Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

Jean Leray

Équations hyperboliques non-strictes : contre-exemples, du type de Giorgi, aux théorèmes d'existence et d'unicité

Séminaire Jean Leray, n° 2 (1964-1965), p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1964-1965___2_1_0>

ÉQUATIONS HYPERBOLIQUES NON-STRICTES :

CONTRE-EXEMPLES, DU TYPE DE GIORGI, AUX THÉORÈMES

D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ

par

Jean LERAY

Introduction

1. Considérons dans $\underline{\underline{R}}^{\ell}$ un problème de Cauchy, hyperbolique non strict, d'inconnue $u(x)$:

$$(1.1)\quad \begin{cases} a_1(x,D)\ \dots\ a_p(x,D)\ u(x) = b(x,D)\ u(x) + v(x) \\ D^{m-1}\ u|S_0 \ \text{ donné ;} \end{cases}$$

$D = \dfrac{\partial}{\partial x}$; $a_1, \dots, a_p$ sont p opérateurs strictement hyperboliques relativement à S_0. Notons

$$\text{ordre } (a_1\ \dots\ a_p) = m \text{ ; ordre } (b) \leqslant m - p + q\ , \quad \text{où} \quad 0 \leqslant q\ .$$

Supposons que S_0 est un hyperplan ; notons $\gamma^{n,(\alpha)}$ la classe des fonctions $\underline{\underline{R}}^{\ell} \to \underline{\underline{C}}$ dont les dérivées $f^{(n)}$ d'ordres $\leqslant n$ ont des restrictions aux hyperplans S_t parallèles à S_0 qui vérifient uniformément par rapport à t la condition d'appartenir à la classe α de Gevrey :

$$\sup_{\substack{x \in S_t \\ |\beta| \leqslant s}} |D^{\beta} f^{(n)}| \leqslant (\text{const.})^s (s!)^{\alpha}$$

où D^{β} est une dérivée, d'ordre $|\beta|$, sur S_t .

On sait ceci (pour l'énoncé précis voir [2], n°23,24) : si les données du problème de Cauchy (1.1) appartiennent à la classe $\gamma^{n,(\alpha)}$, alors <u>ce problème possède une solution unique</u> u <u>et</u> $u \in \gamma^{n,(\alpha)}$, quand on a :

$$n \geq m+p \ , \quad 1 \leq \alpha < \frac{p}{q} \ .$$

Si $1 \leq \alpha = \frac{p}{q}$, ces théorèmes d'existence et d'unicité valent sous certaines restrictions (existence locale, c'est-à-dire au voisinage de S_0 ; unicité sous l'hypothèse $u \in \gamma^{\frac{m+p}{2},(\alpha)}$).

Un exemple <u>de Giorgi</u> montre que ces théorèmes deviennent faux quand on supprime l'hypothèse $\alpha \leq \frac{p}{q}$; plus précisément, de Giorgi montre que cette hypothèse est nécessaire dans le cas $m = p = 8$, $q = 4$.

Nous allons construire, par procédé simplifiant(1) celui qu'emploie de Giorgi, des contre-exemples prouvant que, quels que soient(2) $m \geq p \geq 1$ et $q \geq 1$, <u>l'hypothèse</u> $\alpha \leq \frac{p}{q}$ <u>est nécessaire à la validité des théorèmes d'existence et d'unicité</u>(3) qu'énonce [2] (n° 23,24, 25 et 26).

Cependant, si l'on impose à $a_1, \dots, a_p, b$ d'être <u>réels</u>, nous ne prouvons la nécessité de cette hypothèse $\alpha \leq \frac{p}{q}$ que dans le cas où q est <u>pair</u>.

---

(1) Là où nos § 2 et § 3 emploient 5 bandes, de Giorgi en emploie 7.

(2) Aucune hypothèse n'est faite sur p/q .

(3) et aussi à la validité de théorèmes de G. Talenti [3] apparentés à ceux-ci.

