Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

Jaak Peetre

# Sur la théorie des semi-groupes distributions

*Séminaire Jean Leray*, n° 2 (1963-1964), p. 76-99
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1963-1964___2_76_0>

© Séminaire Jean Leray (Collège de France, Paris), 1963-1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Jean Leray » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

# SUR LA THÉORIE DES SEMI-GROUPES DISTRIBUTIONS

par

JAAK PEETRE

## 1. RAPPEL SUR LES SEMI-GROUPES USUELS. DÉFINITION DES SEMI-GROUPES DISTRIBUTIONS.

Nous commençons par rappeler quelques faits bien connus sur les s.g. (semi-groupe) usuels (cf. Hille-Phillips [4] pour les détails et pour des indications bibliographiques).

Soit $E$ un espace de Banach et soit $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des opérateurs bornés dans $E$. Soit $R_+$ le demi-axe des nombres réels strictement positifs, $R_+ = \{t > 0\}$. Un s.g. d'opérateurs bornés dans $E$, c'est une application $G$ de $R_+$ dans $\mathcal{L}(E)$ telle que la propriété de semi-groupe suivante a lieu :

(1) $$G(t + s) = G(t)G(s), \quad t, \ s \in R_+ ,$$

satisfaisant de plus à une condition de continuité convenable, par exemple, la suivante :

(2) $$G(t) \overset{\text{fort}}{\to} G(t_0), \quad t \to t_0 .$$

Le g.i. (générateur infinitésimal) de $G$, c'est l'opérateur non-borné $A$ défini par :

(3) $$A = \lim_{t \to 0} \text{forte } (G(t) - I)/t.$$

Le résolvant de $A$, c'est l'opérateur borné $R(\lambda)$ défini par

(4) $$R(\lambda) = (A - \lambda)^{-1} ,$$

$\lambda$ parcourant le complément du spectre de $A$.

Une des raisons pour qu'on étudie les s.g. est leur rapport avec le problème de Cauchy pour les équations différentielles opérationnelles. Indiquons brièvement ce rapport. En effet, soit $u \in \mathcal{D}(A)$, le domaine de $A$, et posons

$$u(t) = G(t)a, \quad t \in R_+ .$$

Alors on vérifie facilement que $u$ satisfait à l'équation

$$du/dt = Au$$

et à la condition initiale

$$\operatorname*{lim\,forte}_{t \to 0} u(t) = a,$$

c'est-à-dire qu'on a résolu le problème de Cauchy pour cette équation.

De ce rapport avec le problème de Cauchy vient aussi l'intérêt de la question suivante : Etant donné un opérateur non-borné $A$ quelconque, dans quelles hypothèses peut-on affirmer que $A$ soit le g.i. d'un s.g. $G$ ? Le résultat classique dans cette direction est le théorème de Hille-Yoshida (1948) :

<u>Pour que</u> $A$ <u>soit le g.i. d'un s.g.</u> $G$ <u>tel que</u>

(5) $$\operatorname*{lim\,forte}_{t \to 0} G(t) = I \;;$$

(6) $$\| G(t) \| \leq 1 \;,$$

<u>il faut et il suffit que le résolvant</u> $R(\lambda)$ <u>de</u> $A$ <u>existe pour</u> $\lambda$ <u>réel</u> $> 0$ <u>et satisfasse à l'inégalité</u>

(7) $$\| R(\lambda) \| \leq 1/\lambda \;, \quad \lambda \text{ réel} > 0.$$

Le théorème de Hille-Yoshida a des applications importantes dans la théorie des équations aux dérivées partielles ; mentionnons les cas typiques suivants :

a) L'équation de la chaleur, $E = L_1$ ou $C$, l'espace des fonctions continues bornées - Hille, Yoshida, Feller etc.

b) L'équation des ondes, $E = L_2$ - Yoshida, Lions etc.

c) L'équation de Schrödinger, $E = L_2$ .

Par contre, la méthode ne s'applique pas dans les cas suivants :

d) L'équation des ondes, $E = L_p$ $(p \neq 2)$.

e) L'équation de Schrödinger, $E = L_p$ $(p \neq 2)$.

En effet, par exemple dans le cas de d), on peut démontrer (cf. Littman [7]) qu'il existe des données dans $L_p$ $(p \neq 2)$ telles que la solution correspondante, pour $t > 0$, n'appartient pas à $L_p$ : elle n'est en général qu'une distribution.

Ceci montre en particulier que la notion de s.g. actuelle est, au moins du point de vue du problème de Cauchy, beaucoup trop étroite. D'où vient la nécessité de l'introduction des s.g.d. (semi-groupe distributions).

Comment les définir ? Dans le cas de s.g. usuels on introduit souvent l'opérateur borné $G(\varphi)$ défini par

$$G(\varphi) = \int_0^\infty \varphi(t)\, G(t)\, dt \tag{8}$$

où -nous ne nous intéresserons, pour le moment, qu'à ce cas- $\varphi \in \mathcal{D}_+$, l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact contenu dans $\underset{\sim}{R}_+$, muni de la topologie "naturelle". On vérifie facilement les propriétés suivantes :

$$G(\varphi + \psi) = G(\varphi) + G(\psi),\ \varphi, \psi \in \mathcal{D}_+ \quad ; \tag{9}$$

$$G(c\varphi) = c\, G(\varphi),\ c \in \underset{\sim}{C},\ \varphi \in \mathcal{D}_+ \quad ; \tag{10}$$

$$G(\varphi * \psi) = G(\varphi)\, G(\psi),\ \varphi, \psi \in \mathcal{D}_+ \ (*\text{, convolution}) \ ; \tag{11}$$

$$G(\varphi) \overset{\text{uniforme}}{\rightarrow} G(\varphi_0),\ \varphi \to \varphi_0 \quad . \tag{12}$$

On notera que (11) correspond à (1), et (12) à (2). On arrive maintenant aussitôt à la définition des s.g.d. : Un <u>s.g.d.</u> d'opérateurs bornés dans E, c'est une application G de $\mathcal{D}_+$ dans $\mathcal{L}(E)$ telle que les propriétés (9) - (12) ci-dessus ont lieu.

