Marston Morse

Les bols des fonctions non-dégénérées d'une variété différentielle

Séminaire Jean Leray, n° 2 (1964-1965), p. 89-100
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1964-1965___2_89_0>

LES BOLS DES FONCTIONS NON-DÉGÉNÉRÉES D'UNE VARIÉTÉ DIFFÉRENTIELLE

par

Marston MORSE

Soit Σ_n une variété orientable, compacte, connexe, de dimension n, et f une fonction non-dégénérée sur Σ_n. Cette notion de fonction non-dégénérée s'est montrée d'une grande utilité en topologie différentielle et notamment dans les travaux de Thom, Smale, Milnor, Bott, etc. Dans cet exposé, j'associerai à chaque point critique d'indice k, $0 < k < n$, un k-bol descendant et un $(n-k)$-bol ascendant d'une façon que je préciserai. Les traces de ces bols sur les surfaces de niveau de f et les intersections mutuelles de ces bols joueront un rôle important. Je pense qu'une étude complète de ces bols, de leurs traces et de leurs intersections peut éclaircir considérablement la question de la classification des variétés Σ_n. En particulier, j'ai utilisé ces bols pour étudier les variétés de dimension 3 et la conjecture de Poincaré en dimension 3.

Nous supposons que les variétés et les applications sont de classe C^∞.

Le premier théorème à rappeler est qu'il existe sur toute variété Σ_n, une fonction non-dégénérée (N.D.) qui a un seul point critique d'indice 0 et un seul point critique d'indice n. C'est ce que j'ai appelé une fonction "polar non-degenerate". Dans la suite toutes les fonctions N.D. seront de ce type.

Sphères topologiques. Si f a seulement deux points critiques sur Σ_n, on sait (depuis de nombreuses années) que Σ_n est homéomorphe à la sphère S^n. Mais un exemple de Milnor montre que pour n assez grand, Σ_n

n'est pas nécessairement difféomorphe à S^n. Le problème de Poincaré pour $n = 3$, est de montrer (si cela est possible) l'existence d'une fonction N.D. avec seulement deux points critiques sur toute variété Σ_3 simplement connexe, de dimension 3.

Sphères d'homologie. On peut donner en termes de fonctions N.D. une condition nécessaire et suffisante pour que Σ_n soit une n-sphère d'homologie, en procédant de la manière suivante.

Notations. A toute valeur $c \in \underline{\underline{R}}$, associons les sous-ensembles de Σ_n

(1) $$f_c = \{u \mid f(u) \leqslant c\} \qquad (u \in \Sigma_n)$$

(2) $$f^c = \{u \mid f(u) = c\} .$$

Si c'est une valeur régulière de f, f^c est une variété de niveau non-singulière de f.

Nous supposons que des points critiques différents donnent lieu à des valeurs critiques distinctes. Soit q un point critique d'indice k, de valeur critique c , on dit que q est de type croissant relativement à f_c si :

Cas I $$\Delta R_k(f_c) = 1$$

(accroissement du kième nombre de Betti de f_x lorsque x franchit en croissant la valeur singulière c).

On dit que q est de type décroissant relativement à f_c si :

Cas II $$\Delta R_{k-1}(f_c) = 1 \qquad (k > 0)$$

Le cas I et le cas II sont complémentaires.

De même, on dit que q est un point critique :

de <u>type croissant</u> relativement à f^c si

cas A $\qquad \Delta R_k(f^c) > 0 \qquad (k < n)$

de <u>type neutre</u> relativement à f^c si

cas B $\qquad \Delta R_k(f^c) = 0 \qquad (k < n)$

et de <u>type décroissant</u> si

cas C $\qquad \Delta R_k(f^c) < 0$

Bien entendu, ces trois cas se complètent.