§ 1. Préliminaires

2. RÉDUCTION AU CAS : $\ell = 2$, $m = p$.- Le théorème d'existence implique le théorème d'unicité, d'après Holmgren : voir [2], n°24. Il suffit donc de construire un contre-exemple au théorème d'unicité. Nous choisissons ce contre-exemple fonction de deux des variables indépendantes, ce qui nous ramène au cas où $\underline{\underline{R}}^{\ell} = \underline{\underline{R}}^2$.

Supposons que l'équation, à coefficients indéfiniment différentiables,

$$\frac{\partial^p u}{\partial t^p} = b(t,x, \frac{\partial}{\partial x})u \qquad (\text{ordre } (b) \leqslant q) \tag{2.1}$$

possède une solution, indéfiniment différentiable, contredisant le théorème d'unicité, c'est-à-dire s'annulant p fois avec t ; on voit que toutes ses dérivées s'annulent avec t. Par suite u est un contre-exemple au théorème d'unicité pour l'équation

$$\prod_{k=1}^{m-p} \left(\frac{\partial}{\partial t} - k\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial^p u}{\partial t^p} = \prod_{k=1}^{m-p} \left(\frac{\partial}{\partial t} - k\frac{\partial}{\partial x}\right) b\, u$$

qui est du type (1.1), avec

$$a_1 = \prod_{k=0}^{m-p} \left(\frac{\partial}{\partial t} - k\frac{\partial}{\partial x}\right) , \quad a_j = \frac{\partial}{\partial t} \; (1 < j \leqslant p) .$$

Pour traiter le cas (m, p, q) quelconque, il nous suffit donc de construire, pour tout (p, q, α) tel que $\frac{p}{q} < \alpha$, un contre-exemple au théorème d'unicité concernant une équation du type (2.1) ; pour ce type d'équation, $m = p$.

3. QUASI-NORMES FORMELLES.- Nous notons (t,x) les coordonnées de $\underline{\underline{R}}^2$ et S_t la droite d'abscisse t. Etant donnée une fonction $u(t,x)$, définie sur une bande $T_0 \leqslant t \leqslant T_1$, nous définissons sa quasi-norme

$$|u,S_t| = \sup_x |u(t,x)|$$

et sa quasi-norme formelle

$$(3.1) \qquad |D^{h,\infty}u,S_t,\rho| = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\rho^s}{s!} \sup_j \left| \frac{\partial^{j+s}u}{\partial t^j \partial x^s}, S_t \right|, \quad \text{où} \quad 0 \leqslant j \leqslant h ,$$

c'est une série formelle en ρ, qui peut être une fonction de ρ holomorphe à l'origine.

Soit une série formelle

$$\Phi(\rho) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\rho^s}{s!} \Phi_s \ ;$$

$$\Phi(\rho) \gg 0 \quad \text{signifie} \quad \Phi_s \geqslant 0 , \quad \forall s \ ;$$

on dit que $\Phi \in \Gamma^{(\alpha)}$ (<u>classe de Gevrey formelle</u>) quand il existe une constante c, dépendant de Φ, telle que

$$(3.2) \qquad \Phi_s \leqslant c^s (s!)^{\alpha} \ ;$$

on dit que $u \in \gamma^{h,(\alpha)}$ (<u>classe de Gevrey</u>) quand il existe une série formelle $\Phi(\rho)$, indépendante de t, telle que

$$(3.3) \qquad |D^{h,\infty}u,\ S_t, \rho| \leqslant \Phi(\rho) \in \Gamma^{(\alpha)} \ .$$

Etant donné un opérateur différentiel

$$b(t,x,\frac{\partial}{\partial x}) = \sum_{j=0}^{q} b_j(t,x)(\frac{\partial}{\partial x})^q ,$$

nous notons

$$\left| D^{h,\infty} b, S_t, \rho \right| = \sum_{j=0}^{q} \left| D^{h,\infty} b_j, S_t, \rho \right| ;$$

nous disons que $b \in \gamma^{h,(\alpha)}$ quand $b_j \in \gamma^{h,(\alpha)}$, $\forall j$.