L'étude des s.g.d. a été commençée par Lions [5]. (Cf. également Foias [3], où l'on étudie le cas des s.g.d. d'opérateurs normaux dans des espaces de Hilbert, et Yoshinaga [12].) En particulier, Lions établit, pour la classe des s.g.d. dits <u>réguliers</u>, un théorème analogue au théorème de Hille-Yoshida :

*Pour que* $A$ *soit le g.i.*[1] *d'un s.g.d.* $G$ *(régulier) il suffit que le résolvant* $R(\lambda)$ *de* $A$ *existe pour* $\mathrm{Re}\lambda$ *assez grand et satisfasse à l'inégalité* :

(13) $$\| R(\lambda) \| \leq |\lambda|^q, \ \mathrm{Re}\lambda \quad \text{assez grand,}$$

$q$ *étant une constante*.

Remarquons qu'il y a pourtant une différence manifeste entre ces deux résultats. En effet, on notera que, au moins formellement $(G(t) = e^{tA}\ !)$,

$$R(\lambda) = - \int_0^{\infty} e^{-t\lambda} G(t)\, dt,$$

c'est-à-dire que $R(\lambda)$ et $G(t)$ sont liés par une intégrale de Laplace à valeurs opérationnelles. Donc il s'agit là, dans un certain sens, d'un problème d'inversion d'une intégrale de Laplace. On trouvera alors que le théorème de Hille-Yoshida est lié à la formule d'inversion de Post-Widder, tandis que le théorème de Lions est lié à la formule d'inversion de Fourier. (Rappelons que si

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{t\lambda} f(t)\, dt,$$

alors on a, selon Post-Widder,

$$f(t) = \lim_{n \to \infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{t}\right)^{n+1} F^{(n)}\left(\frac{n}{t}\right)$$

ou bien, selon Fourier,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{Re}\lambda = \text{const.}} e^{t\lambda} F(\lambda)\, d\lambda \quad ;$$

le lecteur pourrait consulter Widder [11], Chapitre VII).

Le but principal du reste de cette conférence est d'établir (v. n°5), pour une classe encore plus restreinte que les s.g.d. réguliers, un résultat de la même nature que le théorème de Lions, et donc lié à la formule d'inversion de Fourier, mais beaucoup plus précis. Nous donnons aussi (v. n° 4 et n° 6) des exemples

---

1) Pour définir le g.i. dans le cas de s.g.d. on ne peut plus utiliser la formule (1) ; pour la définition dans ce cas, v. n° 5.

de s.g.d. appartenant à notre classe, et nous en indiquons enfin (v. n° 7) quelques applications.

Pour simplifier la présentation nous allons ajouter à la définition des s.g.d. une certaine hypothèse auxiliaire. Introduisons les sous-espaces suivants de E ("range" et "null-space")

(14) $$\mathcal{R} = \{a \mid a = \sum_{\nu} G(\varphi_{\nu})a_{\nu} \, , \, \varphi_{\nu} \in \mathcal{D}_{+} \, , \, a_{\nu} \in E\}$$

et

(15) $$\mathcal{N} = \{a \mid G(\varphi)a = 0, \, \varphi \in \mathcal{D}_{+}\} \, .$$

Alors on va supposer, dans ce qui suit que

(16) $$\overline{\mathcal{R}} = E, \qquad \mathcal{N} = 0 \, .$$

## 2. DEFINITION DE $G(T)$ POUR $T \in \overline{\mathcal{E}}'_{+}$ .

Soit $\overline{\mathcal{E}}'_{+}$ l'espace des distributions sur l'axe réel $\underset{\sim}{R}$ à support compact contenu dans $\overline{\underset{\sim}{R}}_{+}$ , muni de la topologie "naturelle". On notera que $\overline{\mathcal{E}}'_{+}$ est une algèbre, pour la convolution, et que $\mathcal{D}_{+}$ est un idéal dans $\overline{\mathcal{E}}'_{+}$ .

Soit $G$ un s.g.d. Alors $G(\varphi), \varphi \in \mathcal{D}_{+}$ , est un opérateur borné dans E. Notre but est de définir $G(T)$, $T \in \overline{\mathcal{E}}'_{+}$, comme opérateur non-borné de domaine R. Pour les s.g.d. réguliers ceci a été fait dans Lions [5] qui utilise une idée de L. Schwartz. Ici nous suivons un autre chemin qui peut-être est plus pratique. La même méthode a été utilisée, indépendamment, par Yoshinaga [12].

Soit $T \in \overline{\mathcal{E}}'_{+}$, $a \in \mathcal{R}$ Posons alors :

(1) $$G(T)\, a = \sum_{\iota} G(T * \varphi_{\iota}) \, a_{\iota}$$

où $\varphi_{\iota} \in \mathcal{D}_{+}$, $a_{\iota} \in E$ avec $a = \sum_{\iota} G(\varphi_{\iota}) \, a_{\iota}$ . Vu la propriété d'idéal de $\mathcal{D}_{+}$ , le second membre de (1) a un sens. On montre facilement que cette définition est consistante :

LEMME 1. $G(T)\,a$ <u>est uniquement déterminé par</u> (1) ; <u>si</u> $T = \varphi \in \mathcal{D}_+$ <u>on a</u> $G(T)a = G(\varphi)a$.

Nous pouvons maintenant étendre les propriétés (1.9) - (1.12).

PROPOSITION 1. <u>Soit</u> $a \in \mathcal{R}$. <u>Alors on a</u>

(2) $$G(T)a \in \mathcal{R},\ T \in \overline{\mathcal{E}}'_+ \ ;$$

(3) $$G(T+S)a = G(T)a + G(S)a,\ T,\ S \in \overline{\mathcal{E}}'_+ \ ;$$

(4) $$G(cT)a = c\ G(T)a,\ c \in \underset{\sim}{C},\ T \in \overline{\mathcal{E}}'_+ \ ;$$

(5) $$G(T*S)a = G(T)\ G(S)a,\ T,\ S \in \overline{\mathcal{E}}'_+ \ ;$$

(6) $$G(T)a \ \rightarrow\ G(T_0)a,\ T \ \rightarrow\ T_0 \ .$$

DÉMONSTRATION : Conséquences immédiate de (1).

