = x' + iy'$ étant un point donné de $B(a)$; $F(x,y)$ est alors nommée <u>fonction de Green</u> et notée $G(z,z')$; nous lui imposerons d'être anti-asymptotique. Plus explicitement :

<u>La fonction de Green</u> $G(z,z')$ est définie par les conditions suivantes :

1°) $G(z,z')$ est une fonction numérique réelle, indéfiniment dérivable, de $z \in \overline{B}(a)$, pour $z \neq z'$; elle est N+1-harmonique, c'est-à-dire :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{N+1} G(z,z') = 0 \;;$$

2°) $$G(z,z') - \frac{1}{2\pi 4^N (N!)^2} \left|z - z'\right|^{2N} \log|z - z'|$$

est une fonction de z indéfiniment dérivable au point z', évidemment (N+1)-harmonique ;

3°) $p_j\left(x, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) G(z,z') = 0$ sur chacun des deux bords de $\overline{B(a)}$: $x = \pm a$.

4°) Il existe une exponentielle-polynome $\tilde{G}(z,z')$, c'est-à-dire une fonction du type (8.3) à coefficients fonctions de z', telle que

$$G(z,z') - \tilde{G}(z,z') \qquad [\text{et } \; G + \tilde{G}]$$

tende rapidement vers 0 quand, sur $\overline{B(a)}$, z tend vers $i\infty$ [et $-i\infty$], z' restant fixe.

Le théorème d'existence que voici sera établi (n°18) sous l'hypothèse qui précède : la fonction de Green $G(z,z')$ existe. Nous savons qu'elle est unique (n°12) ; nous préciserons sa structure et nous l'expliciterons (n°18) ; nous calculerons enfin sa partie singulière (n°19).

9. FONCTION $(N+1)$-HARMONIQUE DANS $B(a)$.- Rappelons un lemme classique :

Lemme. Toute fonction $(N+1)$-harmonique dans $B(a)$ est du type

$$F(z) = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N} x^n U_n(z) , \qquad (\text{Re : partie réelle de ...}) \tag{9.1}$$

les fonctions $U_n(z)$ étant holomorphes dans $B(a)$. On peut choisir les $U_n(z)$ à croissance lente sur $\overline{B(a)}$ quand F et ses dérivées d'ordre $\leqslant 2N+1$ sont à croissance lente.

Preuve. par récurrence sur N.- Supposons prouvé que

$$\Delta F(z) = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N-1} x^n V_n(z) \qquad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) ,$$

les $V_n(z)$ étant holomorphes dans $B(a)$ [et à croissance lente, si c'est le cas pour ΔF et ses dérivées d'ordres $\leqslant 2N-1$]. Pour qu'on ait

$$\operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N-1} x^n V_n(z) = \Delta \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{N} x^n U_n(z) ,$$

il suffit qu'on ait :

$$2n \frac{dU_n}{dz} + n(n+1)\, U_{n+1} = V_{n-1} \qquad (n = N, \dots, 1 \;;\; U_{N+1} = 0);$$

d'où, par quadratures, des $U_n(z)$, holomorphes dans $B(a)$ [à croissance lente], tels que

$$\Delta \operatorname{Re}[F - \sum_{n=1}^{N} x^n U_n] = 0 \quad ;$$

d'où le lemme.

10. FONCTION (N+1)-HARMONIQUE DANS UNE BANDE VÉRIFIANT UNE CONDITION DIFFÉRENTIELLE SUR L'UN DE SES BORDS.

Lemme. Si p est un polynome et n un entier $\geqslant 0$, alors, quelle que soit la fonction f, on a :

$$p(\frac{d}{dx})[x^n f(x)] = p^{(n)}(x, \frac{d}{dx})\, f(x) \quad ,$$

où

$$p^{(n)}(x, \zeta) = (x + \frac{d}{d\zeta})^n\, p(\zeta)\; .$$

Preuve. La formule de Leibniz donne

$$(\frac{d}{dx})^r\, [x\, f(x)] = x(\frac{d}{dx})^r\, f(x) + r(\frac{d}{dx})^{r-1}\, f(x) \; ;$$

le lemme est donc vrai quand $n = 1$. Une récurrence relative à n achève sa preuve.

Notations. Etant donné un opérateur différentiel $p(x, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$, nous posons :

(10.1) $\quad p^{(n)}(x, \zeta, \eta) = (x + \frac{d}{d\zeta})^n\, p(x, \zeta, \eta), \; p^n(x,t) = p^{(n)}(x,t,it)$

On a donc l'identité, qui caractérise les p^n :

$$e^{\tau x}\, p(x,\ t+\tau\ ,\ it) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!}\, p^n(x,t) \quad .$$

Le lemme qui précède a pour conséquence évidente le suivant :

Lemme. Si les fonctions $U_n(z)$ sont holomorphes, alors

$$p(x,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y})\mathrm{Re}\sum_{n=0}^{N} x^n\, U_n(z) = \mathrm{Re}\sum_{n=0}^{N} p^n(x,\frac{d}{dz})\, U_n(z).$$

Notations.- Nous notons $\bar{z} = x-iy$ l'imaginaire conjuguée de z ; étant donnée une fonction $U(z)$, son imaginaire conjuguée $\bar{U}(z)$ est définie par la relation

$$\bar{U}(\bar{z}) = \overline{U(z)} \quad ;$$

elle est donc holomorphe en même temps que U.

Nous notons

(10.2) $$\hat{U}(z) = \bar{U}(-z), \quad \hat{p}(x,t) = \bar{p}(x,\ -t) \quad .$$

Rappelons le principe de réflexion classique :

Lemme. Si $V(z)$ est holomorphe dans une bande $x \in]\beta\ ,\gamma[$ et continue sur la droite $x = \beta$, alors la condition

$$V(z) = 0 \qquad \text{pour} \qquad x = \beta$$

équivaut aux suivantes :

$V(z)$ est holomorphe pour $x \in]2\beta - \gamma, \gamma[$; $V(z+\beta) + \hat{V}(z-\beta) = 0$.

Les deux lemmes qui précèdent donnent immédiatement le suivant :

Lemme 9.- Soit, dans une bande $x \in]\beta\ ,\gamma[$, une fonction $(N+1)$-harmonique

$$F(z) = \mathrm{Re}\sum_{n=0}^{N} x^n\, U_n(z)\ ,$$

vérifiant la condition d'ordre N_o

$$(10.3) \qquad p(x, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}) F(z) = 0 \quad \text{sur la droite} \quad x = \beta \ ;$$

nous supposons que, sur cette droite, $F(z)$ est $(2N + 1 + N_o)$-fois continûment différentiable. Alors cette condition (10.3) équivaut aux suivantes :

$$\sum_{n=0}^{N} p^n(\beta, \frac{d}{dz}) U_n(z + \beta)$$

est holomorphe pour $z \in B(|\gamma - \beta|)$;

$$\sum_{n=0}^{N} p^n(\beta, \frac{d}{dz}) U_n(z + \beta) + \sum_{o}^{N} \hat{p}^n(\beta, \frac{d}{dz}) \hat{U}_n(z - \beta) = 0 \ .$$

11. FONCTION (N+1)-HARMONIQUE DANS UNE BANDE, VÉRIFIANT N+1 CONDITIONS DIFFÉRENTIELLES SUR L'UN DE SES BORDS.- Notations. Nous nous donnons N+1 opérateurs différentiels

$$p_j(x, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}) \qquad (j = 0, 1, \ldots, N) \ ;$$

conformément à (10.1), nous définissons $p_j^n(x,t)$ par (8.1) ; nous définissons $P(x,t)$ par (8.2).

Le théorème suivant est un cas particulier des théorèmes de réflexion de Hans Lewy [6] , F. Sloss [7] et D. Brown [2] :

THÉORÈME DE RÉFLEXION.- *Soit, dans une bande* $x \in]\beta, \gamma[$, *une fonction (N+1)-harmonique*

$$(11.1) \qquad F(z) = \mathrm{Re} \sum_{n=0}^{N} x^n U_n(z) \ ,$$

vérifiant les N+1 conditions différentielles :

$$(11.2) \qquad p_j(x, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}) F(z) = 0 \quad \text{sur la droite} \quad x = \beta \ (j = 0,1,\ldots,N) \ ;$$

soit N_0 le plus grand de leurs ordres ; nous supposons que, sur cette droite, $F(z)$ est $(2N+1+N_0)$-fois continûment différentiable ; nous supposons le polynome en t : $P(\beta, t)$ non identiquement nul.

1°) Ces conditions (11.2) équivalent aux suivantes :

$$U_n(z+\beta) \text{ est holomorphe pour } z \in B(|\gamma - \beta|) \; ; \tag{11.4}$$

$$\sum_{n=0}^{N} p_j^n\left(\beta, \frac{d}{dz}\right) U_n(z+\beta) + \sum_{n=0}^{N} \hat{p}_j^n\left(\beta, \frac{d}{dz}\right) \hat{U}_n(z-\beta) = 0 \quad (j = 0, \ldots, N) \, . \tag{11.5}$$

2°) Si $F(z)$ et ses dérivées d'ordres $\leqslant 2N+1+N_0$ sont à croissance lente sur la bande $x \in [\beta, \gamma[$, fermée sur son bord $x = \beta$, alors

$$U_n(z+\beta) \in \mathcal{H}'(|\gamma - \beta|) \, . \tag{11.6}$$

Preuve de 1°).- On applique le lemme 9 : les fonctions

$$\sum_{n=0}^{N} p_j^n\left(\beta, \frac{d}{dz}\right) U_n(z+\beta) \tag{11.7}$$

sont holomorphes dans $B(|\beta - \gamma|)$; puisque dét $p_j^n\left(\beta, \frac{d}{dz}\right) \neq 0$, les fonctions $U_n(z+\beta)$, qui sont holomorphes pour $x \in]0, \gamma - \beta[$, se prolongent donc analytiquement à $B(|\gamma - \beta|)$.

Preuve de 2°).- L'hypothèse faite sur $F(z)$ implique que les fonctions $U_n(z+\beta)$ et leurs dérivées d'ordres $\leqslant N_0$ sont à croissance lente dans la bande $x \in [0, \gamma - \beta[$; donc, vu (11.5), les fonctions (11.7) $\in \mathcal{H}'(|\gamma - \beta|)$; d'où (11.6), par intégration sur les droites $x = \text{const.}$

12. UNICITÉ, A DES EXPONENTIELLES-POLYNOMES PRÈS, DE LA SOLUTION DU PROBLÈME AUX LIMITES ÉNONCÉ n°8.- Supposons : les données H et K_j de ce problème nulles ; .

(12.1) le polynome $P(a,t)\,P(-a,t)$ non identiquement nul.

Alors, d'après le théorème de réflexion (n°11), les solutions de ce problème sont les fonctions

$$F(z) = \mathrm{Re} \sum_{n=0}^{N} x^n U_n(z)$$

vérifiant les deux conditions : $U_n(z)$ est holomorphe dans $B(2a)$, à croissance lente dans toute $b(2a)$;

$$\sum_{n=0}^{N} p_j^n(\pm a, \frac{d}{dz})\, U_n(z \pm a) + \sum_{0}^{N} \hat{p}_j^n(\pm a, \frac{d}{dz})\, \hat{U}_n(z \mp a) = 0 .$$

Introduisons la transformée de Laplace (ch. I):

$$u_n(t) = \mathcal{L}^{-1}[U_n(z)] ;$$

notons

(12.2) $$\hat{u}_n(t) = \bar{u}_n(-t) ;$$

d'après le n°2, (1.3) et (1.6) les conditions précédentes s'énoncent :

(12.3) $$u_n(t) \in \mathcal{D}'(a)$$

$$\sum_{n=0}^{N} e^{-at} p_j^n(a, -t)\, u_n(t) + \sum_{n=0}^{N} e^{at} p_j^n(a, -t)\, \hat{u}_n(t) = 0 ,$$

(12.4)
$$\sum_{n=0}^{N} e^{at} p_j^n(-a, -t)\, u_n(t) + \sum_{n=0}^{N} e^{-at} p_j^n(-a, -t)\, \hat{u}_n(t) = 0 .$$

Notre problème aux limites se ramène ainsi à la recherche des distributions u_n et $\hat{u}_n$, vérifiant (12.2) et (12.3), solutions du système linéaire et homogène (12.4). Le déterminant de ce système va être désormais essentiel.

<u>Notation</u>.- Notons

$$(12.5)\quad Q(\tau,t) = \text{dét}\begin{pmatrix} \tau\, p_j^m(a,t) & \tau^{-1}\,\hat{p}_j^n(a,t) \\ \\ \tau^{-1}\, p_k^m(-a,t) & \tau\,\hat{p}_k^n(-a,t) \end{pmatrix}$$

où $m, n, j, k = 0,1,\dots, N$;

$\overline{Q}(\overline{\tau}, \overline{t}) = \overline{Q(\tau,t)}$; $\hat{Q}(\tau,t) = Q(\tau^{-1}, -t)$.