4. LE CONTRE-EXEMPLE A CONSTRUIRE est, d'après le n°2, le suivant : Etant donnés (p, q, α) tels que

$$p \geqslant 1, \quad q \geqslant 1 , \quad \frac{p}{q} < \alpha ,$$

construire, sur une bande $0 \leqslant t \leqslant T$ de $\underline{\underline{R}}^2$, une équation linéaire homogène

$$\frac{\partial^p u}{\partial t^p} = b(t,x, \frac{\partial}{\partial x})u \qquad (\text{ordre } b \leqslant q) \tag{4.1}$$

possèdent une solution $u(t,x) \neq 0$, telles que

$$\frac{\partial^h u}{\partial t^h}(0,x) = 0 , \quad \forall h ; \tag{4.2}$$

$$u \in \gamma^{h,(\alpha)} , \quad b \in \gamma^{h,(\alpha)} , \quad \forall h . \tag{4.3}$$

Note.- u et b sont indépendants de h.

De Giorgi construit un tel contre-exemple en résolvant d'abord le problème non homogène que voici.

5. ÉNONCÉ D'UN PROBLÈME NON HOMOGÈNE.- Nous nous donnons (p,q,α), tels que

$$p \geq 1 \ , \quad q \geq 1 \ , \quad \frac{p}{q} < \alpha \ ,$$

un nombre ℓ_1 et un paramètre $\ell \leq \ell_1$; nous cherchons sur la bande

$$0 \leqslant t \leqslant 1$$

de $\underline{\underline{R}}^2$ une équation linéaire homogène

$$(5.1) \qquad \frac{\partial^p u}{\partial t^p} = b(t, x, \frac{\partial}{\partial x})u \qquad (\text{ordre } (b) \leqslant q \ ; \ b \text{ dépend de } \ell\ )$$

et une solution u de cette équation telles que :

$$(5.2) \quad \begin{cases} u(t,x) = e^{\ell} \ , \ b = 0 \quad \text{pour } t \text{ voisin de } 0 \ , \\ u(t,x) = e^{\ell'(\ell)} , \quad b = 0 \quad \text{pour } t \text{ voisin de } 1 \ . \end{cases}$$

$$(5.3) \quad \begin{cases} \left| D^{h,\infty} u, \ S_t, \ \rho \right| \ll \Theta(\ell)\ \Phi(\rho) \ , \quad \forall h \ , \\ \left| D^{h,\infty} b, \ S_t, \ \rho \right| \ll \Theta(\ell)\ \Phi(\rho) \ , \quad \forall h \ , \end{cases}$$

où : ℓ', Θ, Φ dépendent de h ; Φ ne dépend pas de ℓ ; $\Phi \in \Gamma^{(\alpha)}$; ℓ' et Θ sont des fonctions de ℓ , ayant les propriétés suivantes :

$$\ell'(\ell) < \ell \quad ;$$

si nous définissons les suites $\ell_1, \ell_2, \ldots, \Theta_1, \Theta_2 \ldots$ par la loi de récurrence :

$$\ell_{k+1} = \ell'(\ell_k) \ , \qquad \Theta_k = \Theta(\ell_k)$$

alors

(5.4) $$\lim_{k \to \infty} k^c \Theta_k = 0 \quad \text{pour toute constante } c .$$

6. CONSTRUCTION(1) DU CONTRE-EXEMPLE $u(t,x)$ AYANT LES PROPRIÉTÉS QU'EXIGE LE n°4.- Supposons résolu le problème non homogène qu'énonce le n°5 ; sa solution, pour $\ell = \ell_k$, sera notée $b_k(t,x,\frac{\partial}{\partial x})$, $u_k(t,x)$.