Si $T = \delta_t$, (masse unité placée au point $t$) on écrira

(7) $$G(t)a = G(\delta_t)a,\quad a \in \mathcal{R}$$

Nous avons alors la formule suivante (v. (1.8)) :

(8) $$G(T) = \int_0^\infty T(t)\ G(t)a\ dt,$$

"l'intégrale" étant prise au sens des distributions.

Notons aussi le résultat suivant.

PROPOSITION 2. <u>Soit</u> $T \in \overline{\mathcal{E}}'_+$. <u>Alors</u> $G(T)$ <u>est pré-fermé</u>.

DÉMONSTRATION : Soit $a_\nu$ une suite dans $\mathcal{R}$ telle que

$$a_\nu \rightarrow 0,\quad G(T)a_\nu \rightarrow b,$$

avec $b \in E$. Il faut évidemment montrer que $b = 0$. Or, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}'_+$ on a :

$$G(\varphi)b = \lim\ G(\varphi)\ G(T)a_\nu = \lim G(\varphi * T)a_\nu = 0 \ .$$

Autrement dit, on a $b \in \mathcal{N}$. Donc, d'après (1.16), on a $b = 0$.

Dans ce qui suit on va désigner par $\overline{G(T)}$ la fermeture de $G(T)$, $T \in \overline{\mathcal{E}'_+}$.

3. SEMI-GROUPES DISTRIBUTIONS DE CLASSE $\mathcal{C}$

Remarquons d'abord que dans le théorème de Hille-Yoshida (v. n° 1) on a posé, sur les s.g. en question, deux conditions : une condition à l'origine et une condition à l'infini. C'est justement ce qu'on va faire aussi dans le cas des s.g.d. Nous commençons, dans ce numéro, par discuter la condition à l'origine.

Si $\varphi \in \mathcal{D}_+$ $(T \in \overline{\mathcal{E}'_+})$, $s \in R_+$, on pose

$$\varphi_s(t) = \frac{1}{s}\varphi\left(\frac{t}{s}\right) \qquad \left(T_s(t) = \frac{1}{s}T\left(\frac{t}{s}\right)\right).$$

DÉFINITION 1 . <u>On dit qu'un s.g.d.</u> G <u>est de classe</u> $\mathcal{C}$ <u>si, et seulement si on a</u>

(1) $$G(\varphi_s) \xrightarrow{\text{fort}} I,\ s \to 0,\ \varphi \in \mathcal{D}_+,\ \int_0^\infty \varphi(t)dt = 1$$

<u>ou, ce qui est une condition équivalente</u> :

(1') $$\lim_{s \to 0} \| G(\varphi_s) \| < \infty,\ \varphi \in \mathcal{D}_+ .$$

L'équivalence de (1) et de (1') résulte aussitôt du théorème de Banach-Steinhaus.

Voici maintenant notre résultat principal.

THÉORÈME 1. G <u>est de classe</u> $\mathcal{C}$ <u>si, et seulement si, pour tout</u> $\tau > 0$, <u>il existe des constants</u> C <u>et</u> k, k <u>entier</u> $> 0$, <u>telles que l'inégalité suivante a lieu</u> :

(2) $$\| G(\varphi) \| < C \int_0^\tau t^k |\varphi^{(k)}(t)|\, dt,\ \varphi \in \mathcal{D}_+,\ \varphi = 0 \text{ en dehors de } (0,\tau)$$

REMARQUE 1. Comme il va résulter de la démonstration ci-dessous, ce résultat est lié à la notion de "limite d'une distribution en un point" due à Lojasiewicz [8].

DÉMONSTRATION : "Suffisance". Il résulte de (2) que

$$\|G(\varphi_s)\| < C \int_0^\tau t^k |\varphi^{(k)}(t)| \, dt, \varphi \in \mathcal{D}_+, \varphi = 0 \text{ en dehors de } (0, \tau], \; s \in (0, \tau]$$

d'où (1').

"Nécessité". On prend $\tau = 1$, pour fixer les idées. En utilisant le théorème de Baire, on voit qu'il existe $C$ et $k$ telles que

$$(3) \qquad \| G(\varphi_s) \| \leq C \int_{2^{-1}}^{2} |\varphi^{(k)}(t)| dt, \varphi \in \mathcal{D}, \varphi = 0 \text{ en dehors de } [2^{-1}, 2], \; s \leq 1.$$

On en déduit facilement

$$(4) \quad \| G(\varphi_s) \| \leq C \; 2^{-\nu k} \int_{2^{-\nu-1}}^{2^{-\nu+1}} |\varphi^{(k)}(t)| dt, \varphi \in \mathcal{D},$$

$$\varphi = 0 \text{ en dehors de } [2^{-\nu-1}, \; 2^{-\nu+1}], \; s \leq 2^{\nu} .$$

En effet, on applique (3) à la fonction $\varphi(2^{-\nu} t)$. On choisit $\alpha_\nu \in \mathcal{D}$ ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) telles que

$$(5) \qquad \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \alpha_\nu(t) = 1 \; ;$$

$$(6) \qquad \alpha_\nu(t) = 0 \text{ en dehors de } [2^{-\nu-1}, 2^{-\nu+1}] \; ;$$

$$(7) \qquad |\alpha_\nu^{(j)}(t)| \leq C_j \; 2^{\nu} \; (j = 0, 1, \ldots) \text{ avec } C_j \text{ indépendant de } \nu$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}_+$, $\varphi = 0$ en dehors de $(0,1]$. Alors, vu (5), on a

$$\varphi = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi \alpha_\nu .$$

Donc, en utilisant (4), (6), (7), on obtient :

$$\|G(\varphi)\| \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \|G(\varphi\alpha_\nu)\| \leq C\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu k} \int_{2^{-\nu-1}}^{2^{-\nu+1}} |(\varphi\alpha_\nu)^{(k)}(t)|\,dt \leq$$

$$\leq C\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} C_{k-j}\, 2^{j+1} \int_0^1 t^j |\varphi^{(j)}(t)|\,dt.$$