<u>Propriétés de</u> $Q(\tau,t)$.- $Q(\tau,t)$ est un polynome en τ, τ^{-1}, t ;

$$(12.6)\qquad \hat{Q}(\tau, t) = (-1)^{N+1}\, Q(\tau,t) \quad ;$$

les seules puissances de τ que contient $Q(\tau,t)$ sont

$$(12.7)\qquad \tau^{2N+2},\dots, \tau^{2N+2-4k},\dots\ \tau^{-2N-2} \qquad (0 \leqslant k \leqslant N+1) \ ;$$

ses termes de plus haut et plus bas degrés en τ sont

$$(12.8)\quad \tau^{2N+2}\, P(a,t)\,\hat{P}(-a, t) \quad \text{et} \quad (-1)^{N+1}\,\tau^{-2N-2}\, P(-a,t)\,\hat{P}(a,t)\ .$$

<u>Preuve de</u> (12.7).- Dans le dét. (12.5), multiplions

les $(N+1)$ premières lignes par i

$N+1$ autres lignes $-i$

$N+1$ dernières colonnes -1 ;

nous obtenons $Q(i\tau,t)$; donc

$$Q(i\tau,t) = (-1)^{N+1}\, Q(\tau,t)\ ;$$

$Q(\tau,t)$ ne contient donc que des puissances $\tau^{2N+2-4k}$ de τ (k entier).

Les solutions de (12.4) vérifient

$$(12.9) \qquad Q(e^{-at}, -t)\, u_n(t) = 0 \quad .$$

Or, vu (12.1) et (12.8) $Q(e^{at},t)$ n'est pas identiquement nul ; l'ensemble de ses zéros t_h est fini ; (12.9) signifie que

$$u_n(t) = \sum_h \varpi_n^h\left(\frac{d}{dt}\right)\delta(t + t_h) \; ,$$

ϖ_n^h étant un polynome dont le degré est inférieur à l'ordre du zéro t_h de $Q(e^{at},t)$; d'où, vu (2.5)

$$U_n(z) = \sum_h \varpi_n^h(z)\, e^{t_h z} \quad .$$

D'où le théorème suivant, qu'a déjà résumé le n°8 :

THÉORÈME D'UNICITÉ.- Supposons l'hypothèse (12.1) vérifiée. Soit $F(z)$ une fonction vérifiant les conditions suivantes :

1°) $F(z)$ est $(N+1)$ - harmonique sur $B(a)$;

2°) $F(z)$ vérifie les $N+1$ conditions aux bords

$$p_j\left(x, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)F(z) = 0 \quad \text{pour} \quad x = \pm a,\ j = 0,\ldots, N \; ;$$

les p_j sont des opérateurs différentiels donnés ; leur plus grand ordre est N_o ;

3°) $F(z)$ et ses dérivées d'ordres $\leq 2N+1+N_o$ sont à croissance lente sur $\overline{B(a)}$.

Alors $F(z)$ est nécessairement une exponentielle-polynome :

$$F(z) = \mathrm{Re} \sum_h \varpi_h(x,z)e^{t_h z} \quad ;$$

t_h est un zéro réel de la fonction $Q(e^{at},t)$, que définit (12.5) ; ses zéros réels sont en nombre fini et deux à deux opposés ; $\overline{\omega}_h(x,z)$ est un polynome dont le degré en x est au plus N et le degré en z inférieur à l'ordre du zéro t_h .

Ces $F(z)$ constituent donc un espace vectoriel de dimension finie.

Puisque deux exponentielles-polynomes ne peuvent être anti-asymptotiques sans être nulles, ce théorème donne :

COROLLAIRE.- Sous l'hypothèse (12.1), il existe au plus une fonction de Green.

13. DÉBUT DU CALCUL DE LA FONCTION DE GREEN.- Le n°8 a défini cette fonction. Nous faisons l'hypothèse (12.1).

Le théorème de réflexion permet d'exprimer qu'une fonction $G(z,z')$ est une fonction de z $(N+1)$-harmonique dans $B(a)$, pour $x \neq x'$, et qu'elle vérifie les conditions aux bords imposées à la fonction de Green ; il suffit que :

$$G(z,z') = \mathrm{Re} \sum_{n=0}^{N} x^n U_n(z,z') \; ; \tag{13.1}$$

$$U_n(z,z') \in \tilde{\mathcal{H}}(2a - |x'|, x') \quad \text{(en tant que fonction de } z) \; ; \tag{13.2}$$

$$\sum_{n=0}^{N} p_j^n(\pm a, \frac{d}{dz}) U_n(z \pm a) + \sum_{n=0}^{N} \hat{p}_j^n(\pm a, \frac{d}{dz}) \hat{U}_n(z \pm a) = 0 \quad . \tag{13.3}$$

La fonction $G(z,z')$ a la singularité imposée à la fonction de Green quand on a, mod. les fonctions de (x,y) indéfiniment dérivables sur $B(a)$:

$$2\pi 4^N (N!)^2 G(z,z') \equiv |z-z'|^{2N} \log|z-z'|$$

$$\equiv \operatorname{Re} |z-z'|^{2N} \log(z-z')$$

$$\equiv \operatorname{Re}[2(x-x')-(z-z')]^N [z-z']^N \log(z-z')$$

$$\equiv \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{N-n} \frac{(-1)^{N-n} N!\, 2^{n+k}}{(N-n-k)!n!k!} x^n x'^k (z-z')^{2N-n-k} \log(z-z').$$

Il suffit donc qu'on ait, mod. les fonctions holomorphes de z :

$$2\pi 4^N N! U_n(z,z') \equiv \sum_{k=0}^{N-n} \frac{(-1)^{N-n}\, 2^{n+k}}{(N-n-k)!n!k!} x'^k (z-z')^{2N-n-k} \log(z-z') ,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial^{2N+1} U_n(z,z')}{\partial z^{2N+1}} \equiv 2\, \ell_n(x', \tfrac{d}{dz}) \frac{1}{z-z'} ,$$

en notant

$$(13.4)\quad \ell_n(x',t) = \frac{(-1)^{N-n}}{\pi N!\, n!} \sum_{k=0}^{N-n} \frac{(2N-n-k)!}{(N-n-k)!k!} 2^{n+k-2N-2} x'^k t^{n+k} .$$

Il suffit donc qu'on ait, pour $c > a$:

$$(13.5)\quad \frac{\partial^{2N+1} U_n(z,z')}{\partial z^{2N+1}} - \frac{\pi}{c} \ell_n(x', \tfrac{d}{dz}) \operatorname{cotg} \frac{\pi(z-z')}{2c} \in \mathcal{H}(2a-|x'|) .$$

En résumé :

Lemme 13.- La fonction $G(z,z')$, définie par (13.1), où les U_n vérifient (13.2), (13.3) et (13.5), est la fonction de Green, si elle possède la propriété suivante : il existe une exponentielle-polynome $\tilde{G}(z,z')$, du type (8.3), à coefficients fonctions de z', telle que

$$G(z,z') - \tilde{G}(z,z') \quad [\text{et } G + \tilde{G}]$$

tende rapidement vers 0 quand z tend vers $i\infty$ [et $-i\infty$[, z' restant fixe.

<u>Note</u>.- ℓ_n est <u>caractérisé</u> par l'identité suivante, que nous emploierons deux fois :

$$(13.6) \qquad \sum_{n=0}^{N} x^n \ell_n(x', \frac{d}{dz}) \frac{(z-z'-w)^{2N}}{(2N)!} = \frac{(z-z'-w)^N(\bar{z}-\bar{z}'+w)^N}{\pi 4^{N+1} (N!)^2}$$

<u>Preuve de</u> (13.6) :

$$\sum_{n=0}^{N} x^n \ell_n(x', \frac{d}{dz}) \frac{(z-z'-w)^{2N}}{(2N)!} = \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{N-n} \frac{(-1)^N}{\pi N!} \frac{(z-z'-w)^{2N-n-k}}{(N-n-k)!} \frac{(-2x)^n}{n!} \frac{(2x')^k}{k!} =$$

$$\frac{(-1)^N}{\pi 4^{N+1}(N!)^2} (z-z'-w)^N(z-z'-2x+2x'-w)^N = \frac{(z-z'-w)^N(\bar{z}-\bar{z}'+w)^N}{\pi 4^{N+1}(N!)^2} .$$

14. APPLICATION DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE A LA RECHERCHE DES U_n.- Employons les définitions du n°5 ; notons

$$(14.1) \quad u_{n-}(t,y') = \mathcal{L}_-^{-1}[U_n(z,z')], \; u_{n+}(t,z') = \mathcal{L}_+^{-1}[U_n(z,z')] .$$

La condition (13.2) s'énonce :

$$(14.2) \quad \begin{aligned} & u_{n-}\, e^{(a-\frac{x'+|x'|}{2})t} \in \tilde{\mathfrak{D}}(a + \frac{x'-|x'|}{2}) . \\ & u_{n+}\, e^{-(a+\frac{x'-|x'|}{2})t} \in \tilde{\mathfrak{D}}(a - \frac{x'+|x'|}{2}) . \end{aligned}$$

Vu (5.2) et la possibilité de diviser par t dans $\tilde{\mathfrak{D}}$, la condition (13.5) s'énonce comme suit : on a

$$(14.3) \qquad u_{n\pm} + \frac{1}{t^{2N+1}} \ell_n(x', -t)[\coth(ct) \pm 1]\, e^{tz'} \in \tilde{\mathfrak{D}}(2a - |x'|) ,$$

le premier membre étant <u>indépendant</u> du choix du signe $\pm$. Il est évident que

$$\frac{1}{t^{2N+1}} \ell_n (x', -t)[\coth(ct) - 1]\, e^{tz'}\, e^{(a - \frac{x'+|x'|}{2})t} \in \tilde{\mathfrak{D}}(a + \frac{x'-|x'|}{2}) \;;$$

donc (14.3) implique $(14.2)_1$; il implique de même $(14.2)_2$.

D'autre part (14.3) signifie qu'il existe une fonction

$$(14.4) \qquad \begin{aligned} u_n(t,z') &= u_{n+}(t,z') + \frac{1}{t^{2N+1}} \ell_n (x', -t)\, e^{tz'} \\ &= u_{n-}(t,z') - \frac{1}{t^{2N+1}} \ell_n (x', -t)\, e^{tz'} \end{aligned}$$

telle que

$$(14.5) \qquad u_n(t,z') + \frac{1}{t^{2N+1}} \ell_n(x', -t)\, e^{tz'} \coth(ct) \in \tilde{\mathfrak{D}}(2a - |x'|) \;.$$

En résumé, (14.1) transforme les conditions (13.2) et (13.5) en (14.4) et (14.5).

Ecrivons maintenant la relation en laquelle (14.1) transforme (13.3) :

<u>Définition</u> de $\hat{U}_n(z,z')$ <u>et</u> $\hat{u}_n(t,z')$.- Nous notons comme si z' était constant :

$$\bar{U}_n(\bar{z},z') = \overline{U_n(z,z')} \;, \qquad \hat{U}_n(z,z') = \bar{U}_n(-z,z') \;;$$

$$(14.6) \qquad \bar{u}_{n\pm}(t,z') = \overline{u_{n\pm}(t,z')} \quad (t \text{ réel}), \quad \hat{u}_{n\pm}(t,z') = \bar{u}_{n\pm}(-t, z') \;;$$

$\bar{u}_n$ et $\hat{u}_n$ se définissent de même.

D'où, vu les définitions du n°5, les formules, dont l'analogie avec (14.1) n'est que partielle :

$$(14.7) \qquad \hat{u}_{n-}(t,z') = \mathcal{L}^{-1}_{+}[\hat{U}_n(z,z')] \;, \quad \hat{u}_{n+}(t,z') = \mathcal{L}^{-1}_{-}[\hat{U}_n(z,z')]$$

D'après le n°5, (14.1) et (14.7) donnent :

$$U_n(z \pm a, z') = \mathcal{L}[u_{n\pm}(t,z')\, e^{\mp at}] \qquad \text{pour} \quad z \in B(a - |x'|) ,$$

$$\hat{U}_n(z \mp a, z') = \mathcal{L}\,[\hat{u}_{\pm}(t,z')\, e^{\pm at}] \qquad \text{pour} \quad z \in B(a - |x'|) ;$$

donc $\mathcal{L}^{-1}$ transforme (13.3) en la relation

$$\sum_{n=0}^{N} e^{\mp at}\, p_j^n(\pm a, -t)\, u_{n\pm}(t,z') + \sum_{n=0}^{N} e^{\pm at}\, \hat{p}_j^n(\pm a, -t)\, \hat{u}_{\pm}(t,z') = 0$$

Portons dans cette relation l'expression (14.4) de $u_{n\pm}$ et l'expression de $\hat{u}_{n\pm}$ qui s'en déduit par (14.6) :

$$\hat{u}_n(t,z') = \hat{u}_{n\pm}(t,z') \mp \frac{1}{t^{2N+1}}\, \ell_n(x',-t) e^{-t\bar{z}'} \quad ;$$

nous obtenons le système :

$$\sum_{n=0}^{N} e^{-at}\, p_j^n(a,-t)[u_n(t,z') - v_n(t,z')] + \sum_{n=0}^{N} e^{at}\, \hat{p}_j^n(a,-t)[\hat{u}_n(t,z') - \hat{v}_n(t,z')] = 0$$

(14.7)

$$\sum_{n=0}^{N} e^{at}\, p_j^n(-a,-t)[u_n(t,z') + v_n(t,z')] + \sum_{n=0}^{N} e^{-at}\, \hat{p}_j^n(-a,-t)[\hat{u}_n(t,z') + \hat{v}_n(t,z')] = 0$$

où, puisque ℓ_n est réel :

$$v_n(t,z') = \frac{1}{t^{2N+1}}\, \ell_n(x',-t)\, e^{tz'}$$

(14.8)

$$\hat{v}_n(t,z') = -\frac{1}{t^{2N+1}}\, \ell_n(x',+t)\, e^{-t\bar{z}'} \quad .$$

Si nous ne tenons pas compte de la relation liant u_n et $\hat{u}_n$, (14.7) est un système linéaire, dont le discriminant $Q(e^{-at},-t)$ n'est pas identiquement nul : le n°12 l'a déduit de l'hypothèse (12.1) ; il définit donc un système unique de fonctions u_n , $\hat{u}_n$. Ces fonctions vérifient la relation liant

u_n et $\hat{u}_n$, puisque ^ laisse invariant chacune des équations (14.7).