Définissons $T_1, T_2, \ldots$ par la loi de récurrence :

$$T_1 = 0, \quad T_{k+1} - T_k = \frac{1}{k^2} \; ;$$

soit

$$T = \lim_{k \to \infty} T_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty \; .$$

Définissons

$$b(x,t,\frac{\partial}{\partial x}) = k^{2p}\, b_k(\frac{t - T_k}{T_{k+1} - T_k}, x, \frac{\partial}{\partial x})$$

$$u(x,t) = u_k(\frac{t - T_k}{T_{k+1} - T_k}, x) \quad \text{pour} \quad T_k \leqslant t \leqslant T_{k+1} \; .$$

Vu (5.2), b et u sont indéfiniment dérivables sur la bande $0 \leqslant t < T$; vu (5.1), sur cette bande, (4.1) est vérifiée.

Vu (5.3) :

$$|D^{h,\infty} u, S_t, \rho| \ll k^{2h} \theta_k \Phi(\rho)$$

$$|D^{h,\infty} b, S_t, \rho| \ll k^{2(h+p)} \theta_k \Phi(\rho), \quad \text{où} \quad \Phi \in \Gamma^{(\alpha)}$$

D'où, vu (5.4) :

$$|D^{h,\infty} u, S_t, \rho| \ll O(t)\, \Phi(\rho) ,$$

$$|D^{h,\infty} b, S_t, \rho| \ll O(t)\, \Phi(\rho) ,$$

où $\lim_{t \to T} O(t) = 0$; bien entendu, $O(t)$ dépend de h.

---

(1) Je remercie K. Jörgens d'avoir rectifié cette partie de mon exposé.

Donc $u \in \gamma^{h,(\alpha)}$, $b \in \gamma^{h,(\alpha)}$, $\forall h$; toutes les dérivées de u et des coefficients de b s'annulent pour $t = T$.

Nous avons construit le contre-exemple qu'exige le n°4, à la permutation près de 0 et T.

7. CONCLUSION DU § 1.- Ce qu'affirme l'introduction, à savoir <u>la nécessité de l'hypothèse</u> $\alpha \leqslant p/q$ <u>dans les théorèmes d'existence et d'unicité concernant l'équation hyperbolique non stricte, sera donc prouvé quand nous aurons résolu le problème non homogène</u>, qu'énonce le n°5.

§ 2. <u>Résolution du problème non homogène</u> (n°5)

Il faut évidemment supposer u et b fonctions de x ; il suffira de prendre u linéaire en $e^{i\omega x}$, où $\omega = \omega(\ell)$. Le terme de u indépendant de x est une fonction de t qui sera constante près des bords de la bande ; le coefficient de $e^{i\omega x}$ aura pour coefficient, dans u, une fonction de t qui sera constante au centre de la bande. Cette bande ne sera pas la bande $0 \leqslant t \leqslant 1$, comme l'annonce le n°5, mais la bande

$$0 \leqslant t \leqslant 5 .$$

<u>Notation</u>. c désignera divers nombres, fonctions de (h, p, q), mais indépendants de ℓ.

8. INTRODUCTION DU TERME EN $e^{i\omega x}$ DANS u.-

<u>Lemme</u> 1.- Donnons-nous des nombres

$$m < \ell \quad , \quad \omega > 1 .$$

On peut construire sur la bande

$$0 \leqslant t \leqslant 1$$

une équation du type (5.1) admettant une solution u, telle que

$$u(t,x) = e^{\ell}\ , \ b = 0 \quad \text{pour} \quad t \quad \text{voisin de} \quad 0\ ;$$

$$u(t,x) = e^{\ell} + e^{m+i\omega x}, \quad b = 0 \quad \text{pour} \quad t \quad \text{voisin de} \quad 1\ ;$$

$$\left| D^{h,\infty} u,\ S_t,\ \rho \right| \ll c\ e^{\ell + \omega\rho}\ ;$$

$$\left| D^{h,\infty} b,\ S_t,\ \rho \right| \ll c\ e^{m-\ell+\omega\rho}\ .$$

<u>Notation</u>.- $f(t)$ désignera une fonction fixe, indéfiniment dérivable, telle que

$$f(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t \quad \text{voisin de} \quad 0, \quad f(t) = 1 \quad \text{pour} \quad t \quad \text{voisin de} \quad 1.$$