L'inégalité désirée (2) en résulte aussitôt en tenant compte de l'inégalité élémentaire suivante :

(8) $$\int_0^\infty t^j |\varphi^{(j)}(t)|\,dt \leq \frac{j!}{k!} \int_0^\infty t^k |\varphi^{(k)}(t)|\,dt, \varphi \in \mathcal{D},\ j \leq k .$$

COROLLAIRE 1. <u>Soit</u> $G$ <u>de classe</u> $\mathcal{G}$ . <u>Soient</u> $\tau$ , $C$, $k$ <u>comme dans le Th. 1.</u> <u>Soit</u> $T \in \overline{\mathcal{E}}'_+$ <u>avec</u> $T = 0$ <u>en dehors de</u> $(0, \tau]$ <u>telle que</u> 1° $T$ <u>est une mesure,</u> $\{0\}$ <u>ayant la mesure</u> 0 <u>par rapport à</u> $|T|$ <u>et</u> 2° <u>la restriction de</u> $T^{(k)}$ <u>à</u> $\underset{\sim}{R}_+$ est une mesure telle que

(9) $$\int_{0+}^\infty t^k |T^{(k)}(t)|\,dt < \infty .$$

<u>Alors</u> $\overline{G(T)}$ <u>est borné et</u> (2) <u>a lieu, avec</u> $\varphi$ <u>remplacé par</u> $T$ (<u>et</u> $G(\varphi)$ <u>par</u> $\overline{G(T)}$). <u>Il en résulte que</u>

(10) $$\overline{G(T_s)} \overset{\text{fort}}{\to} I,\quad s \to 0,\quad \int_0^\infty T(t)dt = 1$$

<u>et que</u>

(10') $$\overline{\lim_{s\to 0}}\ \|\overline{G(T_s)}\| < \infty .$$

DÉMONSTRATION : Considérons d'abord le cas particulier où la restriction de $T$ à $R_+$ est indéfiniment différentiable. Soit $\rho$ une fonction indéfiniment différentiable, avec $\rho = 0$ pour $t \leqslant 1$, $\rho = 1$ pour $t \geqslant 2$, $0 < \rho < 1$, ailleurs et posons $\varphi_\eta(x) = \rho(\frac{x}{\eta})\, T(x)$. Alors on a (vu 1°) $\varphi_\eta \to T$, $\eta \to 0$. Donc, d'après (2.6), $G(\varphi_\eta)a \to G(T)a$, $\eta \to 0$, $a \in \mathcal{R}$. Or, d'après (1.16), $\mathcal{R}$ est un sous-ensemble dense de $E$. Donc il suffit d'évaluer $\lim\limits_{\eta \to 0} \| G(\varphi_\eta) \|$. En effet, en appliquant (2) à $\varphi_\eta$, on déduit facilement

$$\lim_{\eta \to 0} \| G(\varphi_\eta) \| \leqslant \int_{0+}^{\tau} t^k \, | T^{(k)}(t) | dt,$$

d'où l'énoncé dans le cas particulier. Le cas général en résulte aussitôt par approximation.

Prenons maintenant

$$(11) \qquad T(t) = \begin{cases} k(1-t)^{k-1} & \text{pour } t \leqslant 1 \\ 0 & \text{pour } t > 1 \end{cases} \quad \text{si } k > 0, = \delta_1 \quad \text{si } k = 0.$$

Alors les hypothèses 1° et 2° du Cor. 1 ont lieu. On notera que, d'après (2.8),

$$(12) \qquad G(T_s)a = I^k G(s)a = \frac{k}{s^k} \int_0^s (s-t)^{k-1} \, G(t)a \, dt, \ a \in \mathcal{R}.$$

ce n'est que la moyenne de Riesz d'ordre $k$ de $G(t)a$.

Voici maintenant une variente du Th. 1.

THÉORÈME 2. $G$ est de classe $\mathcal{C}$ si, et seulement si, pour tout $\tau > 0$, il existe un entier $k \geqslant 0$ tel que $I^k G(s)$ est borné pour $s \in (0, \tau]$ et tel que

(13) $$\overline{I^k\, G(s)} \overset{\text{fort}}{\to} I, \quad s \to 0$$

<u>ou bien, ce qui est équivalent, tel que</u>

(13') $$\overline{\lim_{s \to 0}} \; \| \overline{I^k G(s)} \| < \infty.$$

DÉMONSTRATION : "Suffisance". Spécialisation du Cor. 1.

"Nécessité". Nous pouvons supposer que

(14) $$\| \overline{I^k G(s)} \| \leqslant C, \quad s \in (0,\tau].$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}$ avec $\varphi = 0$ en dehors de $(0,\tau]$. Soit $a \in \mathcal{R}$. Alors, en intégrant par parties dans (12) et en utilisant (2.8), on obtient

$$G(\varphi)a = \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^\infty t^k\, \varphi^{(k)}(t)\, I^k G(t)a\, dt,$$

d'où, vu (17),

$$\| G(\varphi)a \| \leqslant \frac{C}{k!} \int_0^\tau t^k |\varphi^{(k)}(t)| dt \, \| a \| ,$$

d'où (2). Donc $G$ est de classe $\mathcal{B}$, d'après le Th. 2.

4. UN EXEMPLE D'UN SEMI-GROUPE DISTRIBUTIONS DE CLASSE $\mathcal{B}$.

Nous pouvons supposer que $E$ soit <u>reflexif</u>, ceci pour éviter quelques difficultés concernant l'intégration des mesures à valeurs opérationnelles.