Nous avons donc établi le

<u>Lemme</u> 14.- Si la solution $u_n(t,z')$ du système linéaire (14.7) vérifie (14.5), alors les fonctions

$$(14.9)\quad U_n(z,z') = \mathcal{L}[u_n(t,z') \mp \frac{1}{t^{2N+1}} \ell_n(x',-t)e^{tz'}]$$

vérifient les conditions (13.2), (13.3) et (13.4) qu'exige le lemme 13.

<u>Note</u>.- (14.9) emploie sur $\tilde{\mathfrak{D}}(2a-|x'|,x')$ la définition de $\mathcal{L}[f\pm]$ qu'énonce le n°5

15. LA SOLUTION DU SYSTÈME LINÉAIRE (14.7) est donnée par les formules :

$$(15.1)\quad Q(e^{-at},-t)u_n(t,z') = \sum_j Q_n^j(e^{-at},-t)v_j(t,z') + \sum_j R_n^j(e^{-at},-t)\,\hat{v}_j(t,z')$$

où $Q(\tau,t)$ est le déterminant (12.5), les $Q_n^j(\tau,t)$ et $R_n^j(\tau,t)$ étant des déterminants que nous allons définir et étudier.

<u>Définition de</u> $Q_r^s(\tau,t)$.- C'est le déterminant qui se déduit du déterminant $Q(\tau,t)$ en remplaçant la colonne

$$\begin{matrix} \tau\, p_j^r(a,t) & \qquad \text{par} \qquad & \tau\, p_j^s(a,t) \\ \tau^{-1}\, p_k^r(-a,t) & & -\tau^{-1}\, p_k^s(-a,t) \end{matrix}\ .$$

Notons

$$\bar{Q}_r^s(\bar{\tau},\bar{t}) = \overline{Q_r^s(\tau,t)}\quad ;\quad \hat{Q}_r^s(\tau,t) = \bar{Q}_r^s(\tau^{-1},-t)\ .$$

On établit, comme pour Q, les

<u>Propriétés</u>.- $Q_r^s(\tau,t)$ est un polynome en τ, τ^{-1} ;

les seules puissances de τ que contient $Q_r^s(\tau,t)$ sont

$$\tau^{2N-2},\ldots,\tau^{2N+2-4k},\ldots,\tau^{-2N+2} \quad (0<k\leqslant N) \quad \text{si} \quad r\neq s\,,$$

(15.2)

$$\tau^{2N+2},\ldots,\tau^{2N+2-4k},\ldots,\tau^{-2N-2} \quad (0\leqslant k\leqslant N+1) \quad \text{si} \quad r=s\,;$$

les termes de $Q_r^r(\tau,t)$ de plus haut et plus bas degrés en sont

(15.3) $\tau^{2N+2}\, P(a,t)\, \hat{P}(-a,t)$ et $(-1)^N \tau^{-2N-2}\, P(-a,t)\, \hat{P}(a,t)$.

<u>Définition de</u> $R_r^s(\tau,t)$.- C'est le déterminant qui se déduit du déterminant $Q(\tau,t)$ en remplaçant la colonne

$$\begin{matrix} \tau\, p_j^r(a,t) \\ \tau^{-1}\, p_k^r(-a,t) \end{matrix} \quad \text{par} \quad \begin{matrix} \tau^{-1}\, \hat{p}_j^s(a,t) \\ -\,\tau\, \hat{p}_k^s(-a,t)\,. \end{matrix}$$

<u>Propriétés de</u> $R_r^s(\tau,t)$.- $R_r^s(\tau,t)$ est un polynome en τ, τ^{-1}, t ; les seules puissances de τ que contient $R_r^s(\tau,t)$ sont

(15.4) $\tau^{2N},\ldots,\tau^{2N-4k},\ldots,\tau^{-2N}$ $\quad (0\leqslant k\leqslant N)$;

les termes de $R_r^s(\tau,t)$ de plus haut et plus bas degrés en τ sont

(15.5) $2\tau^{2N}\, P_r^s(a,t)\, \hat{P}(-a,t)$ et $(-1)^N\, 2\tau^{-2N}\, P_r^s(-a,t)\, \hat{P}(a,t)$,

en notant $P_r^s(x,t)$ le déterminant qui se déduit du déterminant $P(x,t)$, que définit (8.2), en remplaçant sa colonne $p_j^r(x,t)$ par $\hat{p}_j^s(x,t)$.

<u>Preuve de</u> (15.4).- Dans le déterminant $R_r^s(\tau,t)$, multiplions

les N+1 premières lignes par i

les N+1 autres lignes par $-i$

les N+1 dernières colonnes par -1

la $r^{\text{ième}}$ colonne par -1 ;

nous obtenons $R_r^s(i\tau,t)$; donc

$$R_r^s(i\tau,t) = (-1)^N R_r^s(\tau,t) \quad ;$$

$R_r^s(\tau,t)$ ne contient donc que des puissances τ^{2N-4k} de τ (k entier). Pour achever la preuve de (15.4), il suffit de prouver (15.5).

<u>Preuve de</u> (15.5).- La définition de R_r^s peut s'énoncer comme suit : $\frac{1}{2} R_r^s(\tau,t)$ est le déterminant qui se déduit du déterminant $Q(\tau,t)$ en remplaçant la colonne

$$\begin{matrix} \tau\, p_j^r(a,t) \\ \tau^{-1}\, p_k^r(-a,t) \end{matrix} \quad \text{par} \quad \begin{matrix} \tau^{-1}\, \hat{p}_j^s(a,t) \\ 0 \end{matrix} \quad \text{ou par} \quad \begin{matrix} 0 \\ -\tau\, \hat{p}_k^s(-a,t) \end{matrix} \;;$$

d'où (15.5).

16. LE CALCUL DE $U_n(z,z')$.- <u>Lemme</u>.- La solution $u_n(t,z')$ du système (14.7) vérifie l'hypothèse (14.5) du lemme 14.

<u>Preuve</u>.- En portant les valeurs (14.8) de v_n et $\hat{v}_n$ dans (15.1), nous obtenons

$$(16.1) \quad u_n(t,z') = \sum_{j=0}^{N} \frac{Q_n^j(e^{-at},-t)}{Q(e^{-at},-t)} \frac{\ell_j(x',-t)}{t^{2N+1}} e^{tz'}$$

$$- \sum_{j=0}^{N} \frac{R_n^j(e^{-at},-t)}{Q(e^{-at},-t)} \frac{\ell_j(x',+t)}{t^{2N+1}} e^{-t\bar{z}'} \quad .$$

Les propriétés (12.8), (15.2), (15.3) et (15.4) de Q, Q_s^r et R_s^r montrent que

$$\frac{Q_n^n(e^{at},t)}{Q(e^{at},t)} - \coth(ct) \in \tilde{\mathfrak{D}}(4a) , \qquad \text{pour} \quad 2a < c$$

$$\frac{Q_n^j(e^{at},t)}{Q(e^{at},t)} \in \tilde{\mathcal{D}}(4a) \quad \text{pour } j \neq n \; ; \quad \frac{R_n^j(e^{at},t)}{Q(e^{at},t)} \in \tilde{\mathcal{D}}(2a) .$$

D'où (14.5) .

Vu (16.1) et (1.6), le lemme 14 s'énonce donc :

Lemme.- Les fonctions

$$U_n(z,z') = V_n(x',z-z') + W_n(x',z+\bar{z}') ,$$

où

$$(16.2) \qquad V_n(x',z) = \mathcal{L}[\sum_{j=0}^{N} \frac{Q_n^j(e^{-at},-t)}{Q(e^{-at},-t)} \frac{\ell_j(x',-t)}{t^{2N+1}} \mp \frac{\ell_n(x,-t')}{t^{2N+1}}] \in \tilde{\mathcal{H}}(4a,0),$$

$$(16.3) \; W_n(x',z) = -\mathcal{L}[\sum_{j=0}^{N} \frac{R_n^j(e^{-at},-t)}{Q(e^{-at},-t)} \frac{\ell_j(x',+t)}{t^{2N+1}}] \in \tilde{\mathcal{H}}(2a) ,$$

vérifient les conditions (13.2), (13.3) et (13.4) qu'exige le lemme 13.

Note.- (16.2) emploie la définition de $\mathcal{L}[f_\pm]$ qu'énonce le n°5 .

Ce lemme 13 s'énonce donc :

Lemme 16.- Soit

$$(16.4) \qquad G(z,z') = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N} x^n [V_n(x',z-z') + W_n(x',z+\bar{z}')] ,$$

V_n et W_n étant définis par (16.2) et (16.3) ; $G(z,z')$ est la fonction de Green s'il existe une exponentielle-polynome $\tilde{G}(z,z')$, du type (8.3), à coefficients fonctions de z' , telle que

$$G(z,z') - \tilde{G}(z,z') \qquad [\text{et} \;\; G + \tilde{G}]$$

tende rapidement vers 0 quand z tend vers $i\infty$ [et $-i\infty$] , z' restant fixe.

Pour obtenir $\tilde{G}$, simplifions l'expression (16.4) de G .

17. EXPRESSION DE G AU MOYEN D'UNE SEULE FONCTION HOLOMORPHE $\Phi(z)$.-

<u>Définition</u>.- Soit

$$(17.1)\qquad \Phi(z) = \mathcal{L}\left[\frac{1}{t^{2N+1}\,Q(e^{-at},-t)}\right] \in \tilde{\mathcal{H}}((2N+2)a) .$$

Rappelons que la proposition 7 s'applique à $\Phi(z)$; nous notons

$$\alpha^k\,\Phi(z) = \Phi(z+ka) \qquad (k : \text{entier} \geqslant 0 \text{ ou } < 0) ;$$

nous avons d'après le 2°) de cette proposition :

$$(17.2)\qquad Q(\alpha,\tfrac{d}{dz})\Phi(z) = \mp \pi i \frac{z^{2N}}{(2N)!} \quad , \text{où} \quad \pm y > 0 .$$

<u>Calcul de</u> $V_n(x',z)$ <u>et</u> $W_n(x',z)$.- D'après (1.3) et (1.6) , (16.3) s'écrit :

$$(17.3)\quad W_n(x',z) = -\sum_{j=0}^{N} R_n^j(\alpha,\tfrac{d}{dz})\,\ell_j(x',-\tfrac{d}{dz})\,\Phi(z) \in \tilde{\mathcal{H}}(2a) .$$

La proposition 7, où l'on fait

$$p(\tau,t) = \sum_{j=0}^{N} Q_n^j(\tau,t)\,\ell_j(x',t) \;,\; q(\tau,t) = Q(\tau,t) \;,\; r = \frac{1}{t^{2N+1}}$$

$$M = 2N+2 \;,\; \frac{p_M(t)}{q_M(t)} = \ell_n(x',t) \;,\; \frac{p_{-M}(t)}{q_{-M}(t)} = -\ell_n(x',t) \;,\; \psi = V_n$$

donne, en prenant $\pm xy > 0$:

$$(17.4)\quad V_n(x',z) = \sum_{j=0}^{N} Q_n^j(\alpha,\tfrac{d}{dz})\,\ell_j(x',\tfrac{d}{dz})\,\Phi(z) \pm \pi i \,\text{rés}\left[\frac{\ell_n(x',-t)}{t^{2N+1}}e^{-tz}\right] .$$

On pourrait appliquer à (17.1) la proposition 7 en y remplaçant a et τ par $2a$ et τ^2 ; la relation (17.4) vaut donc dans $B(2a)$.