On a le :

THÉORÈME 1. <u>Une condition nécessaire et suffisante pour que Σ_n soit une sphère d'homologie est que, pour toute fonction N.D. sur Σ_n à valeurs critiques distinctes, tout point critique q d'indice $k < n$ soit du même type (croissant ou décroissant) relativement à f_c et relativement à f^c.</u>

(Le cas B est donc exclu, si Σ_n est une sphère d'homologie).

<u>Définition des bols</u>. Soit q un point critique de f, d'indice k, soit W_q une boule ouverte de l'espace euclidien E_n et soit $H_q : W_q \to \Sigma_n$ une carte locale, qui applique W_q sur un voisinage X_q du point q. Supposons que $f(q) = 0$, on peut alors choisir cette carte locale de telle façon que

$$f(H_q(x)) = - x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2 \qquad (x \quad W_q) \tag{4}$$

On peut encore simplifier cette représentation de f au voisinage des points critiques. Pour cela, on munit Σ_n d'une structure Riemannienne et on choisit une carte H_q telle qu'on ait la formule (4) et que H_q soit une isométrie de W_q muni de sa structure canonique, sur X_q muni de la structure induite par Σ_n. Cette isométrie est de la plus grande importance d'une part pour définir les bols, d'autre part pour étendre les difféomorphismes définis en appliquant les variétés de niveau sur les variétés de niveau et leurs trajectoires orthogonales sur les trajectoires orthogonales.

f-<u>arcs</u>. On appelle f-<u>arcs</u> les trajectoires orthogonales des variétés de niveau de f. Nous ne prolongeons pas ces arcs aux points critiques : ce sont alors des arcs ouverts.

<u>Bols descendants</u>. A tout point critique z de f, d'indice $k > 0$ nous associerons un bol descendant $B_-(z,k)$ qui est la réunion de z et des f-arcs ouverts pour lesquels z est un point-limite supérieur.

<u>Bols ascendants</u>. A tout point critique z de f, d'indice $k < n$ nous associerons un bol ascendant $B_+(z,n-k)$ qui est la réunion de z et des f-arcs ouverts pour lesquels z est un point-limite inférieur.

A cause des conditions d'isométrie les bols sont des variétés différentiables sans singularité, même au pôle z.

<u>Exemple</u> : <u>Bols sur</u> 1 <u>tore</u>. Considérons le tore T^2 dans E^3. Supposons l'axe du tore horizontal et prenons pour f la cote au-dessus du point le plus bas du tore. Prenons pour structure Riemannienne, celle qui est induite par celle de E_3. Il y a 4 points critiques q_0, q_1, q_2, q_3 avec

$$f(q_0) < f(q_1) < f(q_2) < f(q_3) .$$

Le 2-bol descendant de q_3 est l'ensemble $T^2 - C_1 - C_2$, où C_1 est le cercle méridien intérieur qui passe par q_1 et q_2 et C_2 est le cercle générateur passant par q_0 et q_1.

Le 0-bol ascendant de q_0 est l'ensemble $T^2 - C_1 - C_3$, où C_3 est le cercle générateur passant par q_2 et q_3.

Le 1-bol descendant de q_2 est $C_1 - q_1$ et le 1-bol ascendant de q_1 est $C_1 - q_2$.

J'ai montré qu'un k-bol descendant est une boule différentiable ouverte de dimension k, et qu'un $(n-k)$-bol ascendant est une $(n-k)$-boule différentiable ouverte.

Traces. L'intersection d'un bol avec une variété de niveau f^c est une variété différentiable appelée trace du bol.

Deux bols ascendants ne se rencontrent pas. Deux bols descendants ne se rencontrent pas.

Excepté le cas d'un bol ascendant $B_+(z,n-k)$ et d'un bol descendant $B_-(z,k)$ de même pôle z, l'intersection de deux bols est un ensemble de f-arcs éventuellement vide.

La valeur de f au point u sera appelée la hauteur de u. On dira que u est au-dessus de v si la hauteur de u est supérieure à celle de v.