Soit $\mathcal{C}_o(\underset{\sim}{C})$ l'espace des fonctions continues sur $\underset{\sim}{C}$ tendant vers $0$ à l'infini. Une <u>mesure spectrale</u> dans $E$, c'est une application $P$ de $\mathcal{C}_o(\underset{\sim}{C})$ dans $\mathcal{L}(E)$ telle que les propriétés suivantes ont lieu :

(1) $$P(\Phi + \psi) = P(\Phi) + P(\psi),\ \Phi, \psi \in \mathcal{C}_0(\underset{\sim}{C})\ ;$$

(2) $$P(c\Phi) = c\, P(\Phi),\ c \in C,\ \Phi \in \mathcal{C}_0(\underset{\sim}{C})\ ;$$

(3) $$P(\Phi\ \psi) = P(\Phi)\, P(\psi),\ \Phi, \psi \in \mathcal{C}_0(\underset{\sim}{C})\ ;$$

(4) $$P(\Phi_\nu) \overset{\text{faible}}{\rightarrow} I,\ \Phi_\nu \overset{\text{simple}}{\rightarrow} 1,\ |\Phi_\nu| < 1\ ;$$

(5) $$P(\Phi) \overset{\text{uniforme}}{\rightarrow} P(\Phi_0),\ \Phi \overset{\text{uniforme}}{\rightarrow} \Phi_0$$

Le <u>spectre</u> $\sigma(P)$ de $P$, c'est le support de $P$, considéré comme mesure à valeurs opérationnelles. Vu la refléxivité de $E$, on peut définir $P(\Phi)$ pour toute fonction $\Phi$ continue et bornée sur $\sigma(P)$, par la formule :

(6) $$P(\Phi) = \text{lim faible}\ P(\rho_\nu \Phi),$$

où $\rho_\nu \in \mathcal{C}_0(\underset{\sim}{C})$, $|\rho_\nu| \leq 1$, $\rho_\nu \overset{\text{simple}}{\rightarrow} 1$. Les propriétés (1) - (5) se généralisent immédiatement à ces $\Phi$.

DÉFINITION 1. <u>On dit que</u> $\sigma \subset \underset{\sim}{C}$ <u>satisfait à la condition</u> (F) <u>s'il existe des constantes</u> $A$, $B$, <u>telles que</u>

(7) $$\text{Re}\lambda \leq \max(A,\ B \log|\lambda|),$$

On démontre facilement le lemme suivant.

LEMME 1; <u>Soit</u> $\sigma \subset \underset{\sim}{C}$ <u>satisfaisant à la condition</u> (F). <u>Alors il existe, pour tout</u> $T > 0$, <u>des constantes</u> $C$ <u>et</u> $k$, $k$ <u>entier</u> $> 0$, <u>telles que</u>

(8) $$\sup_{\sigma} |\Phi(\lambda)| \leq C \int_0^\infty t^k |\varphi^{(k)}(t)| dt, \varphi \in \mathcal{D}_+,$$

$$\varphi = 0 \text{ en dehors de } (0, \tau], \ \Phi(\lambda) = \int_0^\infty e^{t\lambda} \varphi(t)\, dt.$$

Posons :

(9) $$G(\varphi) = P(\Phi), \varphi \in \mathcal{D}_+, \ \Phi(\lambda) = \int_0^\infty e^{t\lambda} \varphi(t) dt$$

lorsque $\Phi$ est <u>bornée</u> sur $\sigma$ (P), en interprétant toujours $P(\Phi)$ comme la limite faible (6).

PROPOSITION 1. <u>On suppose que</u> $\sigma(P)$ <u>satisfait à la condition</u> (F). <u>Alors</u> $G(\varphi)$ <u>existe pour toute</u> $\varphi \in \mathcal{D}$ <u>et définit un s.g.d. de classe</u> $\mathcal{G}$.

REMARQUE 1. Ce résultat généralise les résultats de Foias [3] (cas : E = espace de Hilbert, $G(\varphi)$ normal). Celui-ci montre aussi (cf. en particulier [3], lemme 1.2) que, dans son cas, la condition (F) sur $\sigma(P)$ est nécessaire pour que $G(\varphi)$, donné par (9), soit un s.g.d.

DÉMONSTRATION : Le lemme 1 montre que $G(\varphi)$ existe pour toute $\varphi \in \mathcal{D}_+$ et que l'inégalité (3.2) **a lieu** . De plus, il résulte de (1) - (5) que (1.9) - (1.12) et (1.16) sont vérifiés. Donc $G(\varphi)$ est un s.g.d. de classe $\mathcal{G}$

## 5. SEMI-GROUPES DISTRIBUTIONS DE CLASSE $\mathcal{G}_m$

Dans ce numéro nous discutons les conditions à l'infini.

DÉFINITION 1. <u>Soit</u> m <u>un nombre réel</u> > 0. <u>On dit qu'un s.g.d. est de classe</u> $\mathcal{G}_m$ <u>si, et seulement si on a</u>

(1) $$\sup_s \|G(\varphi_s)\| / (1+s)^m < \infty, \ \varphi \in \mathcal{D}_+ \ .$$

Evidemment tout s.g.d. de classe $\mathcal{C}_m$ est de classe $\mathcal{C}$

Nous pouvons facilement étendre les résultats du n° 3 au cas des s.g.d. de classe $\mathcal{C}_m$.

THÉORÈME 1. G <u>est de classe</u> $\mathcal{C}_m$ <u>si, et seulement s'il existe des constantes</u> C <u>et</u> k <u>entier</u> $\geq 0$, <u>telles que l'inégalité suivante a lieu</u> :

$$(2) \qquad \| G(\varphi) \| \leq C \int_0^\infty (1+t)^m \, t^k \, |\varphi^{(k)}(t)| dt, \quad \varphi \in \mathcal{D}_+$$

COROLLAIRE 1. <u>Soit</u> G <u>de classe</u> $\mathcal{C}_m$ . <u>Soient</u> C, k <u>comme dans le Th.1. Soient</u> $T \in \mathcal{E}'_+$ (sans aucune hypothèse sur le support) <u>satisfaisant aux hypothèses</u> 1° <u>et</u> 2° <u>du Cor</u>. 3.1. <u>Alors</u> $\overline{G(T)}$ <u>est bornée et</u> (2) <u>a lieu, avec</u> $\varphi$ <u>remplacée par</u> T (<u>et</u> $G(\varphi)$ <u>par</u> $\overline{G(T)}$). <u>Il en résulte que</u>

$$(3) \qquad \sup_s \| \overline{G(T_s)} \| / (1+s)^m < \infty .$$

THÉORÈME 2. <u>G est de classe</u> $\mathcal{C}_m$ <u>si, et seulement s'il existe un entier</u> $k \geq 0$ <u>tel que</u> $I^k G(s)$ <u>est bornée pour</u> $s \in \mathbb{R}_+$ <u>et tel que</u>