<u>Calcul de</u> $\mathrm{Re}\sum_{n=0}^{N} x^n V_n(x', z-z')$.- On a

$$\text{rés}\left[\frac{\ell_n(x',-t)}{t^{2N+1}} e^{-t(z-z')}\right] = \ell_n\left(x', \frac{d}{dz}\right) \text{rés}\left[\frac{e^{-t(z-z')}}{t^{2N+1}}\right] \quad ;$$

on le prouve, par exemple, en transformant le rés. en une intégrale par la formule de Cauchy. D'où, vu la formule (13.6), qui caractérise ℓ_n :

$$\sum_{n=0}^{N} x^n\left[\text{rés}\,\frac{\ell_n(x',-t)}{t^{2N+1}} e^{-t(z-z')}\right] = \sum_{n=0}^{N} x^n \ell_n\left(x', \frac{d}{dz}\right)\frac{(z-z')^{2N}}{(2N)!} =$$

$$= \frac{|z-z'|^{2N}}{\pi 4^{N+1}(N!)^2}$$

Puisque cette valeur est réelle, (17.4) donne

$$(17.5) \qquad \mathrm{Re}\sum_{n=0}^{N} x^n V_n(x',z-z') = \mathrm{Re}\sum_{n=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} x^n Q_n^j\left(\alpha, \frac{d}{dz}\right)\ell_j\left(x',\frac{d}{dz}\right)\Phi(z-z').$$

<u>L'expression de</u> $G(z,z')$ s'obtient en portant (17.5) et (17.3) dans (16.4) :

$$(17.6) \qquad G(z,z') = \mathrm{Re}\sum_{n=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} x^n Q_n^j\left(\alpha,\frac{d}{dz}\right)\ell_j\left(x',\frac{d}{dz}\right)\Phi(z-z') -$$

$$- \mathrm{Re}\sum_{n=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} x^n R_n^j\left(\alpha,\frac{d}{dz}\right)\ell_j\left(x',-\frac{d}{dz}\right)\Phi(z+\bar{z}') \quad .$$

On voit de suite que la fonction $\tilde{G}$, envisagée par le lemme 16, existe : c'est

$$(17.7) \quad \tilde{G}(z,z') = \mathrm{Re}\sum_{n=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} x^n Q_n^j\left(\alpha, \frac{d}{dz}\right)\ell_j\left(x', \frac{d}{dz}\right)\tilde{\Phi}(z-z') -$$

$$- \mathrm{Re}\sum_{n=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} x^n R_n^j\left(\alpha, \frac{d}{dz}\right)\ell_j\left(x', -\frac{d}{dz}\right)\tilde{\Phi}(z+\bar{z}') \ .$$

$G(z,z')$ est donc la fonction de Green.

Enonçons les résultats ainsi prouvés :

18. LES PRINCIPAUX THÉORÈMES. Notations.- Nous notons :

$$\mathcal{V}(x,x',\tau,t) = \sum_{n=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} x^n \ell_j(x',t)Q_n^j(\tau,t)$$

(18.1)

$$\mathcal{W}(x,x',\tau,t) = -\sum_{n=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} x^n \ell_j(x',-t)R_n^j(\tau,t) ;$$

ce sont des polynomes en $x, x', \tau^2, \tau^{-2}, t$ de degrés N en x et en x', $2N+2$ en τ et en τ^{-1} ; ℓ_j est défini par (13.4), Q_n^j et R_n^j par le n°15, Q par le n°12 ; P par (11.1) et $p_j^n(x,t)$ par (10.1).

(18.2) $$\Phi(z) = \mathcal{L}\left[\frac{1}{t^{2N+1}Q(e^{-at},-t)}\right] \in \tilde{\mathcal{H}}((2N+2)a) .$$

$$\alpha^k\Phi(z) = \Phi(z+ka) \qquad (k : \text{entier} \geqslant \text{ou} < 0) .$$

Les propriétés de Φ sont données par la proposition 7 : $\Phi(z)$ est holomorphe dans le plan muni des deux coupures réelles $[-\infty, -(2N+2)a]$, $[(2N+2)a, +\infty]$; elle est holomorphe sur chaque bord de cette coupure sauf aux points multiples de $2a$; elle vérifie l'équation de convolution

(18.3) $$Q(\alpha, \frac{d}{dz})\,\Phi(z) = \mp\pi i\,\frac{z^{2N}}{(2N)!} , \quad \text{où} \quad \pm y > 0 .$$

D'autre part, (12.6) donne :

$$\hat{\Phi}(z) = (-1)^N\,\Phi(z) ,$$

et (3.6)

$$\tilde{\Phi}(z) = -\pi i \text{ rés}\left[\frac{e^{tz}}{t^{2N+1}Q(e^{at},t)}\right] .$$

Le n°17 a prouvé :

LE THÉORÈME D'EXISTENCE.- Si le polynome $P(a,t)P(-a,t)$ n'est pas identiquement nul, alors la fonction de Green $G(z,z')$, que définit le n°8, existe : elle est unique (n°12).

THÉORÈME DE STRUCTURE.- On a

$$(18.4)\quad G(z,z') = \operatorname{Re}\mathcal{V}(x,x',\alpha,\frac{d}{dz})\Phi(z-z') + \operatorname{Re}\mathcal{W}(x,x',\alpha,\frac{d}{dz})\Phi(z+z'),$$

$\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ étant les polynomes (18.1) ; on a de même :

$$(18.5)\quad \tilde{G}(z,z') = \operatorname{Re}\mathcal{V}(x,x',\alpha,\frac{d}{dz})\tilde{\Phi}(z-z') + \operatorname{Re}\mathcal{W}(x,x',\alpha,\frac{d}{dz})\tilde{\Phi}(z+z')\ .$$

L'EXPRESSION EXPLICITE DE $\Phi(z)$ est donnée par (18.2), dont le n°3 explique le sens. Si $Q(\tau,t)$, $\mathcal{V}(x,x',\alpha,t)$ et $\mathcal{W}$ sont divisibles par un même polynome Δ de t, on peut les remplacer par Q/Δ, $\mathcal{V}/\Delta$ et $\mathcal{W}/\Delta$ dans (18.2), (18.3), (18.4) et (18.5) : voir (1.3).

Dans divers cas particuliers on peut mieux expliciter $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ et Φ (voir chap. 3, 4, 5).

19. LA PARTIE SINGULIÈRE DE $G(z,z')$.- La définition de $G(z,z')$ (n°8) précise quelle est la partie singulière de $G(z,z')$ quand z' reste à l'intérieur de $B(a)$; les résultats qui précèdent permettent d'étudier l'allure de $G(z,z')$ quand cette condition n'est pas vérifiée.

Partie singulière de $\operatorname{Re}\mathcal{V}\Phi$.- D'après (17.5) et (16.2)

$$(19.1)\quad \operatorname{Re}\mathcal{V}(x,x',\alpha,\frac{d}{dz})\Phi(z-z') = \operatorname{Re}\sum_{n=0}^{N} x^n V_n(x',z-z')$$

$$(19.2)\quad V_n(x',z) = \mathcal{L}\Big[\sum_{j=0}^{N} \frac{\ell_j(x',-t)}{t^{2N+1}} \frac{Q_n^j(e^{-at},-t)}{Q(e^{-at},-t)} + \frac{\ell_n(x',-t)}{t^{2N+1}} \coth(ct)\Big] -$$

$$- \mathcal{L}\Big[\frac{\ell_n(x',-t)}{t^{2N+1}} (\coth(ct) \pm 1)\Big] \;;$$

au second membre de (19.2), le premier terme $\in \tilde{\mathcal{H}}(4a)$, vu les propriétés (12.8) de Q , (15.2) et (15.3) de Q_n^j car on choisit $c \geqslant 2a$; le second terme est donné par (5.5) et (1.3) ; c'est

$$- \mathcal{L}\Big[\frac{\ell_n(x',-t)}{t^{2N+1}} (\coth(ct) \pm 1)\Big] = \frac{\pi}{c} \ell_n(x', \frac{d}{dz}) \int^{z} \frac{(z-w)^{2N}}{(2N)!} \operatorname{cotg} \frac{\pi w}{2c} dw$$

où $\int^{z}$ est défini par les conventions du n°4, appliquées à l'une des bandes $x \in [0,2c]$ ou $x \in [-2c,0]$. On a donc, mod. les fonctions de (x,y,x',y') holomorphes pour $|x-x'| < 4a$, x,y,x' et y' réels :

$$\sum_{n=0}^{N} x^n V_n(x',z-z') \equiv \frac{\pi}{c} \sum_{n=0}^{N} x^n \ell_n(x', \frac{d}{dz}) \int^{z-z'} \frac{(z-z'-w)^{2N}}{(2N)!} \operatorname{cotg} \frac{\pi w}{2c} dw \;;$$

puisque ℓ_n est d'ordre N , l'identité (13.6) qui caractérise ℓ_n donne

$$\sum_{n=0}^{N} x^n V_n(x',z-z') \equiv \frac{1}{c\, 4^{N+1}(N!)^2} \int^{z-z'} (z-z'-w)^N (\bar{z}-\bar{z}'+w)^N \operatorname{cotg} \frac{\pi w}{2c} dw$$

c'est-à-dire

$$\equiv \frac{1}{2\pi 2^N (N!)^2} |z-z'|^{2N} \log|z-z'| \;.$$

D'où, vu (19.1) :

$$(19.3)\quad \operatorname{Re} \mathcal{V}(x,x',\alpha,\frac{d}{dz}) \Phi(z-z') \equiv \frac{1}{2\pi 4^N (N!)^2} |z-z'|^{2N} \log|z-z'| \;.$$

Autrement dit : $\operatorname{Re} \mathcal{V}\Phi$ a sur $\overline{B(a)}$ la partie singulière que la définition de G (n°8) impose à G dans $B(a)$.

Partie singulière de $\mathrm{Re}\,\mathcal{W}\Phi$.- D'après (17.3) et (16.3)

$$\mathrm{Re}\,\mathcal{W}(x,x',\alpha,\frac{d}{dz})\Phi(z+\bar{z}') = \mathrm{Re}\sum_{n=0}^{N} x^n\, W_n(x',z+\bar{z}') \tag{19.4}$$

$$W_n(x',z) = -\mathcal{L}[\sum_{j=0}^{N} \frac{\ell_j(x',t)}{t^{2N+1}} \frac{R_n^j(e^{-at},-t)}{Q(e^{-at},-t)}] \quad . \tag{19.5}$$

Les propriétés (12.8) de Q et (15.5) de R_n^j donnent mod $\tilde{\mathfrak{D}}(6a)$:

$$\frac{R_n^j(e^{at},t)}{Q(e^{at},t)} \equiv 2\,\frac{e^{2Nat}\, P_n^j(a,t)\hat{P}(-a,t) + (-1)^N\, e^{-2Nat}\, P_n^j(-a,t)\hat{P}(a,t)}{e^{2(N+1)at}\, P(a,t)\hat{P}(-a,t) + (-1)^{N+1}\, e^{-2(N+1)at} P(-a,t)\hat{P}(a,t)}$$

$$\equiv \frac{e^{2at}}{\mathrm{sh}(4at)} \frac{P_n^j(a,t)}{P(a,t)} + \frac{e^{-2at}}{\mathrm{sh}(4at)} \frac{P_n^j(-a,t)}{P(-a,t)} \quad .$$

En portant cette formule dans (19.5), on obtient mod $\tilde{\mathcal{H}}$ (6a) :

$$W_n(x',z) \equiv \alpha^2 \sum_{j=0}^{N} \ell_j(x',-\frac{d}{dz})P_n^j(a,\frac{d}{dz})\mathcal{L}[\frac{1}{t^{2N+1}\ P(a,-t)\mathrm{sh}(4at)}]$$

$$+ \alpha^{-2} \sum_{j=0}^{N} \ell_j(x',-\frac{d}{dz})P_n^j(-a,\frac{d}{dz})\mathcal{L}[\frac{1}{t^{2N+1}\ P(-a,-t)\mathrm{sh}(4at)}] \ .$$

En portant ce résultat dans (19.4) et en employant les notations ci-dessous, on obtient mod. les fonctions de (x,y,x',y') holomorphes pour $|x+x'| < 6a$, x, y, x' et y' réels :

$$\mathrm{Re}\,\mathcal{W}(x,x',\alpha,\frac{d}{dz})\ \Phi(z+\bar{z}') \equiv \tag{19.6}$$

$$\mathrm{Re}\,\mathcal{U}(a,x,x',\frac{d}{dz})\ \Theta\ (a,z+\bar{z}'+2a) + \mathrm{Re}\,\mathcal{U}(-a,x,x',\frac{d}{dz})\Theta(-a,z+\bar{z}'-2a).$$

Vu la 3°) propriété de Θ , cette formule montre que $\mathrm{Re}\,\mathcal{W}\Phi$ est régulier sur $\overline{B(a)}$, sauf quand z et z' viennent se confondre sur sa frontière.