Soit un bol descendant de pôle z, et soit

$$f(z) = c_0 > c_1 > \dots > c_m$$

les valeurs de f aux points critiques adhérents au bol $B_-(z,k)$ rangées par ordre décroissant. L'ouvert de B_- formé des points qui sont au-dessus de c_1, est appelé la calotte descendante $D_-(z,k)$.

On définit de même les calottes ascendantes.

Dans ce qui suit, nous allons considérer un point critique w d'indice k, et un point critique z d'indice $k-1$ avec z en dessous de w, et nous allons donner des conditions suffisantes pour qu'on puisse construire une nouvelle fonction f dont les points critiques soient ceux de f, exception faite de w et de z. En fait la nouvelle fonction sera égale à f en dehors d'un ouvert R de Σ_n contenant les seuls points critiques w et z. Nous n'avons pas à nous occuper de $k = 1$ ou n, puisque la fonction f est "polar N.D.". Nous supposerons donc $1 < k < n$.

On a alors le théorème principal suivant :

THÉORÈME 2. <u>Si la</u> k-<u>calotte</u> D_- <u>qui descend de</u> w, <u>et la</u> $n-(k-1)$-<u>calotte qui monte de</u> z <u>se coupent transversalement le long d'un</u> f-<u>arc unique, alors on peut modifier</u> f <u>dans un voisinage donné à l'avance de</u> $\overline{D_+}$ <u>de façon à faire disparaître les points critiques</u> z <u>et</u> w.

Si c est une valeur comprise entre $f(z)$ et $f(w)$, la trace de D_- sur f^c est une $(k-1)$-sphère différentiable. L'hypothèse du théorème est que ces deux traces se coupent transversalement et en un point unique. Que cette condition soit satisfaite ou non, on peut par une modification convenable de la structure Riemannienne de Σ_n se ramener au cas où les deux calottes se coupent transversalement, le long d'un nombre <u>fini</u> de f-arcs.

Voici deux modèles topologiques d'intersections de calottes. Il s'agit de points critiques de Σ_z, w et z, d'indices $k=2$ et $k-1 = 1$.

La calotte ascendante de z est de dimension $n-(k-1) = 2$. Il en est de même de la calotte descendante de w.

Un premier théorème sur Σ_n , qu'on démontre à l'aide de ces calottes, concerne les modifications des valeurs critiques qui laissent inchangés les points critiques et leur indice.

THÉORÈME 3. Soit z un point critique et D une calotte associée, montante ou descendante. On peut modifier f dans un voisinage donné de D de façon que $f(z)$ prenne une valeur choisie arbitrairement dans $f(D)$.

L'utilisation de ce procédé permet d'avoir des valeurs critiques qui soient rangées dans l'ordre des indices croissants des points critiques. En particulier on pourra donner la même valeur critique aux points critiques de même indice.

Des formes affaiblies de ce théorème étaient déjà connues. La théorie des bols permet cet énoncé précis et sa démonstration.

Notre principale application concerne les sphères d'homologie de dimension 3. Nous avons, pour cela, besoin d'une définition :

Tore plein de genre p (ou tore à p-trous). Le modèle H_p des tores pleins de genre p est par définition obtenue en perçant p trous verticaux dans une planche pleine de dimension 3, et en arrondissant les coins et les arêtes. On appelle tore plein de genre p , toute variété à bord T_p difféomorphe au modèle H_p.

Le bord d'un tore à p trous est une variété compacte orientable S_p de genre p ; mais il est faux que toute variété de ce type, plongée dans E^3 soit le bord d'un tore à p trous T_p. Le théorème suivant est connu pour le cas combinatoire ; je l'ai vérifié dans le cas différentiable.

THÉORÈME 4. <u>Soit</u> S_p <u>une surface compacte orientable, de genre</u> p <u>dans</u> E_3, <u>qui soit le bord d'un sous-espace</u> K <u>de</u> E_3. <u>Une condition nécessaire et suffisante pour que</u> K <u>soit un tore à</u> p <u>trous</u> T_p <u>est que</u> $\pi_1(K)$ <u>soit un groupe libre à</u> p <u>générateurs</u>.