$$(4) \qquad \sup_s \| \overline{I^k G(s)} \| / (1+s)^m < \infty$$

Un aspect nouveau est que maintenant on peut définir $\overline{G(T)}$ pour des distributions qui ne sont pas nécessairement à support compact. Etant donnée une fonction indéfiniment différentiable $\zeta$ , avec $\zeta = 1$ pour $t \leq 1$, $\zeta = 0$ pour $t > 2$, $0 < \zeta < 1$ ailleurs, nous pouvons définir $\overline{G(T)}$ par la formule

$$(5) \qquad \overline{G(T)} = \lim_{\eta \to \infty} \text{uniforme} \ \overline{G(T_\eta)}, \quad T_\eta(x) = \zeta\left(\frac{x}{\eta}\right) T(x) \ ,$$

pourvu que la limite existe et ne dépende pas de $\zeta$ . Nous avons le résultat suivant, variante du Cor. 1.

COROLLAIRE 2. Soit $G$ de classe $\mathcal{G}_m$. Soient $C$, $k$ comme dans le Th. 1. Soit $T$ une distribution à support contenu dans $\overline{R}_+$ satisfaisant aux hypothèse 1° et 2) du Cor. 3.1, sauf que au lieu (3.9) il faut maintenant demander

$$(6) \qquad \int_{0+}^{\infty} (1+t)^m \, t^j \, |T^{(j)}(t)| \, dt < \infty, \quad j \leqslant k .$$

Alors $\overline{G(T)}$ existe et les conclusions du Cor. 1 valent.

Après toutes ces préparations nous sommes finalement en mesure de traiter la question fondamentale de l'existence des s.g.d. dont le g.i. est donné (v. n° 1). Posons

$$(7) \qquad R(\lambda) = - \overline{G(T)}, \quad T(t) = e^{-\lambda t} ,$$

et

$$(8) \qquad A = -\overline{(\delta'_0)}.$$

Alors on a le résultat suivant.

THÉORÈME 3. i) Soit $G$ de classe $\mathcal{G}_m$ . Alors $R(\lambda)$ existe pour $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ et est le résolvant de $A$ . De plus, il existe des constantes $C$ et $\ell$ , $\ell$ entier $\geqslant 0$, telles que l'inégalité suivante a lieu :

$$(9) \qquad \| R(\lambda) \| \leqslant C \, \frac{|\lambda|^{\ell}}{|\mathrm{Re}\,\lambda|^{\ell+1}} \left(1 + \frac{1}{|\mathrm{Re}\,\lambda|}\right)^m , \quad \mathrm{Re}\,\lambda > 0.$$

ii) Inversement, si le résolvant $R(\lambda)$ d'un non-bornée $A$ satisfait à cette inégalité, il existe un s.g.d. $G$ de classe $\mathcal{C}_m$ tel que $A$ est le g.i. de $G$ (au sens de (8)).

DÉMONSTRATION : i) L'existence de $R(\lambda)$ suit aussitôt du Cor. 2. Nous en obtenons également :

$$\|R(\lambda)\| \leqslant C \int_0^\infty (1+t)^m t^k |(-\lambda)^k e^{-\lambda t} dt \leqslant$$

$$\leqslant C \frac{|\lambda|^k}{|\operatorname{Re}\lambda|^{k+1}} \left(1+\frac{1}{|\operatorname{Re}\lambda|}\right)^m \int_0^\infty (1+t)^m t^k e^{-t} dt.$$

d'où l'inégalité désirée (9), avec $\ell = k$. Que $R(\lambda)$ est effectivement le résolvant de $A$ résulte de Lions [5]. (On pourrait d'ailleurs en donner facilement une preuve directe).

iii) L'existence de $G$ résulte de Lions [5] (cf. en particulier Th. 6.1 ; v. aussi n° de cet exposé). De plus, on a

$$(10) \qquad G(\varphi) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}\lambda = \frac{1}{s}} \Phi(\lambda) R(\lambda) d\lambda , \; \varphi \in \mathcal{D}_+, \Phi(\lambda) = \int_0^\infty e^{\lambda t} \varphi(t) dt$$

où l'intégrale ne dépend pas de $s$. Reste seulement à vérifier que $G$ est de classe $\mathcal{C}_m$. Appliquons (10) à $\varphi_s$. On obtient :

$$(10') \qquad G(\varphi_s) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}\lambda = 1} \Phi(\lambda) \frac{1}{s} R\left(\frac{\lambda}{s}\right) d\lambda .$$

De plus, écrivons (9) dans la forme suivante :

$$(9') \qquad \frac{1}{s} \left\|R\left(\frac{\lambda}{s}\right)\right\| \leqslant C |\lambda|^\ell (1+s)^m, \quad s \in R_+ , \operatorname{Re} \lambda = 1.$$

On déduit de (9') et de (10') que

(11) $$\| G(\varphi_s) \| \leqslant \frac{C}{2\pi} \int_{\mathrm{Re}\lambda = 1} |\Phi(\lambda)| \; |\lambda|^k |d\lambda|$$

Ensuite on démontre le lemme suivant :

LEMME 1. <u>Soit</u> $\ell - k > 1$. <u>Il existe une constante</u> $C$ <u>telle que</u>

(12) $$\int_{\mathrm{Re}\lambda = 1} |\Phi(\lambda)| \; |\lambda|^k |d\lambda| \leqslant C \int_0^\infty e^t (|\varphi(t)| + |\varphi^{(\ell)}(t)|) dt,$$

$$\varphi \in \mathcal{D}_+ , \Phi(\lambda) = \int_0^\infty e^{\lambda t} \varphi(t) dt.$$

En utilisant (11) et le lemme 1 on trouve finalement :

$$\| G(\varphi_s) \| \leqslant \frac{C}{2\pi i} \int_0^\infty e^t (|\varphi(t)| + |\varphi^{(\ell)}(t)|) dt ,$$

d'où (1). Donc $G$ est de classe $\mathcal{C}_m$ .