Notations. Nous notons, comme le fera le chapitre III :

$$(19.7)\quad \mathcal{U}(\pm a,x,x',t) = -2 \sum_{n=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} x^n \ell_j(x',-t) P_n^j(\pm a,t)$$

$$(19.8)\quad \Theta(\pm a,z) = - \mathcal{L}\left[\frac{1}{2t^{2N+1}\,P(\pm a,-t)\,\mathrm{sh}(4at)}\right] \in \tilde{\mathcal{H}}(4a) \quad .$$

Propriétés de Θ .- 1°) Vu (1.3) et (2.8), on a

$$(19.9)\quad P\left(\pm a,\frac{d}{dz}\right)\left(\frac{d}{dz}\right)^{2N+1} \Theta(\pm a,z) = -\frac{\pi}{8a}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi z}{8a} \quad .$$

2°) Vu (3.6), $\Theta(\pm a,z)$ est anti-asymptotique à

$$(19.10)\quad \tilde{\Theta}(\pm a,z) = +\pi i\ \mathrm{rés}\left[\frac{e^{-tz}}{2t^{2N+1}\,P(\pm a,-t)\,\mathrm{sh}(4at)}\right] \quad ;$$

ces deux propriétés caractérisent évidemment Θ

3°) Θ est donc holomorphe dans le plan z muni des deux coupures réelles

$$[-\infty,-4a] \quad , \quad [4a,+\infty] \; .$$

Les formules (18.4), (19.3) et (19.6) prouvent le

THÉORÈME SUR LA PARTIE SINGULIÈRE DE G.-

$$(19.11)\quad G(z,z') - \frac{|z-z'|^{2N}\log|z-z'|}{2\pi 4^N (N!)^2} - \mathrm{Re}\,\mathcal{U}\left(a,x,x',\frac{d}{dz}\right)\Theta(a,z+\bar{z}'+2a) -$$

$$- \mathrm{Re}\,\mathcal{U}\left(-a,x,x',\frac{d}{dz}\right)\Theta(-a,z+\bar{z}'-2a)$$

est une fonction des variables réelles (x,y,x',y') holomorphe pour z et $z' \in B(2a)$.

Note.- Les deux premiers termes de la partie singulière de G :

$$\frac{|z-z'|^{2N}\log|z-z'|}{2\pi 4^N (N!)^2} + \mathrm{Re}\,\mathfrak{U}(a,x,x',\frac{d}{dz})\,\Theta(a,z+\bar{z}'+2a)$$

donnent la singularité de $G(z,z')$ quand z et z' viennent en un même point du bord $x = a$ de $B(a)$; leur calcul n'emploie que les conditions aux limites données sur ce bord.

Cette remarque et l'un des théorèmes de réflexion de Hans Lewy (fonction harmonique, condition au bord à coefficients constants, bord rectiligne) suggèrent l'hypothèse suivante :

Problème.- La fonction de Green, $(N+1)$-harmonique, du demi-plan $x > 0$, annulant au bord les $p_j(0, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ est-elle

$$\frac{|z-z'|^{2N}\log|z-z'|}{2\pi 4^N (N!)^2} + \mathrm{Re}\,\mathfrak{U}(0,x,x',\frac{d}{dz})\,\Theta(z+\bar{z}')$$

où $\Theta(z)$ est solution de l'équation

$$P(0,\frac{d}{dz})(\frac{d}{dz})^{2N+1}\,\Theta(z) = \frac{1}{z} \quad ?$$

Chapitre III

LA FONCTION DE GREEN BI-HARMONIQUE

Nous supposons $N = 1$; nous explicitons alors Q , $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$, pour faciliter le calcul effectif de la fonction de Green.

20. UNE PREMIÈRE EXPRESSION DE Q , $\mathcal{V}$ ET $\mathcal{W}$. -

<u>Calcul de</u> ℓ_n . - La définition (13.4) donne

(20.1) $\ell_{o}(x',t) = -\frac{1+x't}{8\pi}$, $\ell_1(x',t) = \frac{t}{8\pi}$

<u>Calcul des</u> $P(x,t)$ <u>et</u> $P_n^j(x,t)$. - La définition (8.2) de P et celle de P_n^j (n° 15; propriétés de R_r^s) donnent :

(20.2)

$$P = \begin{vmatrix} p_o^o & p_o^1 \\ p_1^o & p_1^1 \end{vmatrix} , \quad P_o^o = \begin{vmatrix} \hat{p}_o^o & p_o^1 \\ \hat{p}_1^o & p_1^1 \end{vmatrix} = \hat{P}_1^1 ,$$

$$P_1^o = \begin{vmatrix} p_o^o & \hat{p}_o^o \\ p_1^o & \hat{p}_1^o \end{vmatrix} = -\hat{P}_1^o , \quad P_o^1 = \begin{vmatrix} \hat{p}_o^1 & p_o^1 \\ \hat{p}_1^1 & p_1^1 \end{vmatrix} = -\hat{P}_o^1 ;$$

ces dernières relations montrent que

(20.3) $P_1^o(x,0) = 0$, $P_o^1(x,0) = 0$.

<u>La relation entre les</u> $P(x,t)$ <u>et</u> $P_n^j(x,t)$. -

On a évidemment :

$$\begin{vmatrix} p_o^o & p_o^1 & \hat{p}_o^o & \hat{p}_o^1 \\ p_1^o & p_1^1 & \hat{p}_1^o & \hat{p}_1^1 \\ p_o^o & p_o^1 & \hat{p}_o^o & \hat{p}_o^1 \\ p_1^o & p_1^1 & \hat{p}_1^o & \hat{p}_1^1 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

En développant ce déterminant du quatrième ordre suivant les mineurs d'ordre 2 extraits de ses deux premières lignes et deux dernières lignes, on obtient

$$(20.4) \qquad P\,\hat{P} = P_o^o\;\hat{P}_o^o + P_1^o\;\hat{P}_o^1 \quad .$$

<u>Calcul de</u> $Q(\tau, t)$. - La propriété (12.8) de $Q(\tau,t)$ donne

$$Q\;(\tau,t) = (\tau^4 - 1)\;P\;(a,t)\;\hat{P}(-a,t) + (\tau^{-4}-1)\;P\;(-a,t)\;\hat{P}\;(a,t) + Q\;(1,t) \quad .$$

La définition (12.5) de Q donne

$$Q\;(1,t) = \begin{vmatrix} p_o^o(a,t) & p_o^1(a,t) & \hat{p}_o^o(a,t) & \hat{p}_o^1(a,t) \\ p_1^o(a,t) & p_1^1(a,t) & \hat{p}_1^o(a,t) & \hat{p}_1^1(a,t) \\ p_o^o(-a,t) & p_o^1(-a,t) & \hat{p}_o^o(-a,t) & \hat{p}_o^1(-a,t) \\ p_1^o(-a,t) & p_1^1(-a,t) & \hat{p}_1^o(-a,t) & \hat{p}_1^1(-a,t) \end{vmatrix}$$

$$= \qquad P(a,t)\;\hat{P}(-a,t) + P(-a,t)\;\hat{P}(a,t)$$

$$- P_o^o(a,t)\;\hat{P}_o^o(-a,t) - P_o^o(-a,t)\;\hat{P}_o^o(a,t) - P_1^o(a,t)\;\hat{P}_o^1(-a,t) - P_1^o(-a,t)\;\hat{P}_o^1(a,t) \quad ,$$

D'où

$$(20.5)\quad Q(\tau,t) = \tau^4 P(a,t)\,\hat{P}(-a,t) + \tau^{-4} P(-a,t)\,\hat{P}(a,t)$$
$$- P_o^o(a,t)\,\hat{P}_o^o(-a,t) - P_o^o(-a,t)\,\hat{P}_o^o(a,t) - P_1^o(a,t)\,\hat{P}_o^1(-a,t) - P_1^o(-a,t)\,\hat{P}_o^1(a,t)\ .$$

Calcul de $\mathcal{V}(x\ ,\ x'\ ,\ \tau\ ,\ t)$. - La définition (18.1) de $\mathcal{V}$ et les propriétés (15.2), (15.3) de Q_n^j donnent, vu (20.1) :

$$8\pi\,\mathcal{V}(x\ ,\ x'\ ,\ \tau\ ,\ t\ ) =$$
$$- [1 - xt + x't][(\tau^4 - 1)\,P(a,t)\,\hat{P}(-a,t) - (\tau^{-4} - 1)\,P(-a,t)\,\hat{P}(a,t)\ ]$$
$$+ 8\pi\,\mathcal{V}(x\ ,\ x'\ ,\ 1\ ,\ t)\ .$$

D'après (18.1) et (20.1)

$$8\pi\,\mathcal{V}(x\ ,\ x'\ ,\ 1\ ,\ t) = -\,x(1 + x't)\,Q_1^o(1,t) + xt\,Q_1^1 - (1 + x'\,t)\,Q_o^o + t\,Q_o^1\ .$$

Le calcul de $Q_n^j(1,t)$ est celui d'un déterminant du quatrième ordre, analogue aux précédents, que définit le n° 15; notons, si $A(x,t)$ et $B(x,t)$ sont deux fonctions quelconques

$$(20.6)\qquad [A,B] = A(a,t)\,B(-a,t) - A(-a,t)\,B(a,t)\ ;$$

on obtient

$$Q_1^o(1,t) = 2\,[P_1^o,\hat{P}_o^o\ ]\qquad ,\qquad Q_o^1 = 2[P_o^o,\ \hat{P}_o^1\ ]\ ,$$

$$Q_o^o = [P,\hat{P}] + [P_o^o,\hat{P}_o^o] - [P_1^o,\hat{P}_o^1]$$

$$Q_1^1 = [P,\hat{P}] - [P_o^o,\hat{P}_o^o] + [P_1^o,\hat{P}_o^1]\ .$$

D'où

(20.7) $$4\pi \mathcal{V}(x,x',\tau,t) = -\frac{1}{2}[1-xt+x't]\,[\tau^4 P(a,t)\hat{P}(-a,t) - \tau^{-4}P(-a,t)\hat{P}(a,t)]$$

$$+(\frac{1}{2}-xt)(\frac{1}{2}+x't)\,H(t) + (x+x')t\,K(t) + L(t)$$

en posant

(20.8) $$H(t) = \frac{1}{t}[P_1^o,\hat{P}_o^o]\ ,\quad K(t) = -\frac{H}{2} - \frac{1}{2}[P_o^o,\hat{P}_o^o] + \frac{1}{2}[P_1^o,\hat{P}_o^1]$$

$$L(t) = \frac{H}{4} + K + t\,[P_o^o,\hat{P}_o^1]$$

<u>Calcul de</u> $\mathcal{W}(x,x',\tau,t)$. - La définition (18.1) de $\mathcal{W}$ et les propriétés (15.4), (15.5) des R_n^j donnent

(20.9) $$\mathcal{W}(x,x',\tau,t) =$$

$$\tau^2\,\mathcal{U}(a,x,x',t)\,\hat{P}(-a,t) - \tau^{-2}\,\mathcal{U}(-a,x,x',t)\,\hat{P}(a,t)$$

où

$$\mathcal{U}(\pm a,x,x',t) = -2\sum_{n=o}^{1}\sum_{j=o}^{1} x^n\,\ell_j(x',-t)\,P_n^j(\pm a,t)\ .$$

c'est-à-dire, vu (20.1) et les relations (20.2) entre P_s^r et P_n^j :

(20.10) $$4\pi\,\mathcal{U}(\pm a,x,x',t) =$$

$$(\frac{1}{2}-xt)(\frac{1}{2}-x't)\,D(\pm a,t) + (\frac{1}{2}-xt)E(\pm a,t) - (\frac{1}{2}-x't)\hat{E}(\pm a,t) + F(\pm a,t)$$

en posant

(20.11) $$D(x,t) = -\frac{1}{t}P_1^o(x,t) = \hat{D},\ E = \frac{D}{2} - P_1^1\ ,\ F = \frac{D}{4} - \frac{E}{2} - \frac{\hat{E}}{2} + t\,P_o^1 = \hat{F}\ .$$

Puisque $P_1^o = -\hat{P}_1^o$ d'après (20.2) et que $P_r^s(x,0)$ est réel car $p_j^n(x,0)$

l'est d'après (8.1), on a $P_1^o(x,0) = 0$; $D(x,t)$ est donc un polynome.