Le théorème général d'existence que nous avons donné, entraîne pour les sphères d'homologie de dimension 3, Σ_3 :

THÉORÈME 5. <u>Soit</u> Σ_3 <u>une sphère d'homologie de dimension</u> 3, <u>alors pour</u> p <u>assez grand, il existe une fonction</u> f "<u>polar N.D.</u>" <u>sur</u> Σ_3 <u>avec</u>

<u>un maximum égal à</u> 4

<u>un minimum égal à</u> 0

p <u>points critiques</u> $w_1, \dots, w_p$ <u>d'indice</u> 2, <u>de valeur critique</u> 3

p <u>points critiques</u> $z_1, \dots, z_p$ <u>de valeur critique</u> 1 .

Du théorème 5, on peut déduire le théorème suivant, (où $\mathring{T}_p$ désigne l'intérieur de T_p).

THÉORÈME 6. <u>La surface de niveau de</u> Σ_3 <u>de cote</u> 2 <u>est une surface</u> S_p <u>de genre</u> p <u>et</u>

$$\Sigma_3 = \mathring{T}_p^- \cup S_p \cup \mathring{T}_p^+$$

<u>où</u> T_p^- (resp. T_p^+) <u>est un tore plein à</u> p <u>trous, situé en dessous</u> (resp. <u>au-dessus) de</u> S_p .

Il faut faire attention que les deux difféomorphismes de T_p^- et T_p^+ sur le modèle H_p dont le théorème 6 affirme l'existence, n'induisent pas nécessairement la même application de S_p dans le bord de H_p. Cette partition de Σ_3 par f a un analogue combinatoire bien connu, mais cette partition de Σ_3 par f contient plus d'informations que son analogue combinatoire.

On appelle une telle partition une <u>partition de genre</u> p. Le plus petit entier p tel qu'il existe une partition de genre p est noté $p(\Sigma_3)$. La conjecture de Poincaré entraîne que lorsque Σ_3 est simplement connexe, $p(\Sigma_3) = 0$. Comme je ne crois pas que la conjecture de Poincaré soit vraie, j'approche le problème en ajoutant à l'hypothèse $\pi_1(\Sigma_3) = 0$, des conditions suffisantes pour que $p(\Sigma_3) = 0$. Par ces méthodes on pourrait être conduit à un contre-exemple. L'année dernière trois mathématiciens bien connus ont présenté, de bonne foi, des démonstrations de la conjecture de Poincaré qui se sont révélées fausses.

Voici comment j'aborde le problème: Si Σ_3 est une sphère d'homologie avec une partition de genre p définie par une fonction f, le théorème des bols nous donne plusieurs conditions sur les points critiques w d'indice 2 et les points critiques z d'indice 1, suffisantes pour qu'on puisse les éliminer deux à deux. La nouvelle fonction définit alors une partition de genre p-1. Si on peut itérer le procédé jusqu'à $p = 0$, Σ_3 sera une sphère topologique. Si l'hypothèse que Σ_3 est simplement connexe, implique qu'on peut faire pour tout p une élimination de points critiques, alors la conjecture de Poincaré est vraie.

Nous allons examiner les bols de f sur une sphère d'homologie Σ_3.

Soit A_- le point critique de f d'indice 0, et A_+ le point critique d'indice 3.

Le 1-bol descendant d'un point critique z_i d'indice 1 (voir la figure) est composé de z_i et de deux f-arcs descendant de z_i à A_-. Soit g_i le lacet formé par l'adhérence de ce bol. Si on prend A_- comme point-base de T_p^- , on peut montrer que les classes $[g_1]\dots[g_p]$ des lacets g_i , constituent un système de p générateurs indépendants de $\pi_1(T_p^-)$.