6. UN EXEMPLE D'UN SEMI-GROUPE DISTRIBUTIONS DE CLASSE $\mathcal{C}_m$ .

Dans ce numéro on prend $A = i H$, $H$ étant un <u>opérateur elliptique auto-adjoint</u> d'ordre $N$ dans un ouvert $V \subset R^n$ :

(1) $$H = H(x,D) = \sum_{|\alpha| \leqslant N} c_\alpha(x) D^\alpha ,$$

où $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_\nu$ entier $\geqslant 0, |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ ,
$D^\alpha = (-i \frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1} \ldots (-i \frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n}$ et les $c_\alpha(x)$ sont des fonctions suffisamment différentiables, avec des <u>conditions aux limites auto-adjointes</u> convenables à la frontière de $V$. Soit

(2) $$A = i H = i P(\lambda) = i \int_{-\infty}^\infty \lambda \, d P(\lambda)$$

la résolution spectrale correspondante, dans $L_2(V)$, où P est une mesure spectrale dont le spectre $\sigma(P)$ est contenu dans $\mathbb{R}$. Nous pouvons supposer ici plus : qu'il soit contenu dans $\mathbb{R}_+$. (Donc on peut remplacer, dans (2) $\int_{-\infty}^{\infty}$ par $\int_0^{\infty}$ ).
Le résolvant est alors donné par :

$$R(\lambda) = (A-\lambda)^{-1} = iP\left(\frac{1}{\mu+i\lambda}\right) = i\int_0^{\infty} \frac{dP(\mu)}{\mu+i\lambda} \tag{3}$$

d'où, en intégrant par parties,

$$R(\lambda) = i(j+1)\int_0^{\infty} \frac{\mu^j I^j P(\mu)}{(\mu+i\lambda)^{j+2}}\, d\mu \tag{4}$$

où $I^jP(\ )$ est la moyenne de Riesz d'ordre j de $P(\mu)$.

En vertu du théorème de Stone, A engendre, dans $L_2(V)$, un s.g. (ou même un g. (groupe) d'opérateurs unitaires. C'est une question naturelle, au moins du point de vue purement théorique, de se demander ce qui se passe si l'on remplace $L_2(V)$ par $L_p(V)$, $p \neq 2$. Notre <u>conjecture</u> est qu'on obtient un s.g.d. de classe $\mathcal{C}_0$ mais nous n'avons résolu cette question que dans un cas très particulier.

Prenons donc $E = L_p(V)$. En utilisant (4), on obtient

$$\|R(\lambda)\| \leq (j+1)\int_0^{\infty} \frac{\mu^j}{|\mu+i\lambda|^{j+2}}\, d\mu \sup_{\mu} \|I^jP(\mu)\|$$

d'où facilement (5.9) avec $\ell = j+1$, $m = 0$ <u>pourvu que</u> de plus

$$\sup_{\mu} \| I^jP(\mu)\| < \infty \tag{5}$$

En se limitant maintenant au cas extrême $p = 1$ (les cas intermédiaires en résulteront en tenant compte du théorème d'interpolation de M. Riesz), il s'agit donc de démontrer que

(6) $$\sup_{\mu} \sup_{J\in V} \int_V | I^j P(\mu,x,y) \, dx < \infty$$

$P(\mu,x,y)$ étant la fonction spectrale de $P(\mu)$, c'est-à-dire : le noyau de $P(\mu)$

$$(P(\mu)f(x) = \int_V P(\mu,x,y) \, f(J) \, dy.$$

Démontrons (6) dans le cas particulier : a) $H$ est homogène et à coefficients constants, c'est-à-dire : $H = H(D) = \sum_{|\alpha| = N} c_\alpha D_\alpha$ où les $c_\alpha$ sont $\in \underset{\sim}{C}$.

b) $V = R^n$ .

Alors $P(\mu,x,y)$ ne dépend que de la différence $x - y$ :

$$P(\mu,x,y) = P(\mu,x-y,0) = P(\mu,x-y).$$

Donc (6) vient

(7) $$\sup_{\mu} \int_{\underset{\sim}{R}^n} | I^j P(\mu,x) | \, dx < \infty$$

En utilisant la transformation de Fourier on voit que

(8) $$P(\mu,x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{H(\xi)\leqslant\mu} e^{ix\xi} \, d\xi \quad ,$$

avec $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$, $x\xi = x_1\xi_1 + \dots + x_n\xi_n$ , et ensuite

(9) $$I^j P(\mu,x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \mu^{\frac{n}{N}} \int_{H(\xi)\leqslant\mu} (1 - H(\xi))^j e^{i\mu^{\frac{1}{N}} x\xi} \, d\xi$$

d'où

(10) $$| I^j P(\mu,x) | \leqslant C \mu^{\frac{n}{N}} \quad .$$

De même, en intégrant par parties dans (9), on déduit que, plus généralement,

$$(11) \qquad (\mu^{\frac{1}{N}}|x|)^r \, |I^j P(\mu,x)| \leqslant C\, \mu^{\frac{n}{N}}, \quad r \leqslant j,$$

ou, en combinant (11), $r = j$, avec (10), que

$$(12) \qquad |I^j P(\mu,x)| \leqslant C \, \frac{\mu^{\frac{n}{N}}}{1+(\mu^{\frac{1}{N}}|x|)^j},$$

d'où facilement (7). Nous avons démontré le résultat suivant.

PROPOSITION 1. <u>On considère le cas particulier où</u> a) <u>et</u> b) <u>ci-dessus ont lieu. Alors</u> A <u>est le g.i. d'un s.g.d.</u> G <u>de classe</u> $\mathcal{E}_0$.

Le cas général reste ouvert. Mais, évidemment, on l'a réduit ci-dessus à un problème pour la fonction spectrale : démontrer (6), dans le cas général. Dans la littérature on a beaucoup étudié le comportement asymptotique de la fonction spectrale (citons les noms : Carleman, Pleijel, Minakshisundaram, Levitan, Gårding, etc. ; cf. Bergendal [2] pour des indications bibliographiques) il s'agit là toujours d'évaluer ou la fonction spectrale elle-même, ou bien son intégrale sur la "diagonale" de $V \times V$. Voici donc un problème pour la fonction spectrale, d'une nature toute nouvelle.