21. LE CALCUL DE Q , $\mathcal{V}$ ET $\mathcal{W}$ se simplifie du fait que H, K, L s'expriment au moyen de D , E , F ; en effet, en portant (20.11) dans (20.8), on obtient, vu les relations (20.2) entre P_s^r et $\hat{P}_n^j$:

$$H = [D,E] \quad , \quad K = \frac{1}{2}[D,F] + \frac{1}{2}[E,\hat{E}] \quad , \quad L = [\hat{E},F] \quad .$$

En portant (20.11) dans l'identité (20.4), on obtient de même :

$$P\hat{P} = DF + E\hat{E} \quad .$$

En portant (20.11) dans (20.5), on obtient :

$$Q(\tau,t) = \tau^4 P(a,t)\hat{P}(-a,t) + \tau^{-4} P(-a,t)\hat{P}(a,t)$$

$$- D(a,t)F(-a,t) - D(-a,t)F(a,t) - E(a,t)\hat{E}(-a,t) - E(-a,t)\hat{E}(a,t) \quad .$$

Les formules obtenues peuvent donc s'énoncer comme suit :

THÉORÈME CONCERNANT LA FONCTION DE GREEN BIHARMONIQUE. - Soit

$$P(x,t) = \begin{vmatrix} p_o^o & p_o^1 \\ p_1^o & p_1^1 \end{vmatrix} \quad , \text{ où } \; p_n^j = p_n^j(x,t) \quad ; \quad \hat{p}_n^j = \bar{p}_n^j(x,-t) \quad ;$$

$$D(x,t) = -\frac{1}{t}\begin{vmatrix} p_o^o & \hat{p}_o^o \\ p_1^o & \hat{p}_1^o \end{vmatrix} \quad , \quad E(x,t) = \frac{D}{2} - \begin{vmatrix} p_o^o & \hat{p}_o^1 \\ p_1^o & \hat{p}_1^1 \end{vmatrix} \quad ,$$

$$F(x,t) = \frac{D}{4} - \frac{E+\hat{E}}{2} - t\begin{vmatrix} p_o^1 & \hat{p}_o^1 \\ p_1^1 & \hat{p}_1^1 \end{vmatrix} \quad ; \text{ où } \; \hat{p}(x,t) = \bar{p}(x,-t) \quad ;$$

ce sont des polynomes en t , vérifiant les identités :

$$D = \hat{D} , \quad F = \hat{F} , \quad P\hat{P} = DF + E\hat{E} .$$

$$H(t) = [D,E] = D(a,t)\,E(-a,t) - D(-a,t)\,E(a,t)$$

$$K = \frac{1}{2}\,[D,F] + \frac{1}{2}\,[E,\hat{E}] \quad , \quad L = [\hat{E},F] \quad .$$

On a :

$$Q\,(\tau,t) = \tau^4\,P(a,t)\,\hat{P}(-a,t) + \tau^{-4}P(-a,t)\,\hat{P}(a,t)$$

$$- D(a,t)\,F(-a,t) - D(-a,t)\,F(a,t) - E(a,t)\,\hat{E}(-a,t) - E(-a,t)\,\hat{E}(a,t) \quad ;$$

$$4\pi\,\mathcal{V}(x,x',\tau,t) = -\frac{1}{2}\,[1-xt+x't]\,[\tau^4P(a,t)\,\hat{P}(-a,t) - \tau^{-4}P(-a,t)\,\hat{P}(a,t)\,]$$

$$+ (\frac{1}{2} - xt)\,(\,\frac{1}{2} + x't)\,H(t) + (x + x')\,t\,K(t) + L(t)$$

$$\mathcal{W}(x,x',\tau,t) =$$

$$\tau^2\,\mathcal{U}(a,x,x',t)\,\hat{P}(-a,t) - \tau^{-2}\,\mathcal{U}(-a,x,x',t)\,\hat{P}(a,t)$$

en posant

$$4\pi\,\mathcal{U}(\pm a,x,x',t) =$$

$$(\frac{1}{2} - xt)\,(\frac{1}{2} - x't)\,D(\pm a,t) + (\frac{1}{2} - xt)\,E(\pm a,t) - (\frac{1}{2} - x't)\,\hat{E}(\pm a,t) + F(\pm a,t)$$

22. UN CAS PARTICULIER : MEMES CONDITIONS AUX DEUX BORDS. - Supposons $p_j(\xi,\eta)$ indépendant de x $(j = 0 , 1)$; le théorème précédent se simplifie comme suit : notons

$$(22.1) \qquad q_j(\xi,\eta) = \frac{\partial p_j(\xi,\eta)}{\partial \xi} ,$$

$$(22.2) \qquad p_j(t) = p_j(t,it) \quad , \quad q_j(t) = q_j(t,it) \quad .$$

Nous avons donc

$$p_j^o(x,t) = p_j(t) \quad , \quad p_j^1(x,t) = x\, p_j(t) + q_j(t) \ ,$$

$$(22.3)\quad P(t) = \begin{vmatrix} p_o & q_o \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix} \quad , \text{ où } p_j = p_j(t) \ , \ q_j = q_j(t) \ ,$$

$$D(t) = A(t) \quad , \quad E(x,t) = xt\, A(t) + B(t) \ , \ F(x,t) = x^2t^2A + xt(B - \hat{B}) + C \ ,$$

en notant

$$A(t) = -\frac{1}{t}\begin{vmatrix} p_o & \hat{p}_o \\ p_1 & \hat{p}_1 \end{vmatrix} \quad , \quad B(t) = \frac{A}{2} - \begin{vmatrix} p_o & \hat{q}_o \\ p_1 & \hat{q}_1 \end{vmatrix} \ ,$$

(22.4)

$$C(t) = \frac{A}{4} - \frac{B+\hat{B}}{2} - t\begin{vmatrix} q_o & \hat{q}_o \\ q_1 & \hat{q}_1 \end{vmatrix} \quad , \text{ où } \hat{p}(x,t) = \bar{p}(x,-t) \ ;$$

Le théorème précédent devient :

COROLLAIRE . - <u>Supposons</u> p_j <u>indépendant de</u> x ; <u>définissons</u> A , B , C <u>et</u> P <u>par</u> (22.1), (22.2), (22.3) et (22.4) : <u>ce sont des polynomes en</u> t , <u>indépendants de</u> x , <u>vérifiant les identités</u> :

$$(22.5)\qquad A = \hat{A} \ , \ C = \hat{C} \ , \ P\hat{P} = AC + B\hat{B} \ .$$

<u>On a, vu les relations précédentes</u> :

$$(22.6)\qquad Q(\tau,t) = (\tau^2 - \tau^{-2})^2 P\hat{P} - 4a^2t^2A^2 \ ;$$

$$(22.7)\quad 4\pi\,\mathcal{V}(x,x',\tau,t) = -\frac{1}{2}(\tau^4 - \tau^{-4})(1 - xt + x't)P\hat{P}$$

$$- 2at\left[\left(\frac{1}{2} - xt\right)A - \hat{B}\right]\left[\left(\frac{1}{2} + x't\right)A + \hat{B}\right] - 2at\,(a^2t^2A^2 + P\hat{P}) \ ;$$

$$(22.8)\quad 4\pi\,\mathcal{W}(x,x',\tau,t) = (\tau^2 + \tau^{-2})\left[(1 - xt - x't)A + B - \hat{B}\right] at\,\hat{P}$$

$$+ (\tau^2 - \tau^{-2})\left[\left(\frac{1}{2} - xt\right)\left(\frac{1}{2} - x't\right)A + \left(\frac{1}{2} - xt\right)B - \left(\frac{1}{2} - x't\right)\hat{B} + a^2t^2A + C\right]\hat{P} \ .$$

Chapitre IV

LA FONCTION DE GREEN BIHARMONIQUE, VÉRIFIANT, AUX DEUX BORDS, DEUX MÊMES CONDITIONS HOMOGÈNES EN $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$.

Le corollaire précédent peut être simplifié et explicité comme suit :

23. LES POLYNOMES Q , $\mathcal{V}$ ET $\mathcal{W}$. - Nous supposons $p_j(\xi, \eta)$ indépendant de x , homogène de degré n_j en (ξ, η) ; $j = 0, 1$; notons $n = n_o + n_1$.

Alors $P(t)$, $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, vu leurs définitions (22.4), (22.5) , sont homogènes en t de degré $n - 1$; nous les diviserons par le polynome, invariant par $\wedge$:

$$i\, t^{n-1} \text{ si } n \text{ pair} \; ; \quad t^{n-1} \text{ si } n \text{ impair} .$$

Les formules (22.5), (22.6), (22.7), (22.8) restent valables (voir n° 18 : possibilité de diviser Q , $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ par un même polynome Δ de t) . Dans ces formules P , A , B , C sont donc maintenant des constantes; A et C sont réelles; $\hat{P} = \bar{P}$, $\hat{B} = \bar{B}$.

Nous pouvons, grâce à (22.5), donner à $\mathcal{W}$ une expression analogue à (22.7) :

$$(23.1) \qquad 4\pi\, \mathcal{W}(x,x',\tau,t) = (\tau^2+\tau^{-2})\,[(1-xt-x't)\,A + B - \hat{B}]\; at\, \hat{P}$$
$$+ (\tau^2-\tau^{-2})\,[(\tfrac{1}{2} - xt)\,A - \hat{B}][(\tfrac{1}{2} - x't)\,A + B]\,\frac{\hat{P}}{A}$$
$$+ (\tau^2 - \tau^{-2})\,(a^2t^2A^2 + P\hat{P})\,\frac{\hat{P}}{A}$$

24. LES FONCTIONS $\varphi_o(z)$ ET $\psi_o(z)$. - Soit ρ l'un des deux nombres réels tels que

(24.1) $$A^2 = 4\rho^2 P\hat{P} \;;$$

vu (22.6), (28.2) et (18.3) :

(24.2) $$4P\hat{P}\,\Phi(z) = \mathcal{L}\left[\frac{1}{t^3[\mathrm{sh}^2(2at) - 4\rho^2a^2t^2]}\right],$$

(24.3) $$4P\hat{P}\left[\frac{1}{4}(\alpha^2-\alpha^{-2})^2 - 4\rho^2a^2\frac{d^2}{dz^2}\right]\Phi(z) = \mp\pi i\,\frac{z^2}{2}, \text{ où } \pm y > 0 .$$

Or les expressions (22.7) et (23.1) de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ montrent que l'expression (18.4) de G emploie exclusivement $(\alpha^2-\alpha^{-2})\,\Phi$ et $\frac{d\Phi}{dz}$.

Définissons donc :

(24.4)
$$\varphi_o(z) = -\frac{P\hat{P}}{\pi}(\alpha^2-\alpha^{-2})\,\Phi(z),$$
$$\psi_o(z) = -4\rho a\,\frac{P\hat{P}}{\pi}\,\frac{d\Phi(z)}{dz} \;;$$

c'est-à-dire :

(24.5)
$$\varphi_o(z) = \frac{1}{\pi}\,\mathcal{L}\left[\frac{1}{2t^3}\,\frac{\mathrm{sh}(2at)}{\mathrm{sh}^2(2at) - 4\rho^2a^2t^2}\right] \in \tilde{\mathcal{H}}(2a),$$
$$\psi_o(z) = \frac{1}{\pi}\,\mathcal{L}\left[\frac{1}{t^2}\,\frac{\rho a}{\mathrm{sh}^2(2at) - 4\rho^2a^2t^2}\right] \in \tilde{\mathcal{H}}(4a).$$

Les propriétés de φ_o et ψ_o sont les suivantes : ce sont des fonctions réelles et paires de z ; l'élimination de Φ entre les relations (24.4) donne

$$(24.6) \quad 4\rho a \frac{d\varphi_0}{dz} = (\alpha^2 - \alpha^{-2})\, \psi_0 \quad ;$$

en portant (24.4) dans (24.3), on obtient :

$$(24.7) \quad 4\rho a \frac{d\psi_0}{dz} = (\alpha^2 - \alpha^{-2})\, \varphi_0 \mp i \frac{z^2}{2} \quad , \text{ où } \pm y > 0$$

En éliminant ψ_0 ou φ_0 entre ces deux relations, on obtient :

$$(24.8) \quad \left(4\rho^2 a^2 \frac{d^2}{dz^2} + 1\right) \varphi_0 = \left(\frac{\alpha^2 + \alpha^{-2}}{2}\right)^2 \varphi_0 \mp i a z \; ,$$

$$(24.9) \quad \left(4\rho^2 a^2 \frac{d^2}{dz^2} + 1\right) \psi_0 = \left(\frac{\alpha^2 + \alpha^{-2}}{2}\right)^2 \psi_0 \mp i \rho a z \; , \text{ où } \pm y > 0$$

25. LES FONCTIONS φ_1 , φ_2 , ψ_1 ET ψ_2 . - Les expressions (22.7) et (23.1) de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ et les formules (24.8) et (24.9) montrent que l'expression (18.4) de G emploie les fonctions dont voici la définition et la principale propriété ($\pm y > 0$) :

$$(25.1) \quad \varphi_1 = \frac{\alpha^2 + \alpha^{-2}}{2}\, \varphi_0 \mp i \frac{z^2}{4} \quad ; \quad \varphi_1 + \frac{z^2}{2\pi} \log\left[2 \sin \frac{\pi z}{4a}\right] \in \tilde{\mathcal{H}}(4a) \quad ;$$

$\log[\dots]$ étant réel pour $x \in [0,4a]$, et continu dans $B(4a)$, sauf pour $x \in [-4a,0]$;

$$(25.2) \quad \varphi_2 = \left(4\rho^2 a^2 \frac{d^2}{dz^2} + 1\right)\varphi_0 = \left(\frac{\alpha^2 + \alpha^{-2}}{2}\right)^2 \varphi_0 \mp iaz \in \tilde{\mathcal{H}}(2a) \quad ;$$

(25.3) $\psi_1 = \frac{\alpha^2+\alpha^{-2}}{2} \quad \psi_o \in \tilde{\mathcal{H}}(2a)$;

(25.4) $\psi_2 = (4\rho^2 a^2 \frac{d^2}{dz^2} + 1)\ \psi_o = (\frac{\alpha^2+\alpha^{-2}}{2})^2 \ \psi_o \mp i\rho az \in \tilde{\mathcal{H}}(4a)$.

Ces fonctions sont <u>réelles</u> et <u>paires</u>.

On peut remplacer dans (25.1) ... (25.4) φ_j et ψ_j par $\tilde{\varphi}_j$ et $\tilde{\psi}_j$.