De même le 1-bol qui monte de w_i a A_+ pour point adhérent, et son adhérence est un lacet h_i. Si on prend A_+ comme point-base de T_p^+, les classes $[h_i]\dots[h_p]$, constituent un système de générateurs indépendants de $\pi_1(T_p^+)$.

<u>Description des</u> 2-<u>calottes de</u> f <u>sur</u> Σ_3. z_i est le sommet d'une 2-calotte montante D_+^i , et w_j d'une 2-calotte descendante D_-^j. Comme le deuxième groupe d'homologie de Σ_3 est trivial par hypothèse, toute 2-calotte descendante rencontre nécessairement au moins une 2-calotte montante et réciproquement. Les f-arcs de ces calottes sont situés entre les cotes 1 et 3.

Soient a_i et b_j les traces respectives de D_-^i et D_+^j sur la surface de niveau S_p de cote 2. a_i et b_j sont des cercles topologiques. Le théorème des bols entraîne :

<u>Si</u> a_i <u>et</u> b_j <u>se coupent transversalement en un point unique, ou si</u> a_i <u>rencontre seulement une trace</u> b_j , <u>alors on peut éliminer les points critiques</u> z_i <u>et</u> w_j ; <u>et par suite</u> Σ_3 <u>admet une partition de genre</u> p-1.

Ce qui précède entraîne le théorème plus général suivant.

Soit λ_+ (resp. λ_-) un difféomorphisme de T_p^+ (resp. T_p^-) sur lui-même, qui conserve l'orientation.

THÉORÈME 7. S'il existe deux difféomorphismes λ_+, λ_-, tels que les images $\lambda_-(a_i)$ et $\lambda_+(b_j)$ se coupent transversalement en un point unique, ou si $\lambda_-(a_i)$ rencontre un seul des $\lambda_+(b_j)$, alors Σ_3 admet une partition de genre $(p-1)$.

Nous allons donner une condition nécessaire pour que la conjecture de Poincaré soit vraie.

Condition R_q sur Σ_3. On dira que Σ_3 vérifie la condition R_q, $q > 0$, s'il existe une partition de Σ_3 de genre q satisfaisant à la propriété suivante : il existe une trace a_i dont le lacet conjugué c_i dans S_q est homotope à zéro dans T_q^+.

Si Σ_3 est simplement connexe, c_i est homotope à zéro dans Σ_3. La condition R_q demande que c_i soit homotope à zéro dans T_q^+.

THÉORÈME 8. Une condition nécessaire et suffisante pour que Σ_3 admette une partition de genre p, est que Σ_3 satisfasse la condition R_q pour tout $q > p$.

La conjecture de Poincaré est vraie si et seulement si l'hypothèse que Σ_3 soit simplement connexe entraîne la condition R_q pour tout $q > 0$.

Le théorème 7 est notre théorème de base pour l'étude de Σ_3. Pour se servir des difféomorphismes λ_- et λ_+, il faut avoir à sa disposition des théorèmes d'existence. J'ai établi un certain nombre de théorèmes de ce type. Le théorème suivant a été établi en collaboration avec un jeune professeur John Cantwell, et il sera publié dans la revue Topology.

Considérons le cas de T_p^- pour la partition définie par f. On dira qu'un difféomorphisme de T_p^- sur lui-même est un f-difféomorphisme s'il envoie les variétés de niveau sur les variétés de niveau.

THÉORÈME 9. *Soit* G *le groupe fondamental de* T_p^-, *et soit* Γ *un automorphisme de* G *sur* G. *Alors* Γ *est induit par un* f-*difféomorphisme de* T_p^- *sur* T_p^-.

Je suis persuadé que l'utilisation de ces méthodes doit clarifier l'étude des sphères d'homologie de dimension 3 et en particulier de la conjecture de Poincaré, ne serait-ce qu'en réduisant considérablement les occasions de raisonnement faux.