Enfin remarquons (v. n° 1) que le s.g.d. engendré par A est lié à "l'équation de Schrödinger" $\frac{\partial u}{\partial t} = i\,Hu$. Reste donc ouverte encore la question analogue pour les autres équations d'évolution associées à H, par exemple "l'équation des ondes" $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -Hu$. (Le cas de l "l'équation de la chaleur" $\frac{\partial u}{\partial t} = -Hu$ bien entendu, est déjà résolu par la théorie de Hille-Yoshida).

## 7. SEMI-GROUPES DISTRIBUTIONS ET ESPACES D'INTERPOLATION.

Rappelons d'abord la définition de certains espaces d'interpolation, introduits par Gagliardo, Lions, etc... dans la forme qu'on en a donné dans [9].

Soient $X_0$ , $X_1$ des espaces de Banach tous deux contenus dans le même espace vectoriel topologique séparé $\mathfrak{X}$ , les injections correspondantes étant continues. On peut alors former $X_0 + X_1$ , leur somme, qui est encore un espace de Banach. Pour $a \in X_0 + X_1$, $s \in \underset{\sim}{R}_+$ posons :

(1) $$K(s,a) = \inf(\|a_0\|_{X_0} + s\|a_1\|_{X_1}) .$$

$$a = a_0 + a_1,\ a_i \in X_i (i = 0,\ 1)$$

Les espaces d'interpolation sont alors obtenus en posant des "conditions de croissance sur $K(s,a)$, de la forme

(2) $$\Phi\,[K(s,a)] < \infty ,$$

où $\Phi = \Phi\,[K]$ est une fonctionnelle convenable, par exemple, on peut prendre (c'est, essentiellement, le cas considéré dans Lions [6]) :

$$\Phi\,[K] = \Phi_{\theta,p}\,[K] = \begin{cases} \left(\int_0^\infty (s^{-\theta} K(s))^p \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty , \\ \sup\ s^{-\theta}\ K(s), & p = \infty \end{cases}$$

avec $1 \leq p \leq \infty$, $0 < \theta < 1$. L'espace correspondant à la fonction $\Phi$ sera désigné par $(X_0 , X_1)\ \Phi$ .

Prenons maintenant :

(3) $$X_0 = E, \quad X_1 = \mathcal{D}(A), \quad a = - G(\delta'_0),$$

$$G \text{ s.g.d. de classe } \mathcal{C}.$$

Alors on a les résultats suivants :

PROPOSITION 1.. <u>Soit</u> $\varphi \in \mathcal{D}_+$ , $\int_0^\infty \varphi(t)dt = 1$. <u>Alors on a les inégalités suivantes</u> :

(4) $$\| G(\varphi_s)a - a\| \leq C\, K(s,a), \quad s < 1 ,$$

<u>et</u>

(5) $$K(s,a) \leq \sup_{\sigma \leq s} \| G((x\varphi)_\sigma)a - a \| +$$

$$+ \| G(\varphi_s)a - a \| + C\, s\, \| a \| , \quad s < 1 ,$$

$C$ étant une constante qui dépend de $\varphi$ .

COROLLAIRE 1. <u>On a</u> $a \in (E, \mathcal{D}(A))\,\Phi$ <u>si et seulement si</u> $a \in E$ <u>et</u> $\Phi\,[\omega(s,\varphi)] < \infty$ , <u>avec</u>

$$\omega(s,\varphi) = \begin{cases} \sup_{\sigma \leq \delta} \| G(\varphi_\sigma)a - a \| , & s < 1 \\ 0 , & s \geq 1 \end{cases}$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}_+$

Le Cor. 1 généralise un résultat dû, essentiellement à Lions [6] dans le cas des s.g. usuels.

Finalement remarquons **le**, c'est un résultat dans le même ordre d'idées, qu'on peut "également étendre au cas des "g.d. de classe $\mathcal{D}_m$" l'inégalité de Bernstein ainsi qu'une autre inégalité classique de la théorie constructive des fonctions qu'on pourrait appeler l'inégalité de Jackson (cf. Achieser [1], Chapitre IV et V ; cf. également [10] pour la relation avec les espaces d'interpolation). Ceci dépend, bien entendu, d'une théorie analogue des g.d. qui n'est pas donnée ici.

---

N.B. - Une version plus complète du sujet traité dans cet exposé, avec tous les détails, sera publiée prochainement ailleurs.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N.I. ACHIESER, Vorlesungen über Approximationsthéorie. Deutsche Übersetzung Berlin, 1963.

[2] G. BERGENDAL, Convergence and summability of eigenfunction expansions connected with elliptic differential operators. Thesis, Lund, 1959. ( = Med. Lunds Univ. Mat. Sem. 15(1959), 1-63).

[3] C. FOIAS, Remarques sur les semi-groupes distributions d'opérateurs normaux. Portug. Mat. 19(1960), 227-242.

[4] E. HILLE et R.S. PHILLIPS, Functional analysis and semi-groups. Providence, R. I., 1957.

[5] J. L. LIONS , Les semi-groupes distributions. Portug. Mat. 19(1960); 141-164.

[6] ----------- , Théorèmes de traces et d'interpolation, I. Ann. Scuola Normale Sup. Pisa 13 (1959), 389-403.

[7] W. LITIMAN, The wave operator and $L_p$ norms. J; Math. Mech. 12 (1963), 55-68.

[8] S. LOJASIEWICZ , Sur la valeur et limite d'une distribution et un point. Studia Math. 16(1958), 1-36.

[9] J. PEETRE, Nouvelles propriétés d'espaces d'interpolation. C.R. Acad. Sci. Paris 256(1963), 1424-1426.

[10] ---------, Espaces intermédiaires et le théorème constructif des fonctions. C.R. Acad. Sci. Paris 256(1963), 54-55.

[11] D.V. WIDDER, The Laplace transform. 2nd ed., Princeton, N.J., 1946.

[12] K. YOSHINAGA, Ultra-distributions and semi-groups distributions. Bull. Kyushu Inst. Techn. 10(1963), 1-24.