<u>Preuve</u>.- La fonction u et l'opérateur b que voici vérifient (5.1) :

$$u = e^{\ell} + e^{m+i\omega x} f(t)$$

$$b = e^{m-\ell+i\omega x}\ \frac{d^p f(t)}{dt^p}\ \left(\frac{i}{\omega}\frac{\partial}{\partial x} + 1\right)$$

9. AUGMENTATION DU COEFFICIENT DE $e^{i\omega x}$ DANS u .-

<u>Lemme</u> 2.- Donnons-nous des nombres

$$m < \ell < n\ , \quad \omega \ \text{tels que} \quad n - m > 1, \quad \omega > 1\ .$$

On peut construire sur la bande

$$0 \leqslant t \leqslant 2$$

une équation du type (5.1) admettant une solution u, telle que

$$u(t,x) = e^{\ell}\ , \ b = 0 \quad \text{pour} \quad t \quad \text{voisin de} \quad 0\ ;$$

$$u(t,x) = e^{\ell} + e^{n+i\omega x}, \quad b = 0 \quad \text{pour} \quad t \quad \text{voisin de} \quad 2\ ;$$

$$\left| D^{h,\infty} u,\ S_t,\ \rho \right| \ll c(n-m)^h\, e^{n+\omega\rho}$$

$$\left| D^{h,\infty} b,\ S_t\ ,\ \rho \right| \ll c\ e^{m-\ell+\omega\rho} + c\,\frac{(n-m)^p}{\omega q}$$

Preuve.- Définissons a et u par le lemme 1 pour $0 \leqslant t \leqslant 1$. Pour $1 \leqslant t \leqslant 2$, la fonction u et l'opérateur b que voici vérifient (5.1) :

$$u = e^{\ell} + e^{nf+m(1-f)+i\omega x} \quad \text{où} \quad f = f(t-1)\ ;$$

$$b = e^{-nf-m(1-f)}\ \frac{d^p e^{nf+m(1-f)}}{dt^p}\ \frac{1}{(i\,\omega)^q}\ \frac{\partial^q}{\partial x^q}\ .$$

Or

$$e^{-nf-m(1-f)}\ \frac{d^p\ e^{nf+m(1-f)}}{dt^p}$$

est un polynome en $n-m$ de degré p, dont les coefficients sont des fonctions fixes de t.

10. MODIFICATION DU TERME DE u INDÉPENDANT DE x.-

Lemme 3.- Donnons-nous des nombres

$$m < \ell' < \ell < n\ , \quad \omega \text{ tels que } n-m > 1\ ,\ \omega > 1.$$

On peut construire sur la bande

$$0 \leqslant t \leqslant 3$$

une équation du type (5.1) admettant une solution u, telles que

$$u(t,x) = e^{\ell}\ ,\quad b = 0 \quad \text{pour } t \text{ voisin de } 0\ ;$$

$$u(t,x) = e^{\ell'} + e^{n+i\omega x}\ ,\quad b = 0 \quad \text{pour } t \text{ voisin de } 3\ ;$$

$$\left| D^{h,\infty} u,\ S_t\ ,\ \rho \right| \ll c(n-m)^h\, e^{n+\omega\rho}$$

$$\left| D^{h,\infty} b,\ S_t\ ,\ \rho \right| \ll c(n-m)^{h+p}\, e^{\ell-n+\omega\rho} + c\ e^{m-\ell+\omega\rho} + c\,\frac{(n-m)^p}{\omega^q}$$