<u>Preuve de</u> (25.1) . - Appliquons la proposition 7 3°) en prenant

$$r(t) = \frac{1}{2\pi t^3} \quad , \quad q(\tau,t) = (\frac{\tau^2-\tau^{-2}}{2})^2 - 4\rho^2 a^2 t^2 \ , \ p(\tau) = \frac{\tau^{-4}-\tau^4}{4} \ .$$

Vu la définition (24.5) de φ_o et (1.6), nous obtenons

$$\frac{\alpha^2+\alpha^{-2}}{2} \ \varphi_o \mp \frac{i}{2} \text{ rés } \frac{e^{-tz}}{t^3} = \frac{1}{2\pi} \ \mathcal{L}[\frac{1}{t^3} \ \frac{\mathrm{sh}(2at)\ \mathrm{ch}(2at)}{\mathrm{sh}^2(2at) - 4\rho^2 a^2 t^2} \ \pm \ \frac{1}{t^3}\ ] \ ,$$

où $\pm\, x\, y > 0$; c'est-à-dire , mod $\tilde{\mathcal{H}}(4a)$:

$$\frac{\alpha^2+\alpha^{-2}}{2} \ \varphi_o \mp i \frac{z^2}{4} \equiv \frac{1}{2\pi} \ \mathcal{L}[\frac{1}{t^3} (\coth 2at \pm 1)] \ ;$$

c'est-à-dire, vu (1.5) , (5.3) et le n° 4

$$\equiv -\frac{1}{4a} \int^z \frac{(z-w)^2}{2} \cot\mathrm{g} \frac{\pi w}{4a} \, dw \equiv -\frac{1}{4a} \frac{z^2}{2} \int^z \cot\mathrm{g} \frac{\pi w}{4a} \, dw \ ;$$

mais $\int^z \cot\mathrm{g} \frac{\pi w}{4a} \, dw$ n'a pas la même constante d'intégration dans les deux bandes $x \in [-4a, 0]$ et $x \in [0, 4a]$; dans cette dernière bande,

$$\int^z \cot\mathrm{g} \frac{\pi w}{4a} \, dw = \frac{4a}{\pi} \ \log [\ k \sin \frac{\pi z}{4a}\ ] \ ,$$

k étant une constante > 0 , le log. étant réel pour z réel ;
k doit être tel que ce log. soit anti-asymptotique ; cela impose $k = 2$, comme dans la preuve de (4.4). On a donc, en prenant $\log[2 \sin \frac{\pi z}{4a}]$ réel pour $0 < z < 4a$ et continu dans $B(4a)$ sauf si $-4a < z < 0$ et en prenant $\pm y > 0$:

$$\frac{\alpha^2 + \alpha^{-2}}{2} \varphi_o \mp \frac{iz^2}{4} + \frac{z^2}{2\pi} \log.[2 \sin \frac{\pi z}{4a}] \in \tilde{\mathcal{X}}(4a) .$$

C'est ce qu'affirme (25.1) .

<u>L'expression de</u> G , (18.4) , peut s'écrire maintenant comme suit, en supposant $A \neq 0$ et en notant :

(25.5) $\beta = \frac{B}{A}$, $e^{i\theta} = -\frac{A}{2\rho P}$

(β: constante complexe; θ : constante réelle) :

(25.6)
$$8\rho G(z,z') = \operatorname{Re} \psi_2(z-z')$$
$$+ 2\rho \operatorname{Re} \left(1 - x\frac{d}{dz} + x'\frac{d}{dz}\right) \varphi_1(z-z')$$
$$+ \rho^2 \operatorname{Re} \left(1 - 2\bar{\beta} - 2x\frac{d}{dz}\right)\left(1 + 2\bar{\beta} + 2x'\frac{d}{dz}\right) \psi_o(z-z')$$
$$+ \operatorname{Re} e^{i\theta} \varphi_2(z + \bar{z}')$$
$$+ 2\rho \operatorname{Re} e^{i\theta} \left(1 + \beta - \bar{\beta} - x\frac{d}{dz} - x'\frac{d}{dz}\right) \psi_1(z + \bar{z}')$$
$$+ \rho^2 \operatorname{Re} e^{i\theta} \left(1 - 2\bar{\beta} - 2x\frac{d}{dz}\right)\left(1 + 2\beta - 2x'\frac{d}{dz}\right) \varphi_o(z + \bar{z}') ;$$

$\tilde{G}$ est donné par la même formule, où l'on remplace φ et ψ par $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\psi}$

26. EXPRESSIONS EXPLICITES DE φ_o ET ψ_o. - φ_o et ψ_o sont des fonctions de ρ réel, holomorphes pour $|\rho| \neq 1$ (Note du n° 3). Explicitons-les dans le cas le plus simple : $|\rho| < 1$. Nous avons alors le développement, que nous porterons dans (24.5) :

$$\frac{1}{\operatorname{sh}^2(2at) - 4\rho^2 a^2 t^2} = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{(2\rho at)^{2k}}{\operatorname{sh}^{2k+2}(2at)} \quad ;$$

il vient

$$\varphi_o(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=o}^{\infty} \rho^{2k} \quad \mathcal{L}\left[\frac{t^{2k+3}(2a)^{2k}}{\operatorname{sh}^{2k+1}(2at)}\right]$$

$$\psi_o(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=o}^{\infty} \rho^{2k+1} \quad \mathcal{L}\left[\frac{t^{2k+2}(2a)^{2k+1}}{\operatorname{sh}^{2k+2}(2at)}\right] .$$

Vu la proposition 7 et les formules (24.5), φ_o et ψ_o sont holomorphes en (ρ, z) , pour $|\rho| < 1$, dans le plan z muni des coupures réelles $[-\infty , -2a]$ et $[2a , \infty]$ et sur les bords (6) de ces coupures, sauf en les points z multiples de $2a$; ρ peut être complexe. Les séries (26.1) convergent donc absolument et uniformément pour

$$|\rho| < 1 \quad , \quad z \text{ non multiple de } 2a \quad .$$

<u>Le calcul explicite de</u> $\mathcal{L}\left[\frac{(2a)^q}{\operatorname{sh}^q(2at)}\right]$ est aisé :

---

6) Sur un voisinage indépendant de ρ de chaque point de ce bord non multiple de $2a$.

on a

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} - j^2\right] \frac{(j-1)!}{sh^j t} = \frac{(j+1)!}{sh^{j+2} t} \quad ;$$

d'où

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} - 1\right]\left[\frac{d^2}{dt^2} - 3^2\right] \dots \left[\frac{d^2}{dt^2} - (2k-1)^2\right] \frac{1}{sht} = \frac{(2k)!}{sh^{2k+1} t} \quad ;$$

(26.2)

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{d^2}{dt^2} - 2^2\right] \dots \left[\frac{d^2}{dt^2} - (2k)^2\right] \coth t = - \frac{(2k+1)!}{sh^{2k+2} t} \quad .$$

Introduisons donc les polynomes

$$P_o(z) = 1 \quad , \quad P_1(z) = z \quad , \quad P_2(z) = \frac{[z-2a]\,[z+2a]}{2} \quad ,$$

$$P_{2k+1}(z) = \frac{1}{(2k+1)!} \prod_{m=-k}^{k} [z - 4\,ma] \quad , \quad (m : \text{entier}) \quad ,$$

(26.3)

$$P_{2k}(z) = \frac{1}{(2k)!} \prod_{n=\frac{1}{2}-k}^{k-1/2} [z - 4\,na] \quad , \quad (n - \frac{1}{2} \ : \text{entier}) \quad .$$

$P_{2k}(z)$ [ou $P_{2k+1}(z)$] est donc un polynome de degré $2k$ [ou $2k+1$] ,

ayant pour zéros les pôles de $\operatorname{tg} \frac{\pi z}{4a}$ [ou $\operatorname{cotg} \frac{\pi z}{4a}$] les plus proches de 0

Les formules (26.2) et (1.2) donnent

$$\mathcal{L}\left[\frac{(2a)^{2k}}{sh^{2k+1}(at)}\right] = P_{2k}(z) \quad \mathcal{L}\left[\frac{1}{sh(2at)}\right]$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{(2a)^{2k+1}}{sh^{2k+2}(2at)}\right] = - P_{2k+1}(z) \quad \mathcal{L}[\coth(2at) \pm 1] \quad ,$$

ce dernier terme employant le n° 5; les seconds membres sont donnés par (2.8) et (5.3) ; d'où

(26.4)
$$\mathcal{L}\left[\frac{(2a)^{2k}}{sh^{2k+1}(2at)}\right] = - \frac{\pi}{2a} \; P_{2k}(z) \; tg \, \frac{\pi z}{4a} \quad ,$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{(2a)^{2k+1}}{sh^{2k+2}(2at)}\right] = - \frac{\pi}{2a} \; P_{2k+1}(z) \; \mathrm{cotg} \, \frac{\pi z}{4a} \quad .$$

En portant ces formules dans (26.1), en employant (1.3) et les définitions du n° 4, nous obtenons

$$(26.5) \qquad 4\,a \;\; \varphi_0(z) = \int^z \frac{(z-w)^2}{2} \; tg\,\frac{\pi w}{4a}\,dw + \rho^2 \int^z P_2(w)\,tg\,\frac{\pi w}{4a}\,dw$$
$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \rho^{2k}\left(\frac{d}{dz}\right)^{2k-3}\left[P_{2k}(z)\; tg\,\frac{\pi z}{4a}\right] \;;$$

$$(26.6) \qquad 4\,a \;\; \psi_0(z) = - \rho \int^z (z-w)w \; \mathrm{cotg}\,\frac{\pi w}{4a} \; dw$$
$$- \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{\,2k+1}\left(\frac{d}{dz}\right)^{2k-2}\left[P_{2k+1}(z)\; \mathrm{cotg}\,\frac{\pi z}{4a}\right] \;.$$

Ce que nous avons dit de la convergence des séries (26.1) prouve ceci :

<u>Propriétés de</u> φ_0 <u>et</u> ψ_0 . - Dans tout polycylindre

$$|\rho|<1 \quad , \quad |z| < \gamma$$

les séries (26.5) et (26.6), privées d'un nombre [7] suffisant de leurs premiers termes, sont fonctions holomorphes de (ρ, z) .

$\frac{d^3\varphi_o}{dz^3}$ et $\frac{d^2\psi_o}{dz^2}$ sont donc, pour $|\rho|<1$, des fonctions de z méromorphes dans tout le plan.

Nous allons voir que, plus précisément, les fonctions méromorphes de z

$$\frac{d^3\varphi_o}{dz^3} = \frac{1}{4a} \sum_{k=o}^{\infty} \rho^{2k}\left(\frac{d}{dz}\right)^{2k} \left[P_{2k}(z) \ \mathrm{tg}\,\frac{\pi z}{4a}\right]$$

$$\frac{d^3\psi_o}{dz^3} = -\frac{1}{4a} \sum_{k=o}^{\infty} \rho^{2k+1}\left(\frac{d}{dz}\right)^{2k+1} \left[P_{2k+1}(z) \ \mathrm{cotg}\,\frac{\pi z}{4a}\right]$$

ont pour développements de Mittag-Leffler les séries doubles

$$(26.7) \quad \frac{d^3\varphi_o}{dz^3} = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=o}^{\infty} \sum_{n=k+\frac{1}{2}}^{\infty} (2k)!\ \rho^{2k}\left[\frac{P_{2k}(4an)}{(z-4an)^{2k+1}} + \frac{P_{2k}(4an)}{(z+4an)^{2k+1}}\right]$$

$$(26.8) \quad \frac{d^3\psi_o}{dz^3} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=o}^{\infty} \sum_{m=k+1}^{\infty} (2k+1)!\ \rho^{2k+1}\left[\frac{P_{2k+1}(4am)}{(z-4am)^{2k+2}} - \frac{P_{2k+1}(4am)}{(z+4am)^{2k+2}}\right]$$

où k , m , $n-\frac{1}{2}$ sont entiers; dans tout polycylindre

$$|\rho|<\beta \quad , \quad |z|<\gamma \qquad (\beta<1) ,$$

ces séries doubles, privées d'un nombre [7] suffisant de leurs premiers termes, convergent absolument et uniformément.

7) Ce nombre est fonction de γ .

<u>Preuve de</u> (26.7). - On a

$$\frac{\pi}{2a} \operatorname{tg} \frac{\pi z}{4a} = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{z-4an} + \frac{1}{z+4an}\right] \qquad (n - \tfrac{1}{2} \text{ entier}) \quad ;$$

donc

$$2\pi \frac{d^3\varphi_o}{dz^3} = - \sum_{k=o}^{\infty} \rho^{2k} \left(\frac{d}{dz}\right)^{2k} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{P_{2k}(z)}{z-4an} + \frac{P_{2k}(z)}{z+4an}\right] \quad ;$$

or, puisque $P_{2k}(z)$ est un polynome en z de degré $2k$:

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^{2k} \frac{P_{2k}(z) - P_{2k}(4an)}{z-4an} = 0 \quad ,$$

d'où (26.7), vu la parité de $P_{2k}(z)$. Majorons le terme général de cette série double, pour prouver sa convergence absolue et uniforme : d'une part

$$(2k)!\ P_{2k}(4an) = (4a)^{2k} \left[n^2 - \frac{1}{4}\right] \dots \left[n^2-(k - \frac{1}{2})^2\right] < (4an)^{2k} \quad ;$$

d'autre part, puisque

$$\left| \frac{1}{u^{2k+1}} - \frac{1}{v^{2k+1}} \right| \leqslant \frac{(2k+1)\,|u-v|}{[\inf(|u|,|v|)]^{2k+2}}$$

on a

$$\left| \frac{1}{(z-4an)^{2k+1}} + \frac{1}{(z+4an)^{2k-1}} \right| \leqslant \frac{2(2k+1)\,|z|}{\big|\,4an - |x|\,\big|^{2k+2}} \quad ;$$

supprimons dans la série (26.7) les termes, en nombre fini, dont l'indice n ne vérifie pas

$$\frac{4an\rho}{\big|\,4an - |x|\,\big|} < \frac{1+\rho}{2} \quad ;$$

les termes restants sont majorés par ceux de la série double convergente

$$\frac{2}{\pi} |z| \sum_{k=o}^{\infty} (2k+1) \left(\frac{1+\rho}{2}\right)^{2k+2} \sum_{n=\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{(4an\rho)^2} \quad ;$$

d'où la convergence de (26.7), dans les conditions énoncées.