Preuve.- Définissons a et u par le lemme 2 pour $0 \leqslant t \leqslant 2$. Pour $2 \leqslant t \leqslant 3$, la fonction u et l'opérateur b que voici vérifient (5.1) :

$$u = e^{\ell(1-f)+\ell' f} + e^{n+i\omega x}, \quad \text{où} \quad f = f(t-2) ;$$

$$b = e^{-n-i\omega x} \frac{d^p e^{\ell(1-f)+\ell' f}}{dt^p} \frac{1}{i\omega} \frac{\partial}{\partial x}$$

11. FIN DE LA CONSTRUCTION DE b ET u.- Pour $0 \leqslant t \leqslant 3$, définissons b et u par le lemme 3 ; pour $3 \leqslant t \leqslant 5$, définissons b et u par le lemme 2, où l'on remplace

$$0 \leqslant t \leqslant 2 \quad \text{par} \quad 5 \geqslant t \geqslant 3$$
$$m < \ell < n \quad \text{par} \quad m < \ell' < n .$$

Il vient :

Lemme 4.- Donnons-nous des nombres

(11.1) $\qquad m < \ell' < \ell < n$, ω tels que $n-m > 1$ et $\omega > 1$.

On peut construire sur la bande

$$0 \leqslant t \leqslant 5$$

une équation du type (5.1) admettant une solution u, telle que

$$(11.2) \quad \begin{cases} u(t,x) = e^{\ell}, \; b = 0 \text{ pour } t \text{ voisin de } 0 ; \\ u(t,x) = e^{\ell'}, \; b = 0 \text{ pour } t \text{ voisin de } 5 ; \end{cases}$$

$$(11.3) \quad \begin{cases} \left| D^{h,\infty} u, S_t, \rho \right| \ll c(n-m)^h e^{n+\omega\rho} ; \\ \left| D^{h,\infty} b, S_t, \rho \right| \ll c(n-m)^{h+p} e^{\ell-n+\omega\rho} + c\, e^{m-\ell'+\omega\rho} + c \frac{(n-m)^p}{\omega^q} . \end{cases}$$

12. CHOIX DE ℓ', m, n, ω EN FONCTION DE ℓ.- Soient un paramètre $L > 1/4$ et un nombre fixe $\alpha \geq 1$.

Choisissons, en accord avec (11.1) :

$m = -8L$, $\ell' = -6L$, $\ell = -4L$, $n = -2L$, $\omega = L^{\alpha}$;

définissons

(12.1) $$\Theta = |\ell|^{p-\alpha q}$$

Puisque $\sup_L L^c e^{-L} < \infty$, (11.3) donne

(12.2) $$\begin{cases} |D^{h,\infty} u, S_t, \rho| \ll c\,\Theta\, e^{-L+L^{\alpha}\rho} \\ |D^{h,\infty} b, S_t, \rho| \ll c\,\Theta\, [e^{-L+L^{\alpha}\rho} + 1] . \end{cases}$$

Le n° 13 va prouver le lemme suivant :

Lemme 5.- Il existe une série formelle $\Phi(\rho) \in \Gamma^{(\alpha)}$, indépendante de L, telle que

$$e^{-L+L^{\alpha}\rho} \ll \Phi(\rho), \qquad \forall L \geq 0 .$$

Donc (12.2) implique (5.3) : le problème non homogène qu'énonce le n°5 est résolu, quand (5.4) a lieu. Or :

$$\ell'(\ell) = \frac{3}{2}\ell \quad ;$$

d'où, en choisissant $\ell_1 = -\frac{3}{2}$, vu (12.1) :

$$\ell_k = -\left(\frac{3}{2}\right)^k \quad ; \quad \Theta_k = \left(\frac{2}{3}\right)^{(\alpha q-p)k} \quad ;$$

d'où (5.4), si, comme le suppose le n°5 :

$$\alpha > \frac{p}{q} \quad .$$

Le problème non homogène (n°5) a donc une solution ; vu le n°7, ce qu'affirme l'introduction est prouvé ; mais b a été choisi <u>non réel</u>.