<u>La preuve</u> de (26.8) et l'étude de sa convergence sont analogues.

<u>Les expressions de</u> $\tilde{\varphi}_o$ <u>et</u> $\tilde{\psi}_o$ s'obtiennent en appliquant

(3.6) à (24.5) : si $|\rho| < 1$,

$$(26.9) \qquad 4\,a\,\tilde{\varphi}_o(z) = \frac{i}{6}\frac{1}{1-\rho^2}\,z^3 - \frac{2i}{3}\,\frac{1+\rho^2}{(1-\rho^2)^2}\,a^2 z \ ,$$

$$(26.10) \qquad 4\,a\,\tilde{\psi}_o(z) = \frac{i}{6}\frac{\rho}{1-\rho^2}\,z^3 - \frac{4i}{3}\,\frac{\rho}{(1-\rho^2)^2}\,a^2 z \ .$$

Une majoration appropriées des séries (26.7) et (26.8) et de leurs dérivées en z et l'emploi des équations de convolution (24.6), (24.7) permet d'établir que , à l'infini,

$$\varphi_o \mp \tilde{\varphi}_o \quad \text{et} \quad \psi_o \mp \tilde{\psi}_o \qquad (\pm y > 0)$$

<u>tendent rapidement vers</u> 0 <u>dans tout domaine</u>

$$|x| < c_o|y| + c_1 \qquad (c_o \text{ et } c_1 \text{ constants ; } c_o < \frac{\sqrt{1-|\rho|^2}}{|\rho|}) \ ;$$

nous ne donnerons pas les détails de la démonstration.

Résumons les résultats ainsi obtenus :

27. THEOREME CONCERNANT LA FONCTION DE GREEN BIHARMONIQUE, VERIFIANT, AUX DEUX BORDS, DEUX MEMES CONDITIONS HOMOGENES EN $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$. - <u>Nous supposons</u> $p_j(\xi,\eta)$ $(j=o,1)$ <u>indépendant de</u> x et <u>homogène en</u> (ξ,η) ; <u>nous notons</u> $q_j(\xi,\eta) = \frac{\partial p_j}{\partial \xi}$. <u>Nous notons</u> $\rho e^{i\theta}$ (ρ, θ réels) <u>et</u> β (β complexe) <u>les constantes définies par les équations</u>

$$(27.1) \quad 2\rho\, e^{i\theta} \begin{vmatrix} p_o & q_o \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_o & \hat{p}_o \\ p_1 & \hat{p}_1 \end{vmatrix} \ ,$$

$$(27.2) \qquad (\beta - \tfrac{1}{2}) \begin{vmatrix} p_o & \hat{p}_o \\ & \\ p_1 & \hat{p}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_o & \hat{q}_o \\ & \\ p_1 & \hat{q}_1 \end{vmatrix} ,$$

où

$$p_j = p_j(1,i) \quad , \quad q_j = q_j(1,i) \quad , \quad \hat{p}_j = p_j(-1,i) \quad , \quad \hat{q}_j = q_j(-1,i) \quad ;$$

nous supposons non nuls les déterminants des premiers membres, donc $\rho \neq 0$.

Alors $G(z,z')$ est donnée par (25.6), où les φ_j et ψ_j sont définis par (24.5), (25.1), ... (25.4); on obtient $\tilde{G}$ en remplaçant dans (25.6) les φ_j et ψ_j par φ_j et $\tilde{\psi}_j$; $\tilde{\varphi}_o$ et $\tilde{\psi}_o$ résultent de (3.6) et (24.5) ; $\tilde{\varphi}_j$ et $\tilde{\psi}_j$ $(j=1,2)$ en résultent par les relations qu'on obtient en remplaçant dans (25.1) ... (25.4) φ_j et ψ_j par $\tilde{\varphi}_j$ et $\tilde{\psi}_j$.

Si $|\rho| < 1$, alors φ_o et ψ_o sont donnés par (26.5) et (26.6) et aussi par (26.7), (26.8) ; $\tilde{\varphi}_o$ et $\tilde{\psi}_o$ par (26.9) et (26.10); $G(z,z')$ est donc un polynome en (x,y,x',y') de degré 3 .

Puisque les $\varphi_j(z)$ et $\psi_j(z)$ sont des fonctions réelles et paires, on tire aisément de cette formule (25.6) ceci :

COROLLAIRE. - Sous les hypothèses du théorème précédent, $G(z,z')$ est symétrique en (z,z') si et seulement si[8]

$$(27.3) \qquad \beta = 0 \quad , \quad \theta = 0 \; .$$

Alors l'expression (25.6) de G peut s'écrire :

$$(27.4) \qquad 8\,\rho\, G(z,z') = \mathrm{Re}[\,\psi_2(z-z') + \varphi_2(z+\bar{z}')]$$

$$+ 2\,\rho\, \mathrm{Re}(1 - x\frac{\partial}{\partial x} - x'\frac{\partial}{\partial x'})[\,\varphi_1(z-z') + \psi_1(z+\bar{z}')]$$

8.) Nous imposons que $-\pi < \theta < \pi$, ce qui est possible puisque ρ peut être < 0 .

$$+ \rho^2 \,\mathrm{Re}\Big(1-2x\frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big(1-2x'\frac{\partial}{\partial x'}\Big)\,[\psi_0(z-z') + \varphi_0(z+\bar{z}')] \quad ;$$

<u>**si**</u> $|\rho| < 1$:

$$(27.5) \qquad 8\rho\,\tilde{G}(z,z') = \frac{(1+\rho)(3\rho-1)}{8(1-\rho)a}\,(x^2+x'^2)(y-y')$$

$$-\frac{1+\rho}{4a}\,x\,x'(y-y') + \frac{(1+\rho)^2}{24(1-\rho)a}\,(y-y')^3$$

$$+\frac{(1+\rho)(1-5\rho+6\rho^2)}{6\rho(1-\rho)^2}\,a(y-y') \quad .$$

Le théorème d'unicité (n° 12) s'énonce comme suit :

THÉORÈME D'UNICITÉ. - <u>Faisons les hypothèses du théorème précédent et l'hypothèse</u> $|\rho| < 1$.<u>Soit</u> $F(z)$ <u>une fonction biharmonique, vérifiant les conditions aux bords</u>

$$(27.6) \qquad p_j\Big(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\Big)\,F(z) = 0 \qquad \text{pour } x = \pm a \;,\; j = 0, 1 \;;$$

<u>notons</u> $n_0 \leq n_1$ <u>les ordres des</u> p_j ; <u>supposons</u> $F(z)$ <u>et ses dérivées d'ordres</u> $\leq n_1 + 3$ <u>à croissance lente sur</u> $\overline{B(a)}$.

<u>Alors</u> $F(z)$ <u>est nécessairement un polynome en</u> (x,y) , <u>biharmonique</u>.

<u>Note</u>. - Evidemment $\tilde{G}(z,z')$ est un tel polynome, quel que soit z' .

28. L'ÉTUDE DE LA FLEXION DE LA BANDE ÉLASTIQUE, A BORDS LIBRES, homogène et isotrope (voir l'article suivant), est celui du cas

$$(28.1)\quad p_0\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \ , \quad p_1\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \ ;$$

la constante ν est le coefficient d'élasticité de Poisson :

$$|\nu| < 1 \ .$$

Les formules (27.1) et (27.2) donnent :

$$(28.2)\qquad \theta = 0 \ , \quad \beta = 0 \ , \quad \rho = \frac{1-\nu}{3+\nu} \ , \ (0 < \rho < 1) \ ;$$

puisque (27.3) est vérifié, $G(z,z')$ est symétrique ; il en résulte (voir l'article suivant) que la bande élastique satisfait, comme il le faut, le principe de réciprocité de la résistance des matériaux, qui exprime le principe de conservation de l'énergie.

L'expression de G est donc (27.4) , où φ_j et ψ_j sont définis par (26.3) (26.5), (26.6) [ou encore (26.7), (26.8)], (25.1) ... (25.4) ; celle de $\tilde{G}$ est (27.5) . Ces formules sont utiles en technique.

Le théorème d'unicité se complète enfin (voir n° 29) comme le suggère la mécanique : les seules fonctions $F(z)$, vérifiant les conditions qu'il énonce, sont les combinaisons linéaires des six polynomes :

$$(28.3)\qquad \begin{aligned} &\pi_1(x,y) = 1 \ , \quad \pi_2 = x \ , \quad \pi_3 = y \ , \quad \pi_4 = xy \\ &\pi_5 = \nu x^2 - y^2 \ , \quad \pi_6 = \nu x^2 y - \frac{y^3}{3} \ . \end{aligned}$$

Note. - Par suite, $\tilde{G}(z,z')$ est une forme bilinéaire antisymétrique des $\pi_j(x,y)$ et $\pi_j(x',y')$; on le vérifie aisément.

29. PREUVE DE (28.3). - Il est évident que les π_j sont six polynômes biharmoniques, vérifiant les conditions aux bords (27.6).

Supposons qu'il existe un tel polynôme, qui soit linéairement indépendant des π_j ; toutes ses dérivées en y sont, elles aussi, de tels polynômes. Il existe donc, alors, un polynome F tel que :

F et $\frac{\partial F}{\partial y}$ sont biharmoniques et vérifient les conditions aux bords (27.6) ;

F n'est pas combinaison linéaire de π_j ;

$\frac{\partial F}{\partial y}$ est combinaison linéaire des π_j .

Il s'agit de prouver l'absurdité de cette hypothèse.

Les seuls polynômes biharmoniques indépendants de y sont les combinaisons linéaires de π_1 , π_2 ,

$$\varpi_1 = x^2 \quad , \quad \varpi_2 = x^3 \quad ;$$

d'autre part, tout π_j est la dérivée en y d'une combinaison linéaire des π_k et des deux polynômes biharmoniques :

$$\varpi_3 = xy^2 \quad , \quad \varpi_4 = x^4 - y^4 - 2\nu(x^4 - 3x^2y^2) \quad .$$

Il s'agit donc de prouver que toute combinaison linéaire F des ϖ_j , $(j = 1, \dots 4)$, vérifiant les conditions aux bords (27.6), est nulle.

Or

$$p_1\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \varpi_j = \text{const.} \quad \text{pour} \quad j < 4 \quad ,$$
$$= 24(1 - \nu^2)x \quad \text{pour} \quad j = 4 \quad ;$$

on a $|\nu| < 1$ et $p_1\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) F = 0$ pour $x = \pm a$;

il faut donc que F soit combinaison linéaire des seuls polynômes ϖ_1 , ϖ_2 , ϖ_3 .

De même :

$$p_o\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \tilde{\omega}_j = 2 \quad \text{pour} \quad j = 1 \quad ,$$

$$= \text{const.} \quad x \quad \text{pour} \quad j = 2 , 3 \quad ;$$

on a $p_o \, F = 0$ pour $x = \pm a$; il faut donc que F soit combinaison linéaire des seuls polynômes $\tilde{\omega}_2$ et $\tilde{\omega}_3$:

$$F = c_1 \, x^3 + c_2 \, xy^2 \quad .$$

Les conditions aux bords (27.6) s'écrivent alors

$$3 \, c_1 + \nu \, c_2 = 0 \quad , \quad 3 \, c_1 + (2 - \nu) \, c_2 = 0 \quad ;$$

elles exigent $F = 0$, puisque $\nu \neq 1$.

Voici achevée la preuve de (28.3).

Bibliographie

[1] S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG. - Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, I. Comm. pure and appl. math., t. 12, 1959, p. 623-727.

[2] R.D. BROWN, On the reflection laws of fourth oder elliptic differential equations in two independant variables (sous presse).

[3] G. HOHEISEL, Randwertaufgaben und funktionale Differentialgleichungen, Jahresbericht der deutsch. math. Vereinigung, t. 39, 1930, p. 54-58.

[4] J. LERAY, Flexion de la bande homogène isotrope à bords libres et du rectangle à deux bords parallèles appuyés (article ci-dessous).

[5] J.C. LERAY, Calcul numérique des plaques (en préparation).

[6] Hans LEWY, On the reflection laws of second order differential equations in two independent variables, Bull. of the Amer. Math. Soc., t. 65, n° 2, March 1959.

[7] J. SLOSS, Reflection of biharmonic functions across analytic boundary conditions (sous presse).

[8] A. WEINSTEIN, Sur un problème aux limites dans une bande indéfinie, Comptes rendus Ac. Sc., t. 184, 1927, p. 497.