13. PREUVE DU LEMME 5.- On a

$$(13.1) \qquad e^{-L+L^{\alpha}\rho} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\rho^s}{s!} L^{\alpha s} e^{-L} .$$

Or

$$(13.2) \qquad \sup_{L>0} (L^{\beta} e^{-L}) = \left(\frac{\beta}{e}\right)^{\beta}, \quad \text{si} \quad \beta \geq 0 ,$$

car ce sup est atteint pour $L = \beta$.

Rappelons(1) que

$$\left(\frac{s}{e}\right)^s < s!$$

de (13.2) résulte donc

$$\sup_{L>0} (L^{\alpha s} e^{-L}) = \left(\frac{\alpha s}{e}\right)^{\alpha s} \leqslant \alpha^{\alpha s} (s!)^{\alpha} .$$

En portant cette inégalité dans (13.1), nous obtenons

$$e^{-L+L^{\alpha}\rho} \ll \sum_{s=0}^{\infty} (\alpha^{\alpha}\rho)^s (s!)^{\alpha-1} \in \Gamma(\alpha) .$$

Voici prouvé le lemme 5.

---

(1) L'inégalité $1 + x \leqslant e^x$ donne $\left(\frac{1+k}{k}\right)^k < e$; d'où

$$\prod_{k=1}^{s} \frac{(1+k)^k}{k^k} < e^s , \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{(1+s)^s}{s!} < e^s .$$

14. CONCLUSION DU § 2.- Ce qu'affirme l'introduction, à savoir la nécessité de l'hypothèse $\alpha \leqslant p/q$ dans les théorèmes d'existence et d'unicité concernant l'équation hyperbolique non-stricte, est donc prouvé.

Mais b a été choisi non réel.

§ 3. Choix d'un b réel.

Si q est pair, on peut faire pour u et b un autre choix, réel, pour lequel subsistent les majorations des quasi-normes formelles employées ci-dessus et par suite les conclusions prouvées.

Indiquons rapidement ce choix.

15. MODIFICATIONS A APPORTER AU LEMME 1.- Modification à son énoncé.

$$u(t,x) = e^{\ell} + e^{m} \sin(\omega x), \quad b = 0 \quad \text{pour } t \text{ voisin de } 1.$$

Modification à sa preuve.-

$$u = e^{\ell} + e^{m} f(t) \sin(\omega x)$$

$$b = e^{m-\ell} \frac{d^p f}{dt^p} \sin(\omega x) \left[\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 1\right]$$

16. MODIFICATION AU LEMME 2.-

$$u(t,x) = e^{\ell} + e^{n} \sin(\omega x), \quad b = 0 \quad \text{pour } t \text{ voisin de } 2.$$

Modification à sa preuve.-

$$u = e^{\ell} + e^{nf+m(1-f)} \sin(\omega x)$$

$$b = e^{-nf-m(1-f)} \frac{d^p e^{nf+m(1-f)}}{dt^p} \frac{1}{(i\omega)^q} \frac{\partial^q}{\partial x^q} ,$$

en supposant q pair.

17. MODIFICATION AU LEMME 3.

$u(t,x) = e^{\ell'} + e^{n} \sin(\omega x)$, $b = 0$ pour t voisin de 3.

Modification à sa preuve.-

$$u = e^{\ell(1-f) + \ell' f} + e^{n} \sin(\omega x)$$

$$b = e^{-n} \frac{d^p e^{\ell(1-f)+\ell' f}}{dt^p} \left[\frac{1}{\omega} \cos(\omega x) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{\omega^2} \sin(\omega x) \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] de GIORGI, Un esempio di non-unicità della soluzione del problema di Cauchy, Università di Roma, Rendiconti di Matematica, t.14 (1955) p.382-387.

[2] J. LERAY et Y. OHYA, Systèmes linéaires, hyperboliques non-stricts, Colloque C.B.M., Louvain (1964).

[3] G. TALENTI, Sur le problème de Cauchy pour les équations aux dérivées partielles, C. R. Acad. Sciences, t.259 (1964), p.1932-